ბარბარა ჰოლ პარტი

ალის ტერ მიულენი

რობერტ ე. უოლი

მათემატიკური მეთოდები ენათმეცნიერებაში

ნაკვეთი I

– მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ზოგადი ლოგიკური საფუძვლები

Barbara H. Partee

Alice ter Meulen

Robert E. Wall

Mathematical Methods in Linguistics

მათემატიკური მეთოდები ენათმეცნიერებაში –

– მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ზოგადი ლოგიკური საფუძვლები

მათემატიკის დაფუძნებისა და სწავლების მეთოდიკის კათედრაზე 2004 წელს ჩამოყალიბებული „მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ლოგიკის" სპეციალიზაციის და სახელმწიფო მიზნობრივი პროგრამის - „კომპიუტერის სრული პროგრამულ-მომსახურეობითი მოქცევა ბუნებრივ ქართულ ენობრივ გარემოში" - მიზნებისა და ამოცანების გათვალისწინებით კურსის მომზადებაზე მუშაობდა ჯგუფი (ფილ. მეც. დოქტორი ვლადიმერ ლეკიაშვილი, ფილ. მეც. დოქტორი ეთერ სოსელია, ფილ. მეც. კანდიდატი მარინე ივანიშვილი) მთავარი მეცნიერ თანამშრომლის კონსტანტინე ფხაკაძის ხელმძღვანელობით. წიგნის საბოლოო ვარიანტის მომზადებასა და რედაქტირებაში მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანეს მათემატიკის დაფუძნებისა და სწავლების მეთოდიკის კათედრის დოცენტებმა გივი ნადიბაიძემ, ვახტანგ ფხაკაძემ და ფილოლოგიურ მეცნიერებათა დოქტორმა კახა გაბუნიამ. ჯგუფი მადლობას უხდის მათ თანამშრომლობისათვის.

ს-ს ჟურნალი „ქართული ენა და ლოგიკა" დამატების სახით გამოცემს საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელო კურსს „მათემატიკური მეთოდები ენათმეცნიერებაში"
ggll_pkhakadze@caucasus.net
უნივერსიტეტის ქ. № 2
ISSN 1512 – 2840

გამოიცემა საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს მიერ გამოყოფილი დაფინანსებით და ქართულ-ამერიკული საწარმოს „კანარგო სტანდარტ ოილ პროდუქტის" ქველმოქმედებითი მხარდაჭერით

HAND BOOK "MATHEMATICAL METHODS IN LINGUISTICS" IS PUBLISHED AS ADDITION TO THE S-E JOURNAL "THE GEORGIAN LANGUAGE AND LOGIC"
ggll_pkhakadze@caucasus.net
2 University St
ISSN 1512 - 2840

Published with the sponsorship of Ministry of Education and Science and charity of Georgian-American Enterprise "Canargo Standard Oil Products"

ᲬᲘᲜᲐᲗᲥᲛᲐ ᲬᲘᲒᲜᲘᲡ

ᲥᲐᲠᲗᲣᲚᲘ ᲒᲐᲛᲝᲪᲔᲛᲘᲡᲐᲗᲕᲘᲡ

კურსი მზადდება ჩომსკი-მონტეგიუსეული ლოგიკურ-ლინგვისტური მიმართულების დამფუძნებლების, სამეცნიერო წრეებში საყოველთაოდ აღიარებული ავტორების ბარბარა ჰოლ პარტის, ალის ტერ მიულენის და რობერტ ედვარდ უოლის იმ საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოს მიხედვით, რომლის სათაურია ,,მათემატიკური მეთოდები ენათმეცნიერებაში''. ამ სახის ქართული გამოცემის არარსებობის პირობებში კურსის მომზადებას აკადემიკოს თამაზ გამყრელიძის, პროფესორების დავით გორდეზიანის, ჰამლეტ მელაძისა და თამაზ თევზაძის რეკომენდაციების საფუძველზე სრულად დაეჭირა მხარი ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მეთოდური საბჭოს მიერ.

მთარგმნელთა ჯგუფის გადაწყვეტილებით წინამდებარე გამოცემას წინათქმად თან ერთვის შესაბამის სფეროებში მოღვაწე სპეციალისტების რეცენზიები, რომლებიც თითქმის ამომწურავი სისრულით წარმოაჩენენ სახელმძღვანელო კურსის მიზნებს, შესაძლო გამოყენებათა არეებსა და, საზოგადოდ, ამ ტიპის სახელმძღვანელო კურსების შემდგომი განვითარების პერსპექტივებს.

მთარგმნელი რედაქტორები: კ. ფხაკაძე, ლ. ლეკიაშვილი

მთარგმნელები: ე.სოსელია, მ. ივანიშვილი

P. S. ნებისმიერი სახის შენიშვნა ან მოსაზრება, შეეხება ეს წიგნის ამ პირველ ქართულ გამოცემაში უნებლიედ გაპარულ შეცდომასა თუ ტექსტთან დაკავშირებულ სხვა უფრო სიღრმისეულ თვალსაზრისს, ჩვენი მხრიდან გაგებული იქნება როგორც თანამშრომლობა, რაც, ბუნებრივია, თვისობრივად წაადგება სახელმძღვანელო კურსის შემდგომი დასრულებული გამოცემის მიზნებს.

Რ Ე Ც Ე Ნ Ზ Ი Ა

გავეცანი ,,ლოგიკისა და ენის გაერთიანებულ ქართულ ჯგუფში'' კ. ფხაკაძის ხელმძღვანელობით მომზადებულ ბ. პარტის, ალის ტერ მიულენისა და რ. უოლის წიგნის - ..მათემატიკური მეთოდები ენათმეცნიერებაში'' პირველი ორი ნაწილის თარგმანს, რომელიც ერთიანდება სათაურით - ,,მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ზოგადი ლოგიკური საფუძვლები''.

2004 წლის 18 ივნისის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სამეცნიერო საბჭოს გადაწყვეტილებით ,,მათემატიკის დაფუძნებისა და სწავლების მეთოდიკის კათედრა'' გაფართოვდა ,,მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ლოგიკის'' სპეციალიზაციით, რაც ქართული ბუნებრივი ენობრივი სისტემის თანამედროვე ლოგიკურ-ლინგვისტური მეთოდებით შესწავლისა და მისი მათემატიკური დაფუძნების მიზნით აუცილებელი საუნივერსიტეტო სწავლების განვითარებისკენ გადადგმული პირველი მნიშვნელოვანი ნაბიჯი გახლდათ.

უკვე მაშინ, კათედრაზე, გამოიკვეთა აზრი იმის თაობაზე, რომ კათედრის დასახელებაში ასახულიყო მისი ეს ახალი, ზოგადქართული ენობრივ-კულტურული თვალსაზრისებით მეტად მნიშვნელოვანი მიმართულება, რაც, თავის მხრივ, ქართული ბუნებრივი ენობრივი სისტემის მანქანებთან ინტელექტუალური ურთიერთობის ენად მოდიფიცირების პრობლემის მაღალი აქტუალობითაა განპირობებული. — გასაგებია, რომ კათედრაზე მიმდინარე ზემოხაზგასმული პროცესები პირდაპირ კავშირშია თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სახელმწიფო მიზნობრივი პროგრამით - ,,კომპიუტერის სრული პროგრამულ-მომსახურეობითი მოქცევა ბუნებრივ ქართულ ენობრივ გარემოში'' - მოხაზულ მიზნებთან, რომელთა ღრმა საზოგადო კულტურული ღირებულებები არაერთხელ იქნა ხაზგასმული.

ამგვარად, უნდა ითქვას, რომ სარეცენზიოდ წარმოდგენილი ნაშრომი პირდაპირ პასუხობს კათედრის დღევანდელ მიზნებსა და მის პერსპექტიულ ინტერესებს (როგორც დაფუძნების, ისე სწავლების მეთოდიკის თვალსაზრისებით). თუმცა, იგი აქტუალურია არა მხოლოდ აღნიშნული თვალსაზრისებით.

კათედრის მეთოდისტური სპეციფიკისა და კომპეტენციის გათვალისწინებით საჭიროდ მივიჩნიე ხაზგასმით დამეჭირა მხარი უკვე გამოკვეთილი თვალსაზრისისათვის იმის თაობაზე, რომ სარეცენზიოდ წარმოდგენილი კურსი, გარდა ზემოაღნიშნული ფუნდამენტური მნიშვნელობების მქონე მიზნობრივი პროგრამისა ემსახურება მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ფარგლებში ლოგიკურად გამართული მსჯელობითი უნარ-ჩვევების განვითარება-ჩამოყალიბების მეტად მნიშვნელოვან საქმეს. აქედან გამომდინარე, საჭიროდ მივიჩნევ ამ კურსის ჩართვას პედაგოგიური სპეციფიკების მქონე ფაკულტეტებზეც. — ეს არსებითად შეუწყობს ხელს ზოგადი უნარების განვითარებაზე პრიორიტეტულად ორიენტირებული სასწავლო სისტემისათვის აუცილებელი და თანამედროვე მოთხოვნების შესაბამისი პედაგოგიური კადრების მომზადებას.

გარდა ამისა, საჭიროდ და შეიძლება ითქვას აუცილებლადაც მივიჩნევ სარეცენზიოდ წარმოდგენილ ნაშრომში განხილული საკითხების მეთოდური შეჯერებისა და პედაგოგიკური გადამუშავების საფუძველზე მესამე საფეხურის სასკოლო სახელმძღვანელო კურსის შემზადებას როგორც საბუნებისმეტყველო, ისე ჰუმანიტარული სექტორის მოსწავლეებისათვის, რაც, ვფიქრობ, არსებითად და საერთო სასკოლო სივრცისათვის უნიფიცირებულად გადაჭრის ზოგადი უნარების განვითარებასა და მათ ტესტირებასთან დაკავშირებული პრობლემების ძირითად შემადგენლებს.

მათემატიკის დაფუძნებისა და სწავლების მეთოდიკის
კათედრის გამგე,
პროფესორი თამაზ თევზაძე

რ ე ც ე ნ ზ ი ა

გავეცანით ,,ლოგიკისა და ენის გაერთიანებულ ქართულ ჯგუფში'' კ. ფხაკაძის ხელმძღვანელობით მომზადებულ ბ. პარტის, ალის ტერ მიულენისა და რ. უოლის წიგნის - ..მათემატიკური მეთოდები ენათმეცნიერებაში'' პირველი ორი ნაწილის თარგმანს, რომელიც ერთიანდება სათაურით - ,,მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ზოგადი ლოგიკური საფუძვლები''.

წიგნი უაღრესად აქტუალურია არამარტო მათემატიკური (კერძოდ, მათემატიკური ლოგიკის), არამედ ფილოლოგიური განხრის სპეციალისტებისთვისაც. აღსანიშნავია, რომ დღესდღეობით პრაქტიკულად არანაირი ყურადღება არ ექცევა ენის ლოგიცისტური

დამუშავების პრობლემებს, რაც დიდ უხერხულობას ქმნის ჰუმანიტარულ ფაკულტეტებზე. მიგვაჩნია, რომ როგორც იურისტებისთვის, ისე ლინგვისტებისათვისაც აუცილებელია თანამედროვე მათემატიკური ლინგვისტიკის უახლესი მონაპოვრების გაცნობა-ათვისება. წინააღმდეგ შემთხვევაში კვლავ დავრჩებით საგნობრივ იზოლაციაში და შეუძლებელი გახდება საერთაშორისო სტანდარტებზე ჩვენი როგორც საბუნებისმეტყველო, ისე ჰუმანიტარული დარგების გადაყვანა.

განათლების სისტემის რეფორმირების კონტექსტში ამ პროექტის განხილვა ასევე აქტუალურია. ლოგიკური აზროვნების განვითარების გარეშე, ლოგიკურად გამართული ენობრივი აზროვნების გარეშე დღეს უკვე წარმოუდგენელია თანამედროვე მასწავლებელი. ამ თვალსაზრისითაც წიგნი საჭირო და აუცილებელია პედაგოგთა სექტორისთვის თანამედროვე მოთხოვნების შესაბამისად მასწავლებლის ჩამოსაყალიბებლად.

რეკომენდაციას ვაძლევთ ამ პროექტზე მომუშავე ჯგუფს, რომ ეს წიგნი გამოქვეყნდეს საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოდ.

განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს პროექტ ,,ილია ჭავჭავაძის''
მათემატიკის ჯგუფის კოორდინატორი
ზაქარია გიუნაშვილი

განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს პროექტ ,,ილია ჭავჭავაძის''
ქართული ენის და ლიტერატურის ჯგუფის კოორდინატორი
კახა გაბუნია

რ ე ც ე ნ ზ ი ა

გავეცანი ,,ლოგიკისა და ენის გაერთიანებულ ქართულ ჯგუფში'' მომზადებულ ბ. პარტის, ა. ტერ მიულენისა და რ. უოლის წიგნის - ..მათემატიკური მეთოდები ენათმეცნიერებაში'' პირველი ორი ნაწილის თარგმანს, რომელიც ერთიანდება სათაურით - ,,მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ზოგადი ლოგიკური საფუძვლები''.

ზოგადი უნარების ტესტირება და მასთან დაკავშირებული ზოგადი უნარების განვითარება მიზნად ისახავს მათემატიკური და ბუნებრივ-ენობრივი საშუალებებით მოწოდებული ინფორმაციის ადეკვატური აღქმისა და დამუშავების, ლოგიკური მსჯელობის, მოვლენათა შორის არსებითი მიმართებების წვდომის ჩვევების ჩამოყალიბება-გაღრმავებას. ეს ყველაფერი არსებითად ემყარება როგორც მათემატიკისთვის დამახასიათებელ ზოგად ლოგიკურ ხედვებს, ისე იმ ენობრივი სისტემის ლოგიცისტურ და ფსიქოლოგიცისტურ თავისებურებებს, რომლის ფარგლებშიც მიმდინარეობს სასწავლო პროცესი.

აქედან გამომდინარე, სარეცენზიოდ წარმოდგენილი ნაშრომი, რომელშიც ძირითადად განიხილება მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ურთიერთმიმართებანი და მათი როგორც ზოგადი, ისე კერძო ენობრივი თავისებურებანი, მეტად აქტუალურია. მით უფრო, რომ, სამწუხაროდ, ქართულ ენაზე ჯერ კიდევ არ არსებობს ანალოგიური ხასიათის საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელო კურსი. გარდა ამისა, უდავოა, რომ დღეს უკვე მიმდინარე რეფორმით განსაზღვრულ პრიორიტეტულ ინტერესთა ჭრილში ზემოაღნიშნული სახელმძღვანელო კურსი საჭირო და აუცილებელია თანამედროვე მოთხოვნათა შესაბამისი პედაგოგთა სექტორის ჩამოსაყალიბებლად.

ამგვარად, რეკომენდაციას ვუწევ ამ კურსზე მომუშავე ჯგუფს (ჯგუფის ხელმძღვანელი კ. ფხაკაძე), რომ ეს წიგნი გამოქვეყნდეს საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოდ.

შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრის
ზოგადი უნარების ჯგუფის ხელმძღვანელი
სოფო დოლიძე

რ ე ც ე ნ ზ ი ა

გავეცანი ,,ლოგიკისა და ენის გაერთიანებულ ქართულ ჯგუფში'' კ. ფხაკაძის ხელმძღვანელობით მომზადებულ ბ. პარტის, ალის ტერ მიულენისა და რ. უოლის წიგნის - ..მათემატიკური მეთოდები ენათმეცნიერებაში'' პირველი ორი ნაწილის თარგმანს, რომელიც ერთიანდება სათაურით - ,,მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ზოგადი ლოგიკური საფუძვლები''.

მოგეხსენებათ, რომ დღეს სასწავლო-სამეცნიერო სივრცე იყოფა საბუნებისმეტყველო და ჰუმანიტარულ სექტორებად, რომელთაგან პირველი ძირითადად ხასიათდება გაზომვებით, მორე კი ინტერპრეტაციებით, რაც თვისობრივად ზუსტად ასახავს ამ სფეროების განმასხვავებელ შემადგენლებს. თუმცა, დედუქციური და ინდუქციური მსჯელობები ანუ კერძო და ზოგადი ხასიათის ლოგიკურად სწორი, მიზეზ-შედეგობრივი დასკვნების გამოყვანა პირველსაწყისად განსაზღვრული მოცემულობების საფუძველზე, ისევე როგორც უკვე შემოთავაზებული დასაბუთებების ლოგიკურად დაფუძნებული კრიტიკული ანალიზი თანაბრად მნიშვნელოვანია ნებისმიერად აღებული ინტელექტუალური (სამეცნიერო) სფეროსათვის.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, მივიჩნევ, რომ სარეცენზიოდ წარმოდგენილი ნაშრომი აქტუალურია არა მხოლოდ მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტისა და ამ ფაკულტეტზე ახლად ჩამოყალიბებული ,,მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ლოგიკის'' სპეციალიზაციისათვის, არამედ საზოგადოდ.

წარმოდგენილი ნაშრომის განსაკუთრებულ აქტუალობას განაპირობებს ისიც, რომ სამწუხაროდ, ჯერ კიდევ, ანალოგიური ხასიათის ქართული სახელმძღვანელო კურსი არ არსებობს, რაც, თავის მხრივ, იმით აიხსნება, რომ ქართული ლოგიკურ-ლინგვისტური სამეცნიერო სფეროს რეალური (როგორც სასწავლო, ისე სამეცნიერო თვალსაზრისებით) ფორმირების პროცესი მხოლოდ ახლა იწყება.

გამომდინარე ზემოთქმულიდან და იმის გათვალისწინებითაც, რომ ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მეთოდურ საბჭოს (იხ. აღნიშნული საბჭოს 2003 წლის 17 აპრილის სხდომის ოქმი N8; სხდომის თავმჯდომარე, პროფესორი გ. ჯაიანი) უკვე განხილული აქვს აღნიშნული საკითხი, მხარს ვუჭერ სარეცენზიოდ წარმოდგენილი ნაშრომის საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოდ გამოქვეყნებას. — ეს არსებითად შეუწყობს ხელს მექანიკა-მათემატიკის და ინფორმატიკის ფაკულტეტების სტუდენტების ინტეგრაციას (ჩართავს) ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სახელმწიფო მიზნობრივ პროგრამაში - ,,კომპიუტერის სრული პროგრამულ-მომსახურეობითი მოქცევა ბუნებრივ ქართულ ენობრივ გარემოში'', რომლის მიზანიც მათემატიკური ენის გავლით ქართული ენის მანქანებთან ინტელექტუალური ურთიერთობის ენად მოდიფიცირებაა, რაც, დღეს უკვე, გამომდინარე ზოგადქართული ენობრივ-კულტურული თვალსაზრისებიდან, განსაკუთრებული მნიშვნელობის მქონე ამოცანადაა განსაზღვრული.

გარდა ზემოაღნიშნულისა, საჭიროდ მივიჩნიე სარეცენზიოდ წარმოდგენილი ნაშრომის თაობაზე მეთქვა შემდეგი: კურსი, რომელიც გარდა ზემოაღნიშნული ფუნდამენტური მნიშვნელობის მქონე მიზნობრივი პროგრამისა ემსახურება მათემატიკური და ბუნებრივი ენების (ჩვენს შემთხვევაში, პრიორიტეტულად, ბუნებრივი ქართული ენის) ფარგლებში ლოგიკურად გამართული დედუქციური და ინდუქციური მსჯელობათა ზოგადი უნარ-ჩვევების განვითარებას,

ანუ, უხეშად რომ ვთქვათ, ქართულ ენაში სწორი, ლოგიკურად კორექტული (გამართული) განსჯითი უნარების ფორმირება-განვითარებას, მნიშვნელოვანია და სპეციფიკათა გათვალისწინებით ადაპტირებული სახით უნდა ისწავლებოდეს სხვადასხვა ფაკულტეტებზე. მათ შორის განსაკუთრებულად მნიშვნელოვნად მივიჩნევ ამ კურსის ჩართვას იურიდიული და პედაგოგიური სპეციფიკების მქონე ფაკულტეტებზე: რამდენადაც, პირველ შემთხვევაში - **ეს აამაღლებს ლოგიკურად დაფუძნებული სამართლებრივი განსჯის კულტურას,** ხოლო, მეორე შემთხვევაში - **საშუალებას მოგვცემს მოვამზადოთ ზოგადი უნარების განვითარებაზე პრიორიტეტულად ორიენტირებული სასწავლო სისტემისათვის საჭირო და აუცილებელი პედაგოგიური კადრები**.

და ბოლოს, ისევ სასკოლო რეფორმასთან და აქ პრიორიტეტულად მოხაზულ უმნიშვნელოვანეს მიზნებთან დაკავშირებით: საჭიროდ მივიჩნევ სარეცენზიოდ წარმოდგენილ ნაშრომში (,,მათემატიკური და ბუნებრივი ენების ზოგადი ლოგიკური საფუძვლები'') განხილული საკითხების შესაბამისი მეთოდური და მიზნობრივი გადამუშავების საფუძველზე (იქნებ იგივე სათაურითვე) მესამე საფეხურის სასკოლო სახელმძღვანელო კურსის მომზადებას, რომლითაც თანაბრად დაიტვირთებიან როგორც საბუნებისმეტყველო, ისე ჰუმანიტარული სექტორის მოსწავლეები, რაც არსებითად და საერთო სასკოლო სივრცისათვის უნიფიცირებულად მოხსნის ზოგადი უნარების განვითარებასა და მათ ტესტირებასთან დაკავშირებულ პრობლემებს.

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი ავთანდილ გაგნიძე.

შ ი ნ ა რ ს ი

ნაწილი B

ლოგიკა და ფორმალური სისტემები

თავი 5

ლოგიკისა და ფორმალური სისტემების სასაფუძვლო ცნებები

შესავალი

ეს წიგნი შეიქმნა მანამდე არსებული ორი შესავალი კურსის საფუძველზე. ესენია: ბარბარა ჰოლ პარტის ,,მათემატიკის საფუძვლები‘‘ და რობერტ უოლის ,,მათემატიკური ლინგვისტიკის შესავალი‘‘, რომლებიც 1984-86 წლებში ამერიკის შეერთებულ შტატებში გამოიცა. ავტორებმა მალე დაინახეს ამ წიგნების შესწორებისა და ხელახალი გამოცემის საჭიროება. ამ მიზნით მათ გადაწყვიტეს ძალების გაერთიანება. მალე პროექტს, რომლის მიზანიც იყო წინამდებარე წიგნის - ,,მათემატიკური მეთოდები ლინგვისტიკაში‘‘ - გამოცემა, შეუერთდა ალის ტერ მიულენი.

მისი წინამორბედების მსგავსად, ეს წიგნი განსაზღვრულია სტუდენტებისათვის, რომლებიც შეისწავლიან ლოგიკასა და ლინგვისტიკას, თუმცა მისი გამოყენება შეუძლია ყველას, ვისაც სურს გაეცნოს დისკრეტული მათემატიკის იმ ნაწილს, რომელიც ფართოდ გამოიყენება თანამედროვე ლინგვისტურ თეორიებში. ჩვენ ვცდილობდით სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ისეთი შესავალი კურსის გაკეთებას, რომელიც ძირითადად მხოლოდ საშუალო სკოლის მასალის შესაბამის მათემატიკურ ცოდნას დაეყრდნობოდა. და მართლაც, რამდენადაც წიგნის A და B ნაწილებით წარმოდგენილი მათემატიკა ეხება არა იმდენად უწყვეტ სტრუქტურებს, მაგალითად ისეთებს, როგორიც წრფე და სივრცეა, არამედ უფრო ისეთ დისკრეტულ მონაცემებს, როგორიც ანბანურ ასოთა მიმდევრობებია, მკითხველი შედარებით ადვილად იპოვის ამ მასალის მსგავსებასა და სიახლოვეს საშუალო სკოლის ალგებრასთან, ვიდრე ფორმალურ არითმეტიკასთან, ან ანალიზურ გეომეტრიასთან. ამგვარად, ჩვენი ერთ-ერთი ძირითადი მიზანი იყო ის, რომ მოგვემზადებინა სასაფუძვლო ხასიათის შესავალი კურსი სიმრავლეთა თეორიასა და მათემატიკურ ლოგიკაში, რადგანაც ეს სწორედ ის დისციპლინებია, რომლებიც აუცილებელია ენათმეცნიერებაში და არა მხოლოდ ენათმეცნიერებაში წარმოდგენილი იმ მნიშვნელოვანი ფორმალური ხასიათის ნაშრომების გასაგებად, რომელთა რიცხვი დღითი დღე იზრდება.

წიგნის დიდი ნაწილი ეთმობა იმის ჩვენებას, თუ სიმრავლურ-თეორიული და ფორმალურ-ლოგიკური საშუალებებით როგორ იგება უფრო და უფრო რთული და საინტერესო სტრუქტურები. ამასთან, საუნივერსიტეტო კურსის საათობრივად შეზღუდული მოცულობის გათვალისწინებით ვცდილობდით მკითხველისათვის გასაგებად გვეჩვენებინა ის, თუ რარიგ სასარგებლო შეიძლება აღმოჩნდნენ ეს სტრუქტურები სხვადასხვა ლინგვისტურ სფეროებში. მაგალითად, C ნაწილში დალაგებისა და ოპერაციის ცნებებიდან ამოსვლით ისაზღვრება ისეთი ალგებრული სტრუქტურები როგორებიცაა ჯგუფი, ნახევრადჯგუფი, მონოიდი. აქვე განიხილება ბულისა და ჰეიტინგის ალგებრებისა და ალგებრული მესერის ცნებები, რომლებმაც ცენტრალური როლი ითამაშეს იმ ბოლოდროინდელ ნაშრომებში, რომელთა ძირითადი მიზანი მოვლენების (ხდომილებების), მასის ტერმინების, კოლექტიური და დისტრიბუციული მოქმედებებისა და სხვა ამგვარი სემანტიკების ფორმალური კვლევა იყო. წიგნის D ნაწილი ეთმობა პრედიკატული ლოგიკის ზოგად ფორმალურ მოდელებსა და სიმრავლურ-თეორიულ სემანტიკებს. აღნიშნული საკითხების განხილვისას არსებითად გათვალისწინებულია ინგლისური ენის ერთი, გარკვეულად შეზღუდული, მაგრამ ძირეულად მნიშვნელოვანი ნაწილი, რის საფუძველზეც შემდგომ უკვე განიხილება განზოგადებული კვანტორების თეორია და ის პრობლემური საკითხები, რომლებიც ინტენსიონალურ კონსტრუქციებს უკავშირდება. E ნაწილში განხილულია საკითხები იმ სამეცნიერო სფეროდან, რომელსაც, ტრადიციულად, ,,მათემატიკური ლინგვისტიკის‘‘ სახელით მოიხსენიებდნენ და რომელიც ფორმალური ენებისა და ავტომატების თეორიას აერთიანებდა. ამ ნაწილში შემოდის აგრეთვე ინგლისური ენის არარეგულარობის დამტკიცებაც და ასევე დამტკიცება იმისა, რომ შვედური გერმანული არ

წარმოადგენს კონტექსტისაგან თავისუფალ ენას. აქვეა წარმოდგენილი მასალები ისეთი ფორმალური ენების შესახებ როგორებიცაა, მაგალითად, ინდექსირებული ენები, ენები ხეებიანი კონსტრუქციებით და კატეგორიზებული ენები, რომლებსაც გარდამავალი ადგილი უჭირავთ კონტექსტისგან თავისუფალ და კონტექსტზე დამოკიდებულ ენებს შორის. ამ ნაწილში წარმოდგენილია აგრეთვე მცირე მსჯელობა ტრანსფორმაციული გრამატიკის ,,სტანდარტული თეორიის'' ზოგადი მათემატიკური თვისებების შესახებ.

ასე უხეშად წარმოდგენილი აღწერიდანაც ალბათ ცხადია, რომ C, D და E ნაწილები, თითოეული ცალ-ცალკე, წარმოადგენენ A და B ნაწილებში გადმოცემული მასალის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ გაგრძელებებს. წინამდებარე წიგნში მასალა ბევრად უფრო მეტია, ვიდრე ამას ერთსემესტრიანი ან თუნდაც ერთწლიანი კურსი ითვალისწინებს. ამდენად, მასწავლებელს მოუხდება მასალის შერჩევა ჯგუფის ცოდნის დონისა და ინტერესების გათვალისწინებით. მისთვის კი, ვინც ამ საკითხებს პირველად ეცნობა, უფრო გონივრული იქნება, თუ არ წაიკითხავს პირველ რვა თავს თანამიმდევრობით. უმჯობესია პარალელურად გაეცნოთ სიმრავლეთა თეორიისა და ლოგიკის ელემენტარულ ნაწილებს, ხოლო შედარებით რთული მასალა აქსიომატური სისტემების შესახებ, რომელიც B ნაწილის მერვე თავშია მოცემული, დროებით გვერდზე გადადოთ. თავებისა და ნაწილების ბოლოს წარმოდგენილია სავარჯიშოები, რომელთა პასუხები შეგიძლიათ ნახოთ წიგნის ბოლოს. ამ სავარჯიშოების დახმარებით სტუდენტები, რომლებიც კლასთან ერთად მეცადინეობენ და ისინიც, ვინც დამოუკიდებლად სწავლობენ, შეძლებენ შეამოწმონ თუ როგორ გაიგეს შესაბამისი მასალა. ნაწილი მასალისა, რომელიც, თუ გულახდილნი ვიქნებით, უფრო სასურველია, ვიდრე აუცილებელი, გადატანილია დანართში. რასაკვირველია, ყოველი ნაწილის ბოლოს იპოვით მითითებებს ლიტერატურასთან დაკავშირებით.

ორიოდე სიტყვა უნდა ითქვას იმის შესახებაც, რაც არ შევიდა ჩვენს წიგნში. არ გვიცდია, რომ შეგვეტანა ალბათობის თეორია და სტატისტიკა, რომელიც გამოიყენება გლოტოქრონოლოგიაში, ტექსტში სიტყვებისა და კონსტრუქციების სიხშირეთა გამოთვლისას და ფაქტობრივად, ნებისმიერი სახის ექსპერიმენტის მონაცემების ანალიზისას. არ შეგვიტანია ტალღათა თეორიის მათემატიკა, რომელიც აკუსტიკურ ფონეტიკაში გამოიყენება და არც ის გამოთვლითი მათემატიკა, რომელიც ავტომატთა თეორიის საფუძვლებს სცილდება და რომლითაც სარგებლობენ გამოთვლით ლინგვისტიკასა და მანქანურ თარგმანში მასალის ავტომატური ანალიზისათვის გამოყენებადი ალგორითმების სირთულეების დათვლისას. ჩვენი აზრით, უსასრულოა იმ მათემატიკური მეთოდების რაოდენობა, რომლებიც შეიძლება საბოლოოდ სასარგებლო აღმოჩნდეს ლინგვისტური პრობლემების გადასაწყვეტად. ამდენად, ისეთი წიგნი, როგორიც ჩვენია, ვერასდროს ვერ იქნება ამომწურავი.

როცა ამ წიგნზე ვმუშაობდით ზემოაღნიშნული მიზნის გარდა, ჩვენ კიდევ ერთი მიზანი გვქონდა. ამასთან დაკავშირებით მოვახდენთ ციტირებას იმ წიგნის შესავლიდან, რომლის სათაურია - ,,მათემატიკა ლინგვისტებისათვის - საფუძვლები'':

> ამ წიგნის შორეული და უფრო ზოგადი მიზანი არის ის, რომ მათემატიკა გახდეს მეტად მისაღები, ნაკლებ გაუგებარი და, ვიმედოვნებთ, სასიამოვნოც კი იმ სტუდენტებისათვის, რომლებსაც უმწეობის განცდის გამო ან იმიტომ, რომ არ უყვართ, თავი შორს უჭირავთ მათემატიკისაგან. ბევრი კარგი სახელმძღვანელო დაიწერა აქ განხილულ საკითხებზე, მაგრამ მკითხველისაგან მათი უმეტესობა გულისხმობს მათემატიკის ცოდნის საკმაოდ მაღალ დონეს, თუმცა არა იმიტომ, რომ ამ წიგნებში განხილული საკითხები მოითხოვს ამას, არამედ იმიტომ, რომ სასწავლო პროგრამების უმეტესობაში ისეთი თემები, როგორიცაა ფორმალური სისტემები და ავტომატთა თეორია, როგორც წესი, პირველ სასწავლო წელს არ ისწავლება. ამ საგნებს მოგვიანებით გადიან, როცა უკვე ნასწავლი აქვთ საკმაოდ დიდი რაოდენობით სხვა ლოგიკური და მათემატიკური საგნები. რა თქმა უნდა, მხოლოდ ამ ერთი წიგნით ვერ გახდებით შემოქმედი მკვლევარი მათემატიკურ ლინგვისტიკაში ან მათემატიკის

რომელიმე აქ განხილულ დარგში, მაგრამ უნდა დაგვიჯეროთ, რომ ეს წიგნი უეჭველად შეგიქმნით მტკიცე საფუძველს იმისათვის, რომ ძირითადად გაერკვეთ როგორც ლინგვისტიკაში, ისე სოციალურ და სხვა ბიჰევიორისტულ მეცნიერებებში აქტიურად გამოყენებად ფორმალისტურ მეთოდებში. ამასთანავე, ამ კურსის გავლის შემდეგ, თქვენ მეტი თვითდაჯერებით შეძლებთ გააგრძელოთ მათემატიკისა და ლოგიკის შემდგომი შესწავლა.

ეს წიგნი ბევრი ჩვენი კოლეგის მონაწილეობით მომზადდა. განსაკუთრებული მადლობა გვინდა გადავუხადოთ ფრედ ლანდმენს, დევიდ დოუთის, პაოლინ იაკობსონს, ჯონ ეჩემენდის, ტომ ჰუკარის, არნოლდ ზუიკის, კრეიგ რობერტსს და პიტერ ლაზერსონს, რომლებმაც ხელნაწერში გაიცნეს ამ წიგნის ადრინდელი ვერსია და ზოგიერთი ნაწილი საცდელად დაამუშავეს თავიანთ კლასებში. ჩვენ მათი დიდად მადლობელნი ვართ იმ კრიტიკისა და წინადადებებისათვის, რამაც ტექსტში ბევრი რამ უკეთესობისაკენ შეცვალა. უსაზღვროდ დიდი დრო დაუთმეს ტექსტის კომპიუტერულ მომზადებას ქეითი ადამჩიკმა, ლუის კონოვერმა, ჯონ ბროლიომ, ავერი ანდიუსმა და კჟიშეკ როზვადოვსკიმ. მათვე მოახდინეს ტექსტის „ლატექსირება" და გაამზადეს იგი გადასაღებად. მათი მოთმინება და ერთგულება უსასრულოა და სწორედ მათ უნდა ვუმადლოდეთ, რომ წიგნის ფასი სავსებით მისაღებია. გვინდა მადლობა გადავუხადოთ ლაური კარტუნენს, ანი ზაანენს, მარკ არინსზაინსა და სტივენ ვეისლერს მხარდაჭერისთვის, გამხნევებისთვის და გულღია მასპინძლობისთვის. ჩვენი გულწრფელი მადლობა, აგრეთვე, მარტინ სრივენერს, კლუვერის აკადემიური გამომცემლობიდან, წიგნის გამოცემის პერიოდში გამოჩენილი მუდმივი მხარდაჭერის, გაგებისა და მოთმინებისათვის. მადლიერებით აღვნიშნავთ, რომ სისტემური განვითარების ფონდმა დიდი დახმარება გაგვიწია გრანტი 650 სახით, რომელიც ბარბარა პარტიმ მოიპოვა ხელნაწერის მომზადების პერიოდში და, ასევე, მადლობელნი ვართ გრონინგენის უნივერსიტეტისა, იმ სამეცნიერო-კვლევითი გრანტისათვის, რომელიც 1985-86 წლებში მოიპოვა ალის ტერ მიულენმა.

ავტორები შეთანხმდნენ, რომ ნებისმიერი შეცდომა, გამოტოვება და სხვადასხვა სახის უზუსტობები მხოლოდ მათი ბრალია.

ნაწილი A
სიმრავლეთა თეორია

თავი 1
სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებები

1. 1 სიმრავლის ცნება

სიმრავლე არის ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნების გარკვეული ერთობლიობა გაგებული როგორც ერთი მთელი. სიმრავლის განმსაზღვრელი ერთობლიობის შემადგენელ საგნებს ამ სიმრავლის **წევრებს** ანუ **შემადგენლებს** უწოდებენ. სიმრავლის წევრები შეიძლება იყვნენ სრულიად განსხვავებული ბუნების საგნები. მაგალითად, წითელი საგნების სიმრავლე შეიძლება აერთიანებდეს მანქანებს, სისხლის უჯრედებს, წითლად გაფერადებულ ფიგურებს. სიმრავლის წევრი შეიძლება იყოს კონკრეტული საგანი, როგორიცაა მაგალითად რომელიმე მანქანა, ან სისხლის ესა თუ ის უჯრედი, ან ესა თუ ის ფიზიკური ბგერა. სიმრავლის წევრი შეიძლება იყოს გარკვეული სახის აბსტრაქციაც, როგორიცაა მაგალითად რიცხვი ორი, ან ინგლისური ბგერა p, ან წინადადების ცნება ჩინურ ენაში. ამგვარად, ერთ სიმრავლეში შეიძლება გავაერთიანოთ სრულიად ნებისმიერი საგნები, მაშინაც კი, თუ მათ არაფერი აქვთ საერთო გარდა იმისა, რომ ისინი ახლა უკვე ამ ერთი რომელიღაც სიმრავლის წევრები არიან. სიმრავლეთა თეორიის და, შესაბამისად, ამ წიგნის პირველი A ნაწილის მთავარი ამოცანა არის იმ კანონების შესწავლა-გამოკვლევა, რითაც სიმრავლეები ხასიათდებიან იმის გათვალისწინებით, რომ არანაირი ყურადღება არ ექცევა მათი შემადგენლების რეალურ საგნობრივ ბუნებას.

სიმრავლე შეიძლება იყოს ან დიდი, მაგალითად, დღეს არსებული ადამიანების სიმრავლე, ან პატარა, მაგალითად, ამ წიგნის ავტორების სიმრავლე. სიმრავლე შეიძლება იყოს ან სასრული, მაგალითად, ამ წიგნის მკითხველების სიმრავლე, ან 2 და 98407 რიცხვებს შორის განთავსებული ნატურალური რიცხვების სიმრავლე, ან უსასრულო, მაგალითად, ბუნებრივი ენის წინადადებების სიმრავლე, ან ნატურალური რიცხვების სიმრავლე - ნული, ერთი, ორი, სამი, ... და ა.შ.. სიმრავლის ზემომოყვანილი აღწერილეობითი განსაზღვრების თანახმად სიმრავლის წევრი შეიძლება იყოს აბსტრაქტული საგანიც. ეს იმას ნიშნავს, რომ სიმრავლის წევრი გარკვეულ შემთხვევებში შეიძლება იყოს რომელიღაც სხვა სიმრავლეც. ამგვარად, სიმრავლე შეიძლება იყოს რომელიმე სხვა სიმრავლის წევრიც და, ამავდროულად, წევრებად შეიცავდეს სხვა სიმრავლეებსაც. სიმრავლის ამ რთული და თავისუფალი ბუნების წყალობით სიმრავლეთა თეორია მათემატიკური და ლინგვისტური საკითხების მძლავრ საანალიზო იარაღად იქცა.

სიმრავლე შეიძლება განსაზღვრულად (მოცემულად) ჩაითვალოს მაშინაც კი, როცა ჩვენი პიროვნული ცოდნა მისი წევრების შესახებ არაამომწურავი და არასრულია. რომაელ იმპერატორთა სიმრავლე მკაცრად განსაზღვრულია, მიუხედავად იმისა, რომ მისი წევრები არაა საყოველთაოდ ცნობილი. ასევე, მკაცრად განსაზღვრულია დაწყებითი სკოლის მასწავლებელთა სიმრავლე, მიუხედავად იმისა, რომ ძნელი დასადგენია ამ სიმრავლის შემადგენელთა როგორც

ოდენობა, ისე ვინაობა. სიმრავლე რომ მკაცრად განსაზღვრული იყოს, ამისათვის საჭიროა დადგინდეს ის პრინციპი, რომლის მიხედვითაც ნებისმიერი ობიექტის შესახებ შეგვეძლება გავარკვიოთ არის თუ არა ის მოცემული სიმრავლის წევრი. მაგალითად, ჩვენი ამჟამინდელი მიზნებისათვის შეიძლება უბრალოდ დავუშვათ, რომ წითელი საგნების სიმრავლე მკაცრად განსაზღვრულია და ყურადღება არ მივაქციოთ იმ ვითარებას, რომ არ არსებობს ზუსტი საზღვარი წითელსა და ნარინჯისფერს შორის.

მხოლოდ ერთი წევრით შედგენილ სიმრავლეს ერთწევრიან ანუ ერთშემადგენლიან სიმრავლეს უწოდებენ. მაგალითად, ერთშემადგენლიანია სიმრავლე, რომელიც მხოლოდ შენგან შედგება. არსებობს კიდევ ერთი განსაკუთრებული სიმრავლე, რომელიც არცერთ წევრს არ შეიცავს და ეს სიმრავლე ცარიელ, ანუ უწევრო, ანუ უშემადგენლო სიმრავლედ იწოდება. ტერმინი ცარიელი სიმრავლე თავიდან შეიძლება მეტისმეტად უცნაურადაც მოგვეჩვენოს, მაგრამ მხოლოდ ასეთად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ოთხკუთხა წრეების სიმრავლე ან სიმრავლე ყველა იმ საგნებისა, რომელთაგან თითოეული არ ემთხვევა და არ წარმოადგენს თვითონ თავის თავს (ე.ი. რომელთაგან თითოეული არაა თავის თავის იგივური). გარდა ამისა, ამგვარი ცნებისა და ამგვარად გაგებული ცარიელი სიმრავლის არსებობა მათემატიკურად სავსებით გამართლებულია. თუ შემოვიფარგლებით იმ დაშვებით, რომ სიმრავლე უნდა შეიცავდეს სულ ცოტა ერთ წევრს მაინც, მაშინ სიმრავლეების შესახებ ჩამოყალიბებულ ზოგად დებულებებში საჭირო გახდება განსაკუთრებული დამატებითი პირობების გათვალისწინება საგანთა ცარიელი ანუ უშემადგენლო გაერთიანებისათვის. - საზოგადოდ, მათემატიკის პრინციპი განზოგადებისაკენ სწრაფვაა, მაშინაც კი, როცა ტრივიალური, შეზღუდული შემთხვევები განიხილება.

სიმრავლეთა თეორიაში მიღებულია შემდეგი შეთანხმებები: სიმრავლეებს აღვნიშნავთ A, B, C,… სიმბოლოებით, ხოლო სიმრავლის წევრებს a, b, c,… სიმბოლოებით, ზოგჯერ კი x, y, z,… სიმბოლოებით. მიმართება 'არის წევრი' ანუ 'წევრია' ჩაიწერება შემდეგი სპეციალური $\in$ სიმბოლოს მეშვეობით. ამგვარად, ჩანაწერი $b\in A$ შემდეგნაირად იკითხება - 'b არის A სიმრავლის წევრი'. ზოგჯერ იგივეს შემდეგნაირადაც კითხულობენ - 'b A სიმრავლის წევრია'. მოსახერხებელია აგრეთვე 'წევრია' მიმართების უარყოფის აღნიშვნა. მას $\notin$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ამგვარად, ჩანაწერი $b\notin A$ შემდეგნაირად იკითხება - 'b არ არის A სიმრავლის წევრი'. ცნობილია, რომ სიმრავლე შეიძლება იყოს სხვა სიმრავლის წევრიც. ამგვარად, იმას, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის წევრი, შემდეგნაირად ჩავწერთ - $A\in B$ და ზემოთ გაკეთებულ შეთანხმებას, რომ სიმრავლის წევრები პატარა ასოებით აღინიშნება, არ გავითვალისწინებთ.

1. 2 სიმრავლის მოცემის წესები

არსებობს სიმრავლის მოცემის (განსაზღვრის, აღწერის) სამი განსხვავებული გზა. ესენია: (1) სიმრავლის წევრების სრული სიის მოცემა ანუ სიმრავლის წევრების სრული ჩამოთვლა-ჩამოწერა; (2) ისეთი თვისების განსაზღვრა, რომლის მიხედვითაც ნებისმიერი ობიექტისათვის შესაძლებელი იქნება გავარკვიოთ არის თუ არა იგი მოცემული სიმრავლის წევრი; (3) წესების ისეთი ერთობლიობის განსაზღვრა, რომლითაც წარმოიქმნება მხოლოდ განსასაზღვრავი სიმრავლის წევრები.

განვიხილოთ თითოეული ცალ-ცალკე:

(1) **სიმრავლის მოცემა წევრების ჩამოთვლის გზით**: იმ შემთხვევაში, როცა სიმრავლის წევრების რაოდენობა სასრულია, შესაძლებელია გარკვეული სიის სახით ამ სიმრავლის ყველა წევრის ჩამოწერა ანუ ჩამოთვლა. სიმრავლის ამგვარი განსაზღვრისას ფიგურალურ ანუ სიმრავლურ ფრჩხილებში ერთმწკრივად ჩამოიწერება ამ სიმრავლის შემადგენლების სახელები,

რომლებსაც ერთმანეთისგან მძიმეებით ან წერტილმძიმეებით გამოყოფენ ხოლმე. მაგალითად, სიმრავლე, რომლის წევრებია მსოფლიოს უგრძესი მდინარე, ამერიკის შეერთებული შტატების პირველი პრეზიდენტი და რიცხვი სამი, შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

(1-1) {მდინარე ამაზონი, ჯორჯ ვაშინგტონი, 3}

შენიშვნის სახით დავძენთ: პირველი ის, რომ სიმრავლის სიითი სახით მოცემისას სიმრავლის თითოეული წევრისთვის გამოიყენება ან უშუალოდ მისი სახელი, ან მისი გარკვეული აღწერილობითი, არაუშუალო დასახელება. მაგრამ, სიმრავლე შედგება თავად **დასახელებული საგნებისაგან** და არა მათი ამ ან უშუალო, ან აღწერილობითი სახელებისაგან. ჩვენს მაგალითში სიმრავლის წევრია შეერთებული შტატების პრეზიდენტი, რომლის სახელია 'ჯორჯ ვაშინგტონი', რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩვენი სიმრავლის წევრია თავად ეს პიროვნება და არა მისი ეს სახელი. ზუსტად იგივე სიმრავლე აღნიშნული პიროვნების სხვა აღწერის გამოყენებით შეიძლებოდა ჩაწერილიყო შემდეგნაირად:

(1-2) {მდინარე ამაზონი, ამერიკის შეერთებული შტატების პირველი პრეზიდენტი, 3}.

რა თქმა უნდა, სიმრავლე შეიძლება შეიცავდეს ენობრივ ობიექტებსაც, მაგალითად სახელებს. გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად საკუთრივ ის სახელები, რომლებიც სიმრავლის წევრებია, ჩაიწერება ცალმაგ ბრჭყალებში. ამდენად, სიმრავლე

(1-3) {მდინარე ამაზონი, 'ჯორჯ ვაშინგტონი', 3}

უნდა განვასხვავოთ (1-1) სიმრავლისაგან, რამდენადაც იგი შეიცავს მდინარეს, სახელსა და რიცხვს, მაგრამ არ შეიცავს პიროვნებას, რომელიც იყო ამერიკის შეერთებული შტატების პირველი პრეზიდენტი. მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ ერთი და იგივე სიმრავლე შეიძლება აღიწეროს სხვადასხვა ჩანაწერებით მოცემული სიების მეშვეობით, სადაც განსხვავებულად გამოხატულ ჩანაწერებს არაფერი აქვთ საერთო გარდა იმისა, რომ ერთსა და იმავე ობიექტებს აღნიშნავენ. და მეორეც, რამდენადაც ეს სიმრავლეებს ანუ ერთობლიობებს ეხება, უნდა აღინიშნოს, რომ მხოლოდ ჩვენი წერის მარცხნიდან მარჯვნივ მიმართულებასთანაა დაკავშირებული ის, რომ სიმრავლის წევრები გარკვეული თანამიმდევრობით ჩაიწერება. თუმცაღა, იმის სრულიად საპირისპიროდ, რასაც ამგვარი ჩაწერა გვავარაუდებინებს, (1-1) სიმრავლეში არ არის არც რიგით პირველი, არც რიგით მეორე და არც რიგით მესამე წევრი. ნაკლებ გაუგებრობებთან არის დაკავშირებული აღნიშვნა, რომელიც ზოგჯერ გამოიყენება და რომელიც წარმოდგენილია ქვემოთ (1-4) ჩანაწერის სახით.

(1-4)

ჯორჯ ვაშინგტონი

3

მდინარე ამაზონი

თუმცა, მხოლოდ იმის გამო, რომ სიის გაფანტულ ჩაწერაზე ბევრად უფრო მოსახერხებელი მისი ერთ ხაზში ჩაწერაა, უპირატესობას, როგორც წესი, ამ უკანასკნელს ანიჭებენ.

სიმრავლის მოცემის ამ წესთან დაკავშირებით უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ სიმრავლის სიითი აღწერისას, სიაში მისი რომელიმე წევრის სახელის რამდენჯერმე აღნიშვნა არ ცვლის ამ სიმრავლეში ამ წევრის წევრობის სტატუსს. მაგალითად, განსხვავებული ჩანაწერები

(1-5) {a, b, c, d, e, e, e, e} და (1-6) {a, b, c, d, e}

აღნიშნავენ ერთმანეთისგან არაფრით განსხვავებულ, ერთი და იგივე სიმრავლეებს.

შემდეგი დებულება სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთი ძირეული შეთანხმებიდან გამომდინარე თვალსაზრისია: ნებისმიერად აღებული ობიექტისათვის და ნებისმიერი სიმრავლისათვის ეს ობიექტი ან არის ამ სიმრავლის წევრი, ან არ არის. კლასიკურ სიმრავლეთა თეორიაში დაუშვებელია ნახევრადწევრობა ან მრავალჯერადი წევრობა. ასევე დაუშვებელია სიმრავლის წევრობის სხვა რაღაც ხარისხობრივი დახასიათებაც. თუმცა, იყო მცდელობა „არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის" ჩამოყალიბებისა (იხ. ზადე (1987)).

დიდი ანუ მრავალ წევრიანი სასრული სიმრავლეების სიის სახით მოცემა ხშირ შემთხვევებში რთული და არაპრაქტიკულია. ასეთ პირობებში, თუ ჩანს სრული სიის განმსაზღვრელი რაიმე კანონზომიერება, შესაძლებელია სიის შემოკლება. მაგალითად, ნულიდან ასის ჩათვლით ხუთის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე შემოკლებული სიის სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

(1-7) {0, 5, 10, 15, ... , 95, 100}

(2) სიმრავლის მოცემა წევრების პრედიკატული დახასიათების გზით: სიმრავლეების სიითი ჩაწერა, მკაცრად რომ ვთქვათ, შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ სასრული სიმრავლეებისათვის. თუმცაღა, ზოგჯერ, შემოკლებული სახით, იგი გამოიყენება სხვადასხვა საყოველთაოდ ცნობილი უსასრულო სიმრავლეების ჩასაწერადაც. მაგალითად, მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე ზოგჯერ ამგვარად აღინიშნება: {1, 2, 3, 4, ... }. თუმცა, უსასრულო სიმრავლის აღსაწერად უმჯობესია მოვიძიოთ ისეთი პრედიკატულად გაფორმებული თვისება, რომლითაც ხასიათდებიან ამ უსასრულო სიმრავლის წევრები და მხოლოდ ისინი. სიმრავლის მოცემის ამ წესს, მოკლედ, სიმრავლის განსაზღვრის პრედიკატულ წესს უწოდებენ. ქვემოთ ნაჩვენებია სიმრავლის პრედიკატული განსაზღვრის კლასიკური სქემის ერთი კერძო მაგალითი:

(1-8) {x | x არის ლუწი რიცხვი, რომელიც მეტია 3-ზე}

ვერტიკალური ხაზი, რომელიც მოსდევს x ცვლადის პირველ გამოჩენას, იკითხება როგორც 'სიმრავლე ყველა ისეთი ... , რომელთათვისაც სამართლიანია, რომ ... '. ამგვარად, (1-8) ჩანაწერში განთავსებული მთლიანი გამოსახულება შემდეგნაირად უნდა წავიკითხოთ: 'სიმრავლე ყველა ისეთი **x**-ებისა, რომელთათვისაც სამართლიანია, რომ x არის ლუწი რიცხვი, რომელიც მეტია 3-ზე'. აქ x წარმოადგენს ცვლადს, რომელიც გვეხმარება სიმრავლის წევრობის თვისების პრედიკატული სახით ჩამოყალიბებაში. საზოგადოდ, ცვლადით წარმოდგენილია ხოლმე არა ერთი რომელიმე გარკვეული ობიექტი, არამედ ნებისმიერი, რომელსაც მოცემული პრედიკატული თვისება მიემართება. შევნიშნოთ, რომ პრედიკატული წესით შეიძლება აღიწეროს როგორც სასრული, ისე უსასრულო სიმრავლეები. მაგალითად, პრედიკატი ანუ მიმართება 'x არის ლუწი რიცხვი, რომელიც მეტია 3-ზე და, ამავდროულად, ნაკლებია 9-ზე' განსაზღვრავს სასრულ სიმრავლეს {4, 6, 8}. შევნიშნოთ ისიც, რომ ერთი და იგივე თვისების გამომხატველი ორი განსხვავებული პრედიკატული გამოსახულება ერთსა და იმავე სიმრავლეს განსაზღვრავს. მაგალითად,

(1-9) {x | x უნაშთოდ იყოფა 2-ზე და ან მეტია 4-ზე, ან ტოლია 4-ის}

იგივე სიმრავლეს განსაზღვრავს, რომელიც ზემოთ (1-8) პრედიკატული გამოსახულებითაც იყო მოცემული.

პრედიკატულად შეიძლება განისაზღვროს სიმრავლის ელემენტები ამ ელემენტების სხვა საგანთან (ან საგნებთან) პრედიკატულ კავშირშიც. მაგალითად, სიმრავლე

(1-10) $\{x \mid x$ არის წიგნი და იგი ეკუთვნის მერის$\}$

შედგება არა საზოგადოდ წიგნებისაგან, არამედ მხოლოდ იმ წიგნებისაგან, რომლებიც მერის ეკუთვნის.

რასელის პარადოქსი: სიმრავლეთა თეორიის ჩამოყალიბების ადრეულ პერიოდში ნებისმიერი გააზრებადი თვისება მიიჩნეოდა რაიმე სიმრავლის განმსაზღვრელ თვისებად. მაგრამ, ბერტრან რასელმა 1901 წელს დაასაბუთა, რომ სიმრავლის ცნების ამგვარ გაგებას, რომელიც ერთი შეხედვით სავსებით მისაღებია, პარადოქსამდე მივყავართ.

რასელმა შენიშნა, რომ თუ ჩავთვლით, რომ სიმრავლეები მოიცემა მათი წევრობის განმსაზღვრელი თვისებებით, მაშინ ზოგიერთი სიმრავლე შეიძლება საკუთარი თავის წევრი აღმოჩნდეს, ზოგიერთი კი არა. მაგალითად, ყველა სპილოების სიმრავლე არ არის სპილო და, ამდენად, ეს სიმრავლე არ არის საკუთარი თავის წევრი, მაგრამ ყველა აბსტრაქტული ცნებების სიმრავლე უნდა მოიცავდეს საკუთარ თავს, როგორც წევრს, რადგან თავად ეს სიმრავლეც აბსტრაქტული ცნებაა. მაშასადამე, 'სიმრავლე არის საკუთარი თავის წევრი' და 'სიმრავლე არ არის საკუთარი თავის წევრი', როგორც სიმრავლეთა ერთობლიობაზე სავსებით გააზრებადი თვისებები, უნდა წარმოადგენდნენ სიმრავლეთა განმსაზღვრელ თვისებებს. აქედან გამომდინარე, განსაზღვრულად უნდა ჩაითვალოს ის U სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს ყველა იმ სიმრავლეთა სიმრავლეს, რომლებიც არ არიან საკუთარი თავის წევრები ($U = \{x \mid x \notin x\}$). ახლა დავსვათ კითხვა U სიმრავლის შესახებ: არის ის საკუთარი თავის წევრი თუ არა? თეორიულად დასაშვებია შემდეგი ორი შემთხვევა: (i) თუ U არ არის საკუთარი თავის წევრი, მაშინ ის აკმაყოფილებს U სიმრავლის განმსაზღვრელ თვისებას და, ამდენად, იგი უნდა იყოს U სიმრავლის წევრი, ე.ი. საკუთარი თავის წევრი; (ii) თუ U სიმრავლე არის საკუთარი თავის წევრი, მაშინ იგი არ აკმაყოფილებს U სიმრავლის განმსაზღვრელ თვისებას და, ამდენად, U არ არის U სიმრავლის ანუ საკუთარი თავის წევრი. ამგვარად, ორივე შემთხვევაში, U გინდ იყოს, გინდ არ იყოს საკუთარი თავის წევრი, ვღებულობთ ლოგიკურ წინააღმდეგობას. აქედან ბუნებრივად კეთდება დასკვნა, რომ ასეთი სიმრავლე საერთოდ არ შეიძლება არსებობდეს. არადა, კანტორის სიმრავლეთა თეორიაში არაფერი არ გამორიცხავდა ამგვარი სიმრავლეების არსებობას. აქედან გამომდინარე, რასელის პარადოქსი, მიუხედავად იმისა, რომ მას შემდეგ მისი ბევრი განსხვავებული, თუმცა კი არსებითად ეკვივალენტური ვერსიები დაიძებნა, თავისთავად მეტად მნიშვნელოვანი შედეგი იყო. თუმცა, კიდევ უფრო მეტი მნიშვნელობა მიენიჭა მას იქიდან გამომდინარე, რომ თუ მანამდე ლოგიკოსები და მათემატიკოსები ცდილობდნენ ეჩვენებინათ, რომ სიმრავლეთა თეორია შეიძლებოდა მთელი მათემატიკის საფუძვლად ქცეულიყო, ახლა უკვე თავად სიმრავლეთა თეორიის საფუძვლებში ამგვარი პარადოქსის აღმოჩენამ ბევრი მათგანი დააეჭვა უკვე ფართოდ გამოყენებად და კარგად ცნობილ მათემატიკურ ცნებებში. თუმცაღა მათემატიკაში მუშაობა გრძელდებოდა ჩვეულებრივად, თითქოსდა აღნიშნული ფუნდამენტური კრიზისი არანაირ დაბრკოლებას არ წარმოადგენდა. პირიქით, გაჩნდა ბევრი ახალი იდეა, როგორც ამ პარადოქსის თავიდან ასაცილებლად, ისე მის ასახსნელად და იმისთვისაც, რომ აღნიშნული პარადოქსის შედეგები მათემატიკისათვის უმტკივნეულო გამხდარიყო. ერთი ამგვარი იდეა, რომელიც თავად რასელის მიერ იქნა შემოთავაზებული, იყო **ტიპთა თეორია.** ამ თეორიამ წარმატებული გამოყენება ჰპოვა როგორც ბუნებრივი ენების (მაგალითად, მონტეგიუს გრამატიკა (იხ. ნაწილი D)), ისე პროგრამული ენებისა და მათი სემანტიკების კვლევისას. თუმცა, საზოგადოდ, ამ საკითხების დეტალური განხილვა ჩვენი წიგნის ინტერესთა საზღვრებს სცილდება, ისევე როგორც ტიპთა თეორია და სიმრავლურ-თეორიული პარადოქსების სხვა გადაწყვეტები. მიუხედავად აღნიშნულისა, საკითხთან დაკავშირებით შეგიძლიათ იხილოთ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიზაცია ამ წიგნის 8.2.8 პარაგრაფში.

(3)სიმრავლის მოცემა წევრების წარმომქმნელი რეკურსული წესებით: სასრული სიმრავლეები მარტივად მოიცემა წევრების უბრალო ჩამოწერით და, ამდენად, მათ ზემოაღნიშნული სახის პარადოქსებამდე არასოდეს არ მივყავართ. ამგვარად, ისინი რასელის პარადოქსთან დაკავშირებით არანაირ ცვლილებებს არ ითხოვდნენ. უსასრულო სიმრავლეებისთვის კი იმ უმარტივეს გზად, რომელიც, ერთი მხრივ, აგვაცილებდა ამგვარ პარადოქსებს და, მეორე მხრივ, მოგვცემდა საშუალებას არაწინააღმდეგობრივად განგვესაზღვრა მათემატიკისთვის ღირებულ სიმრავლეთა დიდი უმეტესობა, იქცა ისეთი წესების ჩამოყალიბება, რომლებიც საწყისი სასრული მონაცემების საფუძველზე თანდათანობით მოგვცემდნენ განსასაზღვრი სიმრავლის წევრებს. მაგალითად, E={4, 6, 8,...} სიმრავლის წევრები შესაძლებელია წარმოიქმნას შემდეგი წესის მიხედვით:

(1-11) a) $4 \in E$
b) თუ $x \in E$, მაშინ $x + 2 \in E$
c) არაფერი სხვა არ ეკუთვნის E სიმრავლეს

მოცემული წესის პირველი პუნქტის მიხედვით 4 არის E სიმრავლის წევრი; ამ წესის მეორე პუნქტის რამდენჯერმე გამოყენებით ვადგენთ: რამდენადაც $4 \in E$, მაშასადამე $6 \in E$; რამდენადაც $6 \in E$, მაშასადამე $8 \in E$; და ა.შ.; წესის მესამე ნაწილი გვარწმუნებს, რომ ნებისმიერი სხვა რამ, რაც a) და b) პუნქტებით არ მოიცემა, როგორც E სიმრავლის წევრი, არ ეკუთვნის E სიმრავლეს.

სიმრავლის წევრთა წარმომშობ ანუ წარმომქმნელ წესებს შემდეგი ზოგადი სახე აქვთ: თავდაპირველად, წესის პირველ ნაწილში, პირდაპირი მინიშნების გზით წარმოდგენილია განსასაზღვრავი სიმრავლის წევრთა რაღაც სასრული ოდენობა (ხშირად მხოლოდ ერთი); შემდეგ, წესის მეორე ნაწილით, მოცემულია 'თუ, ... მაშინ' სახის გამონათქვამთა ასევე სასრული ოდენობა, რომელთაგან თითოეული არის გარკვეული პირობითი მიმართება განსასაზღვრავი სიმრავლის წევრებს შორის, რის საფუძველზეც, ამ სიმრავლის წევრები და მხოლოდ ისინი აიგებიან ამ 'თუ, ... მაშინ' სახის პირობითი გამონათქვამების ნებისმიერი ისეთი ჯაჭვური გამოყენებით, რომლის დასაწყისშია წესის პირველ ნაწილში პირდაპირი მინიშნების გზით უკვე მოცემული განსასაზღვრავი სიმრავლის ერთი ან რამდენიმე წევრი; ამასთანავე, წესის მესამე ნაწილი გვეუბნება, რომ ის, რაც არ მოიცემა წესის პირველი და მეორე ნაწილების მეშვეობით, არ შეიძლება იყოს განსასაზღვრავი სიმრავლის წევრი. აქ მოკლედ აღწერილი რეკურსული მექანიზმი უფრო დაწვრილებით განიხილება 8.1.1 პარაგრაფში.

წევრობის თვისების მიხედვით სიმრავლეების განსაზღვრის ადრეული პრედიკატული მეთოდი პრაქტიკაში კვლავ შემორჩა, რამდენადაც იგი საკმაოდ მოსახერხებელია და მათემატიკაში სიმრავლეთა თეორიის ამ მეთოდის ლოგიკურად შეზღუდულ გამოყენებებს, ჩვეულებრივ, არც პარადოქსული შემთხვევები არ უკავშირდება. ამგვარად, თუ არ ჩავთვლით სპეციალურ შრომებს თვით სიმრავლეთა თეორიაში, მათემატიკაში უსასრულო სიმრავლეთა მოცემის ზემოთ აღწერილი ორივე მეთოდი განურჩევლად და ფართოდ გამოიყენება.

1. 3 იგივურობისა და ოდენობითობის მიმართებები სიმრავლეთა თეორიაში

ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ განსხვავებული სიითი და განსხვავებული პრედიკატული ჩანაწერებით შეიძლება განისაზღვროს ერთი და იგივე სიმრავლე. ამით, არაპირდაპირი ნაგულისხმევობით ჩვენ უკვე დავუშვით სიმრავლეთა იგივურობის ცნება, რაც სიმრავლეთა თეორიისათვის მეტად მნიშვნელოვან დაშვებას წარმოადგენს: ორი სიმრავლე **იგივურია** მაშინ,

და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ზუსტად ერთი და იგივე წევრებისგან არიან შედგენილნი. მაგალითად:

(1-12) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

და

(1-13) {x │ x არის 7-ზე ნაკლები დადებითი მთელი რიცხვი}

და

(1-14) ა) $1 \in A$

ბ) თუ $x \in A$ და თუ x ნაკლებია 6-ზე, მაშინ $x + 1 \in A$

გ) არაფერი სხვა არ ეკუთვნის A სიმრავლეს

არის სამი განსხვავებული განსაზღვრება, მაგრამ იმის გამო, რომ თითოეული მათგანი სიმრავლის წევრებად ირჩევს ზუსტად ერთსა და იმავე საგნებს, ვამბობთ, რომ ისინი **ერთი და იგივე სიმრავლეს** განსაზღვრავენ. სიმრავლურ-თეორიული იგივურობის აღსანიშნავად გამოიყენება ტოლობის ნიშანი '='. ამგვარად, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

(1-15) {1, 2, 3, 4, 5, 6} = {x │ x არის 7-ზე ნაკლები დადებითი მთელი რიცხვი}

ტოლობის ნიშანი გამოიყენება აგრეთვე სიმრავლეების დასახელებისას. მაგალითად, ჩანაწერი 'ვთქვათ, B={1, 2, 3, 4, 5, 6}' ნიშნავს იმას, რომ (1-12)-ით წარმოდგენილ სიმრავლეს B დავარქვით. როგორც წესი, ყოველი კონკრეტული კონტექსტის შემთხვევაში შესაძლებელი იქნება გამოვიცნოთ თუ რისთვის გამოიყენება ნიშანი '=' - სიმრავლისთვის სახელის დასარქმევად, თუ იმის აღსანიშნავად, რომ ორი ადრე განხილული სიმრავლე იგივურია.

სიმრავლეთა იგივურობის ცნებიდან გამომდინარეობს, რომ ცარიელი სიმრავლე ერთადერთია, რამდენადაც მისი იგივურია ნებისმიერი სიმრავლე, რომელსაც შემადგენლები არ გააჩნია. ამიტომაც, ოთხკუთხა წრეების სიმრავლე და იმ საგნების სიმრავლე, რომლებიც არ არიან საკუთარი თავის იგივურნი, **ერთი და იგივე სიმრავლეებია**. შევნიშნოთ, რომ ცარიელი სიმრავლისათვის არასოდეს არ გამოიყენება სიმრავლეთა სიითი ჩამოწერისთვის ჩვეული აღნიშვნა და რომ, როგორც წესი, ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება სპეციალური სიმბოლოთი - Ø.

სიმრავლის წევრთა რიცხვი გაგებულია, როგორც სიმრავლის მთავარი ანუ რაოდენობრივი მახასიათებელი და მას სიმრავლის **სიმძლავრეს** ანუ **ოდენობას** უწოდებენ. იგი ჩაიწერება შემდეგნაირად - $|A|$ ან #(A). ნებისმიერი სასრული სიმრავლის ოდენობა გამოიხატება ნატურალური რიცხვით. მაგალითად, (1-12) ჩანაწერით განსაზღვრული სიმრავლის ოდენობა არის 6 და, რამდენადაც, (1-13) და (1-14) ჩანაწერები განსაზღვრავს იმავე სიმრავლეს, ცხადია, რომ მათი ოდენობაც არის 6 და რომ ისინი განსაზღვრავენ ერთი და იმავე ოდენობის მქონე სიმრავლეებს. გასაგებია, რომ განსხვავებულ სიმრავლეებსაც შეიძლება ჰქონდეთ ერთი და იგივე ოდენობა. უსასრულო სიმრავლეებიც ხასიათდებიან ოდენობით, თუმცა მათი ოდენობა ნატურალური რიცხვით არ გამოისახება. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ოდენობა გაიგება როგორც 'ალეფ-ნული', რაც შემდეგნაირად ჩაიწერება - $\aleph_0$. იგი არ წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვს. აქ აღნიშნული და

უსასრულო სიმრავლეებთან დაკავშირებული საკითხები უფრო დეტალურად განიხილება მეოთხე თავში.

1. 4 ქვესიმრავლეები

განსაზღვრით, როცა A სიმრავლის თითოეული წევრი ამავე დროს B სიმრავლის წევრია, **A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლედ** იწოდება. სიმრავლეთა შორის ქვესიმრავლეობის ზემოთ განსაზღვრული მიმართება შემდეგნაირად აღინიშნება - $A \subseteq B$. გასაგებია, რომ B **სიმრავლე** შეიძლება შეიცავდეს სხვა წევრებსაც იმათ გარდა, რომლებიც შედიან A სიმრავლეში. თუმცა, ქვესიმრავლეობის მიმართებისას ეს არ არის აუცილებელი მოთხოვნა. ამგვარად, გამოდის, რომ ყოველი სიმრავლე ამავდროულად არის საკუთარი თავის ქვესიმრავლე. იმ ქვესიმრავლეობის მიმართებას, რომელიც არ განიხილავს სიმრავლეს საკუთარი თავის ქვესიმრავლედ **საკუთრივი ქვესიმრავლეობის** მიმართება ეწოდება, და იგი შემდეგნაირად აღინიშნება - $A \subset B$. ქვესიმრავლეობის მიმართების უარყოფის ანუ არაქვესიმრავლეობის მიმართების აღსანიშნავად უბრალოდ გადავხაზავთ ქვესიმრავლეობის სიმბოლოს. მაგალითად, $A \not\subseteq B$ ნიშნავს, რომ A არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე, რაც, თავის მხრივ, იმას ნიშნავს, რომ A სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც ისეთი წევრი, რომელიც არ არის ამავდროულად B სიმრავლის წევრი.

აქ წარმოდგენილი განსაზღვრებები ილუსტრირებულია შემდეგი მაგალითებით:

(1-16) ა) $\{a, b, c\} \subseteq \{s, b, a, e, g, i, c\}$

ბ) $\{a, b, j\} \not\subseteq \{s, b, a, e, g, i, c\}$

გ) $\{a, b, c\} \subset \{s, b, a, e, g, i, c\}$

დ) $\varnothing \subset \{a\}$

ე) $\{a, \{a\}\} \subseteq \{a,b, \{a\}\}$

ვ) $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a\}$

ზ) $\{a\} \not\subseteq \{\{a\}\}$, მაგრამ $\{a\} \in \{\{a\}\}$

ქვესიმრავლის ცნების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა. ამგვარად, ნებისმიერი A სიმრავლისთვის ადგილი აქვს მიმართებას - $\varnothing \subseteq A$. მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\varnothing$ სიმრავლეს წევრები საერთოდ არ გააჩნია, გამონათქვამი იმის თაობაზედ, რომ $\varnothing$ სიმრავლის თითოეული წევრი ამავდროულად A სიმრავლის წევრიცაა, მიუხედავად იმისა, რომ იგი ფაქტობრივ აზრს მოკლებულია, არ მტყუნდება, რაც მის ჭეშმარიტებას ადასტურებს. იგივე შეიძლება დავასაბუთოთ სხვაგვარადაც: – რა შემთხვევაში შეიძლება ითქვას, რომ $\varnothing$ სიმრავლე არ არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე? - ქვესიმრავლის განსაზღვრების თანახმად, $\varnothing$ სიმრავლეში უნდა არსებობდეს ერთი მაინც ისეთი წევრი, რომელიც ამავდროულად არ არის A სიმრავლის წევრი. ეს კი შეუძლებელია, რამდენადაც $\varnothing$ სიმრავლეს საერთოდ არ გააჩნია წევრი და, ამგვარად, არც კი გვეძლევა იმ დასკვნის გასაკეთებელი საფუძველი, რომ რომელიმე მათთაგანი ამავდროულად არ არის A სიმრავლის წევრი, რაც კიდევ ერთხელ ადასტურებს იმას, რომ $\varnothing \subseteq A$. გამომდინარე იქიდან, რომ ჩვენი მსჯელობა არ იყო დამოკიდებული იმაზე, თუ A რომელ კონკრეტულ სიმრავლეს წარმოადგენდა, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\varnothing \subseteq A$ ჭეშმარიტია ნებისმიერად აღებული A სიმრავლისათვის.

შევნიშნოთ, რომ, საზოგადოდ, $\{\varnothing\} \not\subseteq \{a\}$, მიუხედავად იმისა, რომ $\varnothing \subseteq \{a\}$. ეს აიხსნება იმით, რომ $\{\varnothing\}$ სიმრავლე არის არა ცარიელი სიმრავლე, არამედ ერთწევრიანი სიმრავლე, რომლის ეს ერთადერთი წევრი თავად ეს $\varnothing$ სიმრავლეა. ამდენად, საზოგადოდ, არ არის

მართალი, რომ $\{\emptyset\}$ სიმრავლის თითოეული წევრი არის, აგრეთვე, $\{a\}$ სიმრავლის წევრი. ამგვარად, დასაბუთდა, რომ $\{\emptyset\}\not\subseteq\{a\}$.

ზემოგანხილული **სიმრავლის წევრობისა** და **სიმრავლის ქვესიმრავლეობის** მიმართებები წარმოადგენენ ნაწილსა და მთელს შორის მიმართებების მაგალითებს. მაგრამ, ამავდროულად, ეს მიმართებები სრულიად განსხვავებული მიმართებებია და ისინი ერთმანეთში არ უნდა ავურიოთ. ქვესიმრავლე, როგორც ამას სახელწოდებაც გვიჩვენებს, ყოველთვის არის სიმრავლე, მაშინ როცა წევრი შეიძლება იყოს და შეიძლება არც იყოს სიმრავლე. {დედამიწა, ვენერა, მარსი} სიმრავლის წევრია **მარსი**, მაგრამ იგი არაა ამ სიმრავლის ქვესიმრავლე. ერთწევრიანი სიმრავლე {მარსი}, რომლის ეს ერთადერთი წევრი არის **მარსი**, {დედამიწა, ვენერა, მარსი} სიმრავლის ქვესიმრავლეა, რადგანაც ამ ერთწევრიანი სიმრავლის თითოეული წევრი ანუ, ფაქტიურად, მისი ეს ერთადერთი წევრი, ამავდროულად, აქ განხილული მეორე სიმრავლის წევრიცაა. ამასთანავე, მიუხედავად იმისა, რომ ყოველი სიმრავლე საკუთარ თავთან ქვესიმრავლეობის მიმართებაშია, სრულებით არა ნათელი, საერთოდ, შეიძლება კი, რომ თუნდაც რომელიმე სიმრავლე იყოს საკუთარ თავთან წევრობის მიმართებაში. - როგორც ზემოთ ვნახეთ, ამგვარი შესაძლებლობის დაშვება ბუნებრივად ბადებს რასელის პარადოქსულ სქემას. ყურადღება მიაქციეთ, რომ სიმრავლის ცნებაში გასარკვევად არსებითია ერთმანეთისაგან განვასხვავოთ პლანეტა **მარსი** და ერთწევრიანი სიმრავლე {მარსი}.

სიმრავლეები, რომლის წევრები სიმრავლეებია, მასალის პირველად გაცნობისას, ხშირად, გაუგებრობებს წარმოშობენ. მაგალითად, განვიხილოთ სიმრავლე $A=\{b, \{c\}\}$. A სიმრავლის წევრებია b და $\{c\}$. წინა განხილული მსჯელობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $b\not\subseteq A$ და, რომ $\{b\}\subseteq A$. იგივენაირადვე ვასკვნით, რომ $\{c\}\not\subseteq A$, რადგან c არ არის A სიმრავლის წევრი, მაშინ როდესაც $\{\{c\}\}\subseteq A$, რადგან $\{\{c\}\}$ სიმრავლის ყოველი წევრი, სახელდობრ $\{c\}$, არის A სიმრავლის წევრიც. მკითხველმა ზემოთ განხილულ მაგალითთან დაკავშირებით თვითონვე უნდა დაადასტუროს შემდეგი გამონათქვამების სამართლიანობა: $\{b\}\notin A$; $c\notin A$; $\{\{c\}\}\notin A$; $\{b,\{c\}\}\subseteq A$; $\{b, \{c\}\}\notin A$; $\{\{b, \{\{c\}\}\}\not\subset A$.

წევრობისა და ქვესიმრავლეობის მიმართებებს შორის შემდეგი არსებითი განსხვავება უკავშირდება ჩვენს წინა შენიშვნას სიმრავლეთა სიმრავლის შესახებ. როგორც ვნახეთ, თუ $b\in X$ და $X\in C$, მაშინ არაა აუცილებელი, რომ $b\in C$. თუმცა, ელემენტი b შეიძლება იყოს C სიმრავლის წევრი და თუკი ასეა, ეს იქნება შემთხვევითი თვისება C სიმრავლისა, მაგრამ არა ლოგიკურად აუცილებელი და გამომდინარე $b\in X$ და $X\in C$ პირობებიდან. მაშინ როდესაც, თუ $A\subseteq B$ და $B\subseteq C$, უცილობლად ჭეშმარიტია ისიც, რომ $A\subseteq C$; ე.ი. თუ A სიმრავლის ყოველი წევრი ამავდროულად არის B სიმრავლის წევრი და, ასევე, თუ B სიმრავლის ყოველი წევრი ამავდროულად არის C სიმრავლის წევრი, მაშინ, ცხადია, ჭეშმარიტია ისიც, რომ A სიმრავლის ყოველი წევრი ამავდროულად არის C სიმრავლის წევრი. მაგალითად, იქიდან, რომ $\{a\}\subseteq\{a,b\}$ და $\{a, b\}\subseteq\{a,b,c\}$ ლოგიკურად გამომდინარეობს $\{a\}\subseteq\{a,b,c\}$ გამონათქვამის ჭეშმარიტება. მაშინ როდესაც, $a\in\{a\}$ და $\{a\}\in\{\{a\},b\}$, მაგრამ $a\notin\{\{a\},b\}$ (აქ, რა თქმა უნდა, ივარაუდება, რომ a და b განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან).

1. 5 სიმრავლის ხარისხი

ზოგჯერ საჭირო ხდება განვიხილოთ სიმრავლე, რომლის წევრებია მოცემული A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე. ამ სიმრავლეს A სიმრავლის ხარისხ სიმრავლეს, ზოგჯერ კი მოკლედ, A სიმრავლის ხარისხს უწოდებენ და იგი შემდეგნაირად აღინიშნება - $\wp(A)$. ვთქვათ, $A=\{a,b\}$; მაშინ A სიმრავლის ხარისხი $\wp(A)$ იქნება $\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\emptyset\}$. სახელწოდება „სიმრავლის ხარისხი“ დაკავშირებულია შემდეგ ცნობილ ფაქტთან: თუ A სიმრავლის ოდენობითობა გამოიხატება n ნატურალური რიცხვით, მაშინ $\wp(A)$ სიმრავლის ოდენობითობა

არის 2^n, ანუ 2 აყვანილი n ხარისხში, ანუ 2×2× **...** ×2 (n-ჯერ). ზოგჯერ A სიმრავლის ხარისხი აღინიშნება როგორც 2^A.

1. 6 გაერთიანება და თანაკვეთა

ახლა გავეცნობით ორ სიმრავლურ ოპერაციას, რომლებიც, მოქმედებენ რა ორ სიმრავლეზე, შედეგად იძლევიან ერთ ახალ სიმრავლეს.

ორი A და B სიმრავლის **გაერთიანება** ჩაიწერება როგორც $A \cup B$ და არის სიმრავლე, რომლის წევრებია ის, და მხოლოდ ის შემადგენლები, რომლებიც მიეკუთვნებიან ან მხოლოდ A სიმრავლეს, ან მხოლოდ B სიმრავლეს, ან ერთდროულად ორივეს. პრედიკატულ აღნიშვნებში ამ განსაზღვრებას შემდეგი სახე აქვს:

(1-17) $A \cup B =_{def} \{x \mid x \in A$ ან $x \in B\}$

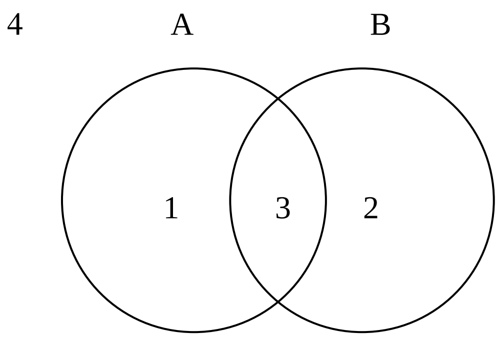
შევნიშნოთ, რომ 'ან' კავშირი (1-17) ფორმულაში გაგებულია არა როგორც მაცალკავებელი (ე.ი. **ექსკლუზიური**), არამედ როგორც მაერთებელი (ე.ი. **ინკლუზიური**) 'ან' კავშირი, რაც განაპირობებს იმას, რომ განსასაზღვრი სიმრავლის შემადგენელი შეიძლება ერთდროულად იყოს A და B სიმრავლეებიდან ორივეს წევრი. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

(1-18) ვთქვათ, K = {a,b}, L = {c,d} და M = {b,d}, მაშინ:

$K \cup L = \{a,b,c,d\}$
$K \cup M = \{a,b,d\}$
$L \cup M = \{b,c,d\}$
$(K \cup L) \cup M = K \cup (L \cup M) = \{a,b,c,d\}$
$K \cup \varnothing = \{a,b\} = K$
$L \cup \varnothing = \{c,d\} = L$

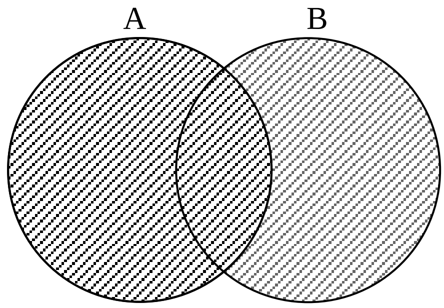
სიმრავლური გაერთიანების ოპერაცია მარტივად შეიძლება განვაზოგადოთ და გამოვიყენოთ ერთდროულად ორზე მეტი სიმრავლის მიმართ. ამ შემთხვევაში გაერთიანების ნიშანი იწერება იმ სიმრავლეთა სიმრავლის წინ, რომლებსაც ვაერთიანებთ. მაგალითად: $\cup\{K,L,M\}$ ტოლია ყველა იმ წევრების სიმრავლისა, რომლებიც მიეკუთვნებიან ერთ-ერთს მაინც K, L, და M სიმრავლეებიდან. ამგვარად, $\cup\{K,L,M\}=\{a,b,c,d\}$.

სიმრავლეთა თეორიაში დიდი ხანია არსებობს სიმრავლური ოპერაციების სქემატურად წარმომდგენი მეთოდი, რომელსაც **ვენის დიაგრამულ მეთოდს** უწოდებენ. ამ მეთოდის მიხედვით სიმრავლეები გამოისახებიან როგორც წრეები და ამ სიმრავლეების წევრებად ამ წრეების წერტილები განიხილება. ამასთან, როგორც ეს 1-1 ნახაზზეა გამოსახული, ნაწილობრივ თანამკვეთი წრეების სახით წარმოდგენილია სავსებით ნებისმიერად შერჩეული ორი ნაწილობრივ თანამკვეთი სიმრავლე. 1-1 ნახაზზე არე 1 აერთიანებს იმ ელემენტებს, რომლებიც მიეკუთვნებიან A სიმრავლეს, მაგრამ არ მიეკუთვნებიან B სიმრავლეს; არე 2 აერთიანებს იმ ელემენტებს, რომლებიც მიეკუთვნებიან B სიმრავლეს, მაგრამ არ მიეკუთვნებიან A სიმრავლეს; არე 3 აერთიანებს იმ ელემენტებს, რომლებიც ერთდროულად მიეკუთვნებიან როგორც A, ისე B სიმრავლეს; ნახაზზე არე 4 აერთიანებს იმ წერტილებს, რომლებიც ამ ორი A და B სიმრავლეებიდან არც ერთს არ მიეკუთვნება. გასაგებია, რომ, ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში, ამ არეებიდან ერთი, ან რამდენიმე შეიძლება ცარიელიც აღმოჩნდეს.



ნახ. 1-1: ვენის დიაგრამა ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლისათვის.

A და B სიმრავლეთა გაერთიანება ვენის დიაგრამაზე გამოისახება ამ სიმრავლეების შემადგენელი ნაწილების იმგვარი დაშტრიხვით, როგორც ეს ნაჩვენებია 1-2 ნახაზზე.



ნახ. 1-2: სიმრავლეთა გაერთიანება $A \cup B$

მეორე სიმრავლური ოპერაციით, რომელსაც ახლა გავეცნობით, ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლისაგან მიიღება ერთი ახალი სიმრავლე, რომლის წევრებიც ამ A და B სიმრავლეების ის, და მხოლოდ ის შემადგენლებია, რომლებიც ერთდროულად **ორივე სიმრავლეს** მიეკუთვნებიან. ამ ოპერაციას ეწოდება A და B სიმრავლეთა **თანაკვეთა** და ჩაიწერება როგორც - $A \cap B$. პრედიკატულ აღნიშვნებში ეს სიმრავლური ოპერაცია შემდეგნაირად განისაზღვრება:

(1-19) $A \cap B =_{def} \{x \mid x \in A$ და $x \in B\}$

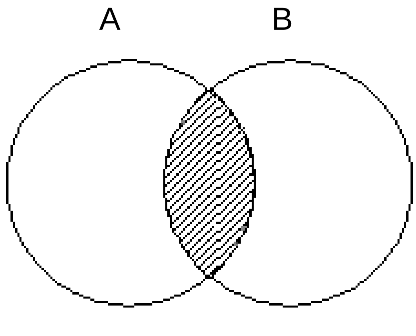
მაგალითად, (1-18) მოცემულობიდან K და M სიმრავლეების თანაკვეთა არის ერთწევრიანი სიმრავლე {b}, რამდენადაც b არის ერთადერთი ელემენტი, რომელიც მიეკუთვნება K და M სიმრავლეებიდან ორივეს. განვიხილოთ კიდევ რამდენიმე მაგალითი:

(1-20) $K \cap L = \varnothing$ $\quad K \cap \varnothing = \varnothing$

$L \cap M = \{d\}$ $\quad (K \cap L) \cap M = K \cap (L \cap M) = \varnothing$

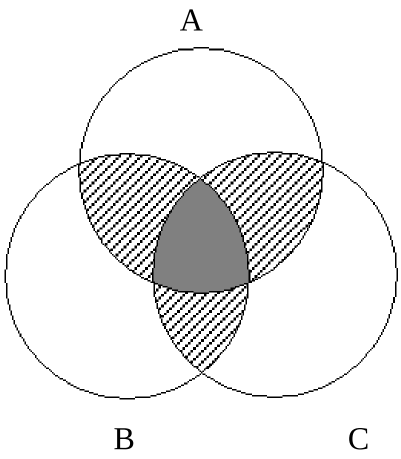
$K \cap K = \{a,b\} = K$ $\quad K \cap (L \cup M) = \{b\}$

ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთის ზოგადი შემთხვევა ვენის დიაგრამის სახით წარმოდგენილია 1-3 ნახაზზე.



ნახ. 1-3: სიმრავლეთა თანაკვეთა $A \cap B$

შესაძლებელია სიმრავლური თანაკვეთის ოპერაციის ისეთივე განზოგადება, როგორც ეს ჩვენ გავაკეთეთ გაერთიანების შემთხვევაში, და მისი გამოყენება ერთდროულად სამი ან სამზე მეტი სიმრავლის მიმართ: მაგალითად, $\cap\{K,L,M\}=\varnothing$. ნებისმიერად აღებული სამი A, B და C სიმრავლეების თანაკვეთა ვენის დიაგრამის სახით გამოსახულია 1-4 ნახაზზე. აქ შავი ფერით მონიშნულია ის ნაწილი, რომელიც საერთოა $A\cap B$, $A\cap C$ და $B\cap C$ სიმრავლეებისათვის. როცა ვენის დიაგრამა სამზე მეტ სიმრავლეს მოიცავს, ცხადია, რომ მისი დიაგრამული გამოსახვა რთულია და ეს, ალბათ, ნაკლებ სასარგებლოცაა. თუმცა, მარტივ შემთხვევებში, ვენის დიაგრამა გაგებინების თვალსაზრისებით მეტად ღირებული წარმოსახვითი საშუალებაა.



ნახ. 1-4: ვენის დიაგრამა $\cap\{A,B,C\}$ სიმრავლისათვის. დაშტრიხულია $A\cap B$, $B\cap C$ და $A\cap C$ სიმრავლეები, შავი ფერითაა დაშტრიხული $\cap\{A,B,C\}$ სიმრავლე

ამოცანა: ააგეთ ვენის დიაგრამა ნებისმიერად აღებული სამი სიმრავლის გაერთიანებისათვის.

1. 7 სხვაობა და დამატება

ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლისათვის განისაზღვრება **სხვაობად** წოდებული ორადგილიანი სიმრავლური ოპერაცია. A და B სიმრავლეების **სხვაობა** შემდეგნაირად ჩაიწერება: $A–B$. ამ ოპერაციით A სიმრავლეს ‘აკლდება’ ყველა და, ამასთან, მხოლოდ ის

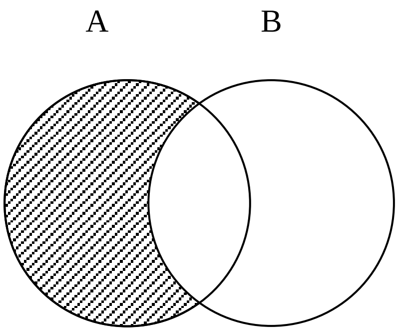
წევრები, რომლებიც B სიმრავლესაც მიეკუთვნებიან. პრედიკატული ჩანაწერებით ეს ოპერაცია შემდეგნაირად განისაზღვრება:

(1-21) $A–B =_{def} \{x \mid x \in A$ და $x \notin B\}$

A–B სიმრავლეს ზოგჯერ A სიმრავლის მიმართ B სიმრავლის დამატებასაც უწოდებენ. ცხადია, რომ (1-18) მოცემულობის L და M სიმრავლეებისათვის L–M = {c}, რადგან c არის L სიმრავლის ის ერთადერთი წევრი, რომელიც არ მიეკუთვნება M სიმრავლეს. თუ A და B სიმრავლეებს არცერთი საერთო წევრი არ გააჩნიათ, მაშინ B სიმრავლის გამოკლებით A სიმრავლეს არც არაფერი აკლდება. ასეთ შემთხვევაში A–B=A. შევნიშნოთ: მიუხედავად იმისა, რომ ნებისმიერი A და B სიმრავლეებისათვის $A \cup B = B \cup A$ და $A \cap B = B \cap A$, საზოგადოდ, A–B=B–A არასწორია. ის, რომ ამ ოპერაციის შედეგზე სიმრავლეთა რიგი გავლენას ახდენს სავსებით ბუნებრივი გამოჩნდება, თუ მას გარკვეულად გავაიგივებთ ჩვენთვის სკოლის კურსიდან ნაცნობ გამოკლებასთან. ვენის დიაგრამა სიმრავლეთა A–B სხვაობისათვის გამოსახულია 1-5 ნახაზზე.

რამდენიმე დამატებითი მაგალითი:

(1-22) K–M = {a}
L–K = {c,d} = L
M–L = {b}
$K–\varnothing = \{a,b\} = K$
$\varnothing–K = \varnothing$



ნახ. 1-5: სიმრავლეთა სხვაობა A–B

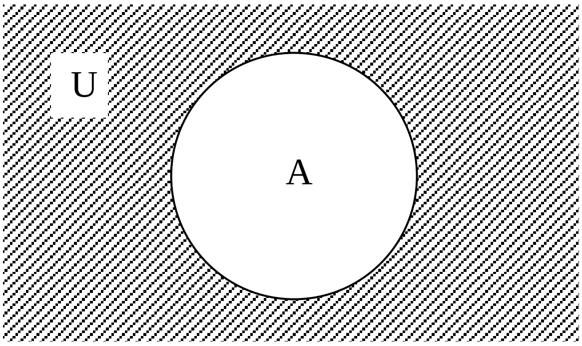
გამოკლების ოპერაცია უნდა განვასხვავოთ **დამატების** ოპერაციისაგან. A სიმრავლის დამატება ჩაიწერება როგორც A′ და იგი არის სიმრავლე, რომელიც აგებულია ყველა, და მხოლოდ იმ წევრებისაგან, რომლებიც არ ეკუთვნიან A სიმრავლეს. პრედიკატულ აღნიშვნებში A′ სიმრავლე შემდეგნაირად განისაზღვრება:

(1-23) $A' =_{def} \{x \mid x \notin A\}$

(1-23) განსაზღვრებასთან დაკავშირებით ბუნებრივად ჩნდება კითხვა: რანი არიან და საიდან მოდიან ის წევრები, რომლებიც არ მიეკუთვნებიან A სიმრავლეს? - პასუხი ამ კითხვაზე შემდეგია: ყოველი გამონათქვამი, რომელიც იძლევა სიმრავლეს, თავისთავად გულისხმობს მანამდე უკვე არსებულ საგანთა გარკვეულ საყრდენ ერთობლიობას, რომელიც ამ სიმრავლის მომცემი გამონათქვამის **დისკურსის უნივერსუმს** წარმოადგენს. მაგალითად, როცა

დისკურსი (ანუ სააზროვნო სივრცე) რიცხვთა თეორიაა მის უნივერსუმად (ანუ ამ სააზროვნო სივრცის საგანთა სამყაროდ) შეიძლება მოვიაზროთ ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე. სამწუხაროდ, შეუძლებელია ერთხელ და სამუდამოდ საყოველთაოდ გამოსადეგი დისკურსისა და უნივერსუმის ცალსახა და არაწინააღმდეგობრივი განსაზღვრა. თანაც ისე, რომ ამ უნივერსუმში შედიოდეს 'ყველაფერი' ის, მხოლოდ რომელთაგანაც იგება სიმრავლეები. ეს შეუძლებელია იმიტომ, რომ ამგვარი უნივერსალური არე, ცხადია, უნდა მოიცავდეს სიმრავლური თვალსაზრისებით ისეთ პარადოქსულ საგნებსაც, როგორიცაა 'ყველა სიმრავლეთა სიმრავლე'. ამდენად, კონკრეტული მსჯელობის დისკურსის უნივერსუმი დამოკიდებულია ამ კონკრეტულ მსჯელობაზე და, შესაბამისად, იგი ამ კონკრეტულ მსჯელობასთან ერთად იცვლება. ამასთან, იცვლება დაახლოებით ისევე, როგორც იცვლება 'ყველაფერი' და 'ყველანი' სახის სიტყვების მნიშვნელობები სხვადასხვა წინადადებებით მოცემულ სხვადასხვა მსჯელობებში. იმ შემთხვევაში, როდესაც დისკურსის უნივერსუმს რაიმე განსაკუთრებული სახელი არ ჰქვია, მის აღსანიშნავად იყენებენ ხოლმე U სიმბოლოს. როდესაც მოცემული მსჯელობის დისკურსის უნივერსუმი ისედაც ცხადია, ან არაძალისმიერია მოცემული მსჯელობისათვის, იგი შეიძლება პირდაპირი გზით არც იყოს განსაზღვრული. თუმცაღა, ისეთ შემთხვევებში, როდესაც დისკურსის უნივერსუმი არაორაზროვნად და გასაგებად არ არის განსაზღვრული, დამატების ოპერაციაც ცალსახად და გარკვეულად ვეღარ ისაზღვრება. მაშასადამე, A სიმრავლის დამატება არის დისკურსის უნივერსუმის იმ შემადგენლების სიმრავლე, რომლებიც არ მიეკუთვნება A სიმრავლეს. ამგვარად:

(1-24) $A' = U - A$



ნახ. 1-6: სიმრავლური დამატების ოპერაცია A′.

როგორც ვხედავთ, (1-23) პრედიკატულ განსაზღვრაში x ცვლადის განსაზღვრის არედ ანუ სიმრავლედ, საიდანაც ეს ცვლადი მნიშვნელობებს ღებულობს, ნაგულისხმევობით მოიაზრება მთლიანი სიმრავლური უნივერსუმი. სხვათა შორის, ზუსტად იგივეგვარი ვითარება გვაქვს (1-17) და (1-19) პრედიკატული განსაზღვრებების შემთხვევაშიც.

ზემოთ, 1-6 ნახაზზე, გამოსახულია ვენის დიაგრამა, სადაც დაშტრიხული ნაწილი შეესაბამება A სიმრავლის დამატებას.

1. 8 ზოგიერთი სიმრავლური იგივეობანი

ქვემოთ განხილული იქნება ის კანონები, რომლებიც ლოგიკურად გამომდინარეობენ სიმრავლეების შესახებ ზემოთ გაკეთებული განსაზღვრებებიდან. მათგან უფრო სასარგებლონი წარმოდგენილია 1-7 ცხრილით. ცხრილში გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების თვისებების აღმწერი მსგავსი კანონები დაწყვილებულია და, შესაბამისად, ისინი სახელდებულნი არიან მათთვის ტრადიციული და უკვე გავრცელებული სახელწოდებებით.

ჩვენ, ამჯერად, არ ვაპირებთ ამ კანონების გამომხატველ გამონათქვამებში შემავალი X, Y და Z სიმრავლური ცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემისათვის მათი ფორმალურად მკაცრი, მათემატიკური დამტკიცებების აგებას. ეს დამტკიცებები წარმოდგენილი იქნება 7.6 პარაგრაფში. ამჯერად, ჩვენ შევეცდებით დავრწმუნდეთ მათ ჭეშმარიტებაში მხოლოდ განსაზღვრებებიდან ამოსვლითა და ვენის დიაგრამების აგებით.

1. **იდემპოტენტურობის კანონები:** ადვილი მისახვედრია, რომ ნებისმიერი X სიმრავლისათვის X∪X იგივეა, რაც X, რამდენადაც ყველაფერი ის, რაც არის X **ან** X სიმრავლეში, ადვილად ჯამდება იმ ყველაფრად, რაც არის თავად ამ X სიმრავლეში. იგივე ითქმის იმ ელემენტების შესახებ, რომლებიც ერთდროულად არიან X სიმრავლესა **და** X სიმრავლეში, ამდენად: X∩X=X.

2. კომუტაციურობის კანონები: ცხადია, რომ ყველაფერი ის, რაც მიეკუთვნება ან X, ან Y, ან ორივე სიმრავლეს ერთდროულად, ამავდროულად არის ყველაფერი ის, რაც მიეკუთვნება ან Y, ან X, ან ორივე სიმრავლეს ერთდროულად; ამგვარად, X∪Y**=**Y∪X. დასაბუთება ამგვარადვე მიმდინარეობს თანაკვეთის შემთხვევაშიც.

1. **იდემპოტენტურობის კანონები**

(ა) $X \cup X = X$ (ბ) $X \cap X = X$

2. **კომუტაციურობის კანონები**

(ა) $X \cup Y = Y \cup X$ (ბ) $X \cap Y = Y \cap X$

3. **ასოციაციურობის კანონები**

(ა) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ (ბ) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

4. **დისტრიბუციულობის კანონები**

(ა) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
(ბ) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

5. **იდენტურობის კანონები**

(ა) $X \cup \varnothing = X$ (გ) $X \cap \varnothing = \varnothing$
(ბ) $X \cup U = U$ (დ) $X \cap U = X$

6. **დამატების კანონები**

(ა) $X \cup X' = U$ (გ) $X \cap X' = \varnothing$
(ბ) $(X')' = X$ (დ) $X - Y = X \cap Y'$

7. **დე მორგანის კანონები**

(ა) $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$ (ბ) $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$

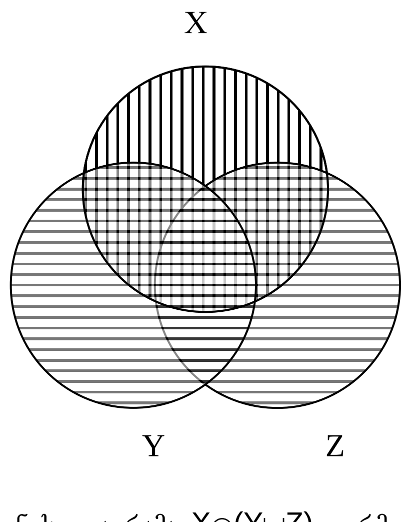
8. **თავსებადობის პრინციპი**

(ა) $X \subseteq Y$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \cup Y = Y$
(ბ) $X \subseteq Y$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \cap Y = X$

ცხრილი 1-7: ზოგიერთი ძირითადი
სიმრავლური იგივეობანი

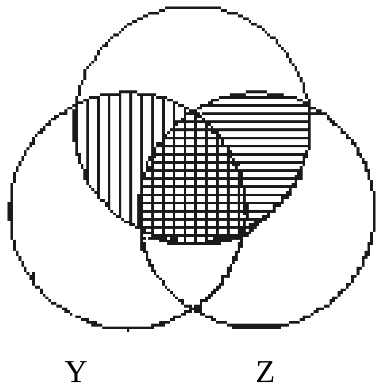
3. ასოციაციურობის კანონები: ასოციაციურობის კანონები გვეუბნება, რომ შედეგზე იმ რიგს, რომლითაც სიმრავლეებს ოპერაციულად ვაერთებთ, მნიშვნელობა არა აქვს არც მაშინ, როცა მათ გაერთიანების ოპერაციით ვაერთებთ და არც მაშინ, როცა ისინი თანაკვეთის ოპერაციით ერთდებიან. იმას, რომ ეს მართლაც ასეა, თვალნათლივ დავინახავთ, თუ წარმოვიდგენთ შესაბამისი ვენის დიაგრამების აგების პროცესს. გვაქვს სამი ურთიერთ გადამკვეთი წრე, რომლებიც აღნიშნულია X, Y და Z ასოებით. ჯერ დავშტრიხოთ $X \cup Y$, შემდეგ დავშტრიხოთ Z, რითაც საბოლოო ჯამში დაიშტრიხება ამ სამი წრის შიგნით განთავსებული მთლიანი არე, რაც $(X \cup Y) \cup Z$ სიმრავლეს შეესაბამება. ახლა დავიწყოთ თავიდან და ჯერ დავშტრიხოთ $Y \cup Z$, ხოლო შემდეგ X. ცხადია, დაშტრიხვის ქვეშ ისევ იგივე არე მოხვდება.

4. დისტრიბუციულობის კანონები: ამ კანონების საილუსტრაციო ვენის დიაგრამების აგება ცოტათი თავსატეხი ამოცანაა. 1-8 ნახაზზე გამოსახულია $X \cap (Y \cup Z)$ ფორმულის ვენის დიაგრამა. აღსაქმელად რომ უფრო ადვილი ყოფილიყო, X დავშტრიხეთ ვერტიკალური ხაზებით, $(Y \cup Z)$ კი ჰორიზონტალური ხაზებით. შესაბამისად, ამ ორი სიმრავლის თანაკვეთა გამოსახულია როგორც ორმაგად (ჯვარედინად) დაშტრიხული არე. 1-9 ნახაზზე გამოსახულია $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ ფორმულის დიაგრამა. $X \cap Y$ დაშტრიხულია ვერტიკალურად, ხოლო $X \cap Z$ კი ჰორიზონტალურად. გაერთიანებას წარმოადგენს არე, რომელიც დაშტრიხულია ან ერთმაგი ან ორმაგი დაშტრიხვით. ამგვარად, პირველი აგებისას ორმაგად დაშტრიხული არე დაემთხვა მეორე აგებისას ორმაგად ან ერთმაგად დაშტრიხულ არეს. მკითხველს ახლა უკვე თავად შეუძლია დისტრიბუციულობის კანონების (ა) შემთხვევის შესაბამისი ვენის დიაგრამების აგება.



ნახ. 1-8 ვენის დიაგრამა $X \cap (Y \cup Z)$ ფორმულისათვის
X დაშტრიხულია ვერტიკალურად, $Y \cup Z$ დაშტრიხულია ჰორიზონტალურად,
$X \cap (Y \cup Z)$ კი ორმაგად.

X



ნახ. 1-9: ვენის დიაგრამა $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ ფორმულისათვის
$X \cap Y$დაშტრიხულია ვერტიკალურად, $X \cap Z$ დაშტრიხულია ჰორიზონტალურად,
ხოლო $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ მთლიანად წარმოადგენს დაშტრიხულ არეს.

5. იდენტურობის კანონები: იდენტურობის კანონები მარტივად გაიგება გაერთიანების, თანაკვეთის, ცარიელი სიმრავლისა და უნივერსალური სიმრავლის განსაზღვრებებიდან გამომდინარე. ყველაფერი ის, რაც არის ან X სიმრავლეში ან $\varnothing$ სიმრავლეში ან ორივეში ერთად, ადვილად ჯამდება იმ ყველაფრად, რაც არის X სიმრავლეში. დანარჩენ შემთხვევებშიც დასაბუთება ანალოგიურია ზემომოყვანილისა.

6. დამატების კანონები: დამატების კანონებიც ასევე მარტივად გაიგება დამატების განსაზღვრებიდან გამომდინარე, თუმცა, ალბათ, აქ დახმარებას გაგვიწევს ვენის დიაგრამა, რომელიც წარმოდგენილია 1-6 ნახაზზე. (დ) შემთხვევა უფრო გასაგები გახდება, თუ შევხედავთ 1-5 ნახაზს და განვიხილავთ იმ არეს, რომელიც შეესაბამება A სიმრავლის თანაკვეთას B სიმრავლის დამატებასთან.

7. დე მორგანის კანონები: დე მორგანის კანონები სიმეტრიული წყვილების სახითაა წარმოდგენილი. (ა) შემთხვევა: ყველაფერი ის, რაც არ არის არცერთში, არც X და არც Y სიმრავლეში (ე.ი $(X \cup Y)'$), არის ყველაფერი ის, რაც არ არის X სიმრავლეში და, ამავდროულად, არ არის Y სიმრავლეში (ე.ი $X' \cap Y'$). (ბ) შემთხვევა: ყველაფერი ის, რაც არ არის ერთდროულად ორივეში (ე.ი. $(X \cap Y)'$), ამავდროულად, არ არის ერთშიც და არ არის მეორეშიც (ე.ი. $X' \cup Y'$). თუ ეს შემთხვევა უცებ შედარებით ნაკლებ ცხადად გეჩვენათ დაიხმარეთ ვენის დიაგრამა.

8. თავსებადობის პრინციპი: თავსებადობის პრინციპს ასეთი სახელი იმიტომ დაერქვა, რომ იგი ეხება გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციებისა და ქვესიმრავლეობის მიმართებით განპირობებული თავსებადობის ურთიერთობის საკითხებს. თუ წარმოვიდგენთ ვენის დიაგრამას, რომელშიც X სიმრავლის შესაბამისი წრე მთლიანად მოთავსებულია Y სიმრავლის შესაბამის წრეში, რაც პრედიკატულად $X \subseteq Y$ ჩანაწერით გამოისახება, მაშინ ადვილად დავინახავთ, რომ $X \cup Y = Y$. მეორე მხრივ, თუ ვიცით, რომ $X \cup Y = Y$, მაშინ სტანდარტული ვენის დიაგრამის ის არე, რომელიც შესდგება X სიმრავლის მხოლოდ იმ შემადგენლებისაგან, რომლებიც ამავდროულად არ არიან Y სიმრავლის შემადგენლები, ცარიელი სიმრავლე იქნება. ყველა სხვა შემთხვევაში, გაერთიანება არ იქნებოდა Y სიმრავლის ტოლი. ამგვარად, X სიმრავლის შემადგენლები მთლიანად მოთავსებულია Y სიმრავლის წრეში, რაც იმას ნიშნავს, რომ $X \subseteq Y$**.** მტკიცება (ბ) შემთხვევაშიც ანალოგიურად ვითარდება.

ზოგიერთი ამ კანონის უფრო კარგად გაგებაში შეიძლება დაგვეხმაროს ანალოგიები ალგებრიდან: ცნობილია, რომ შეკრებისა (+) და გამრავლების (×) ოპერაციები ექვემდებარებიან კომუტაციურობის ალგებრულ კანონებს:

(1-25) ნებისმიერი x და y რიცხვებისათვის:

$$x + y = y + x \quad \text{და} \quad x \times y = y \times x$$

ანალოგიურადვეა ასოციაციურობის კანონი:

(1-26) ნებისმიერი x, y და z რიცხვებისათვის:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{და} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

თუმცა, ამგვარ ალგებრულ ანალოგიებს ადგილი არა აქვს ზემოგანხილული მთელი რიგი სიმრავლური კანონებისათვის. ასე მაგალითად, საზოგადოდ, სწორი არ არის ის, რომ $x+x=x$ და არც ის, რომ $x\times x=x$. მიუხედავად ამისა, ალგებრაშიც, ანალოგიურად ზემოაღწერილისა $+$ და $\times$ ოპერაციები ერთმანეთს დისტრიბუციულობის კანონით უკავშირდებიან:

(1-27) ნებისმიერი x, y და z რიცხვებისათვის:

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$$

მაგრამ, შესაბამისი სიმრავლური ოპერაციებისაგან განსხვავებით, თუ $+$ და $\times$ ალგებრულ ოპერაციებს ურთიერთ ჩავანაცვლებთ დისტრიბუციის კანონი აღარ მოქმედებს. ამგვარად, საზოგადოდ, არაა სწორი, რომ $x+(y\times z)=(x+y)\times(x+z)$. მაგალითად, ვთქვათ, $x=1$, $y=2$ და $z=3$. ასეთ პირობებში ზედა გამოსახულების მარცხენა მხარის მნიშვნელობაა 7, ხოლო მარჯვენა მხარისა კი - 12.

იდენტურობის სიმრავლური კანონების ალგებრულ-არითმეტიკულ ანალოგებად მიიჩნევა $x+0=x$, $x\times 0=0$ და $x\times 1=x$ კანონები, სადაც 0 თამაშობს ცარიელი, ხოლო 1 კი უნივერსალური სიმრავლის როლს. თუმცა, აქ მხოლოდ ნაწილობრივ ანალოგიასთან გვაქვს საქმე, რადგან, საზოგადოდ, $x+1$ არ უდრის 1.

მაშასადამე, ვნახეთ, რომ არსებობს სიმრავლეთა ალგებრა და რომ იგი, გარკვეულწილ, ანალოგიურია იმ სასკოლო ალგებრისა, რომელიც გამრავლებასა და შეკრებას ეხება, თუმცაღა სიმრავლეთა ალგებრას თავისი განსაკუთრებული თვისებებიც აქვს. ამ ფაქტის წინაშე კიდევ ერთხელ დავდგებით, როდესაც მეექვსე თავში გამონათქვამთა ლოგიკას განვიხილავთ. გარდა ამისა, მეთორმეტე თავში ნახავთ, რომ საშუალო სკოლიდან თქვენთვის ნაცნობი ალგებრა და ახლახან გაცნობილი სიმრავლეთა ალგებრა კერძო მაგალითებია იმისა, რასაც საზოგადოდ ბულის ალგებრას უწოდებენ.

ამჟამად ჩვენს ინტერესს არ წარმოადგენს სიმრავლეთა ალგებრის მთლიანი სტრუქტურის შესწავლა, არამედ, უბრალოდ, გვინდა ვაჩვენოთ, რომ ზემოაღწერილი იგივეობებით შეიძლება ვისარგებლოთ სიმრავლურ გამოსახულებებზე ოპერირებისას. კერძოდ, ირკვევა, რომ ნებისმიერ სიმრავლურ გამოსახულებაში ესა თუ ის სიმრავლე ყოველთვის შეიძლება ჩავანაცვლოთ მისი ტოლი სიმრავლით და რომ ამგვარი ჩანაცვლების შედეგად ყოველთვის ვღებულობთ გამოსახულებას, რომელიც აღნიშნავს იმავე სიმრავლეს, რასაც საწყისი გამოსახულება აღნიშნავდა. ასე მაგალითად, $A\cap(B\cup C)'$ გამოსახულებაში დე მორგანის კანონის შესაბამისად შეიძლება $(B\cup C)'$ ჩავანაცვლოთ მისი იგივური $B'\cap C'$ გამოსახულებით და, შესაბამისად, მივიღოთ $A\cap(B'\cap C')$ გამოსახულება, რომელიც, იქიდან გამომდინარე, რომ $(B\cup C)'$ და $B'\cap C'$ სიმრავლეებში ერთი და იგივე წევრებია, ცხადია, იმავე სიმრავლეს აღნიშნავს, რასაც თავდაპირველი $A\cap(B\cup C)'$ გამოსახულება აღნიშნავდა.

ეს მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ რთული სიმრავლური გამოსახულებების გასამარტივებლად (იხ. (1-28)), ან სიმრავლეთა შესახებ სხვა დებულებათა ჭეშმარიტების დასამტკიცებლად (იხ. (1-29) და (1-30)). საზოგადოდ, უფრო მოსახერხებელია ამგვარი სიმრავლური გამოყვანები წარმოდგენილი იქნეს სტრიქონული ჩანაწერების ვერტიკალური

მიმდევრობის სახით, სადაც ყოველ სტრიქონზე მითითებულია ის კანონი, რომლის მიხედვითაც შესაბამისი გამოსახულება გამოიყვანება წინა სტრიქონის გამოსახულებიდან.

(1-28) **მაგალითი**: გაამარტივეთ $(A\cup B)\cup(B\cap C)'$ გამოსახულება.

1. $(A\cup B)\cup(B\cap C)'$
2. $(A\cup B)\cup(B'\cup C')$ **დე მორგანის კანონი**
3. $A\cup(B\cup(B'\cup C'))$ **ასოციაციურობის კანონი**
4. $A\cup((B\cup B')\cup C')$ **ასოციაციურობის კანონი**
5. $A\cup(U\cup C)'$ **დამატების კანონი**
6. $A\cup(C'\cup U)$ **კომუტაციურობის კანონი**
7. $A\cup U$ **იდენტურობის კანონი**
8. U **იდენტურობის კანონი**

(1-29) **მაგალითი:** აჩვენეთ, რომ $(A\cap B)\cap(A\cap C)'=A\cap(B-C)$.

1. $(A\cap B)\cap(A\cap C)'$
2. $(A\cap B)\cap(A'\cup C')$ **დე მორგანის კანონი**
3. $A\cap(B\cap(A'\cup C'))$ **ასოციაციურობის კანონი**
4. $A\cap((B\cap A')\cup(B\cap C'))$ **დისტრიბუციულობის კანონი**
5. $(A\cap(B\cap A'))\cup(A\cap(B\cap C'))$ **დისტრიბუციულობის კანონი**
6. $(A\cap(A'\cap B))\cup(A\cap(B\cap C'))$ **კომუტაციურობის კანონი**
7. $((A\cap A')\cap B)\cup(A\cap(B\cap C'))$ **ასოციაციურობის კანონი**
8. $(\varnothing\cap B)\cup(A\cap(B\cap C'))$ **დამატების კანონი**
9. $(B\cap\varnothing)\cup(A\cap(B\cap C'))$ **კომუტაციურობის კანონი**
10. $\varnothing\cup(A\cap(B\cap C'))$ **იდენტურობის კანონი**
11. $(A\cap(B\cap C'))\cup\varnothing$ **კომუტაციურობის კანონი**
12. $A\cap(B\cap C')$ **იდენტურობის კანონი**
13. $A\cap(B-C)$ **დამატების კანონი**

(1-30) **მაგალითი:** აჩვენეთ, რომ $X\cap Y\subseteq X\cup Y$

თავსებადობის პრინციპის მიხედვით, ეს გამოსახულება ჭეშმარიტია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $(X\cap Y)\cap(X\cup Y) = X\cap Y$. ქვემოთ სწორედ ამ უკანასკნელის დასაბუთებას წარმოვადგენთ.

1. $(X\cap Y)\cap(X\cup Y)$
2. $((X\cap Y)\cap X)\cup((X\cap Y)\cap Y)$ **დისტრიბუციულობის კანონი**
3. $(X\cap(X\cap Y))\cup((X\cap Y)\cap Y)$ **კომუტაციურობის კანონი**
4. $((X\cap X)\cap Y)\cup((X\cap Y)\cap Y)$ **ასოციაციურობის კანონი**
5. $((X\cap X)\cap Y)\cup(X\cap(Y\cap Y)$ **ასოციაციურობის კანონი**
6. $(X\cap Y)\cup(X\cap Y)$ **იგივურობის კანონი (ორჯერ)**
7. $X\cap Y$ **იგივურობის კანონი**

სტრიქონთა ასეთი მიმდევრობა იძლევა იმ ფაქტის ფორმალურ მტკიცებას, რომ ბოლო სტრიქონში წარმოდგენილი სიმრავლე უდრის სიმრავლეს, რომელიც პირველ სტრიქონშია წარმოდგენილი. დამტკიცების საკითხს უფრო დეტალურად ჩვენ შემდგომ განვიხილავთ. ის მკითხველი კი, რომელიც ეცდება სავარჯიშოებში მოცემული ამოცანების ამგვარად ამოხსნას, უეჭველად წააწყდება დამტკიცებებთან დაკავშირებულ ცნობილ სირთულეებს: კერძოდ, მაშინ როცა საკმაოდ მარტივია უკვე აგებული დამტკიცების სისწორის შემოწმება, შეიძლება საკმაოდ რთული აღმოჩნდეს სწორი დამტკიცების ამგები გზის მოძებნა. ამგვარად, თუ გადასაწყვეტი გვაქვს ამოცანა, ვთქვათ ისეთი, როგორიც (1-29) მაგალითით არის მოცემული, შეიძლება პირველსაწყისი გამოსახულების საბოლოო გამოსახულებამდე მიმყვანი გზის პოვნამდე ბევრი წარუმატებელი გზის გავლა მოგვიხდეს. ამდენად, მოსალოდნელია, რომ ზოგჯერ რამდენჯერმე მოგვიწიოს დამტკიცების უკვე არჩეული გზის შეწყვეტა და გამოყვანის თავიდან დაწყება.

სავარჯიშოები

1. მოცემულია შემდეგი სიმრავლეები:

A = {a, b, c, 2, 3, 4}	E = {a, b, {c}}
B = {a, b}	F = ∅
C = {c,2}	G = {{a, b}{c,2}}
D = {b, c}	

განსაზღვრეთ, შემდეგი გამონათქვამები ჭეშმარიტია თუ მცდარი:

(ა) $c \in A$	(ზ) $D \subset A$	(ნ) $B \subseteq G$
(ბ) $c \in F$	(თ) $A \subseteq C$	(ო) $\{B\} \subseteq G$
(გ) $c \in E$	(ი) $D \subseteq E$	(პ) $D \subseteq G$
(დ) $\{c\} \in E$	(კ) $F \subseteq A$	(ჟ) $\{D\} \subseteq G$
(ე) $\{c\} \in C$	(ლ) $E \subseteq F$	(რ) $G \subseteq A$
(ვ) $B \subseteq A$	(მ) $B \in G$	(ს) $\{\{c\}\} \subseteq E$

2. ნებისმიერი S სიმრავლისათვის:

(ა) არის თუ არა S სიმრავლე {S} სიმრავლის წევრი?
(ბ) არის თუ არა {S} სიმრავლე {S} სიმრავლის წევრი?
(გ) არის თუ არა {S} სიმრავლე {S} სიმრავლის ქვესიმრავლე?
(დ) რომელია ის სიმრავლე, რომლის ერთადერთი წევრია {S}?

3. დაწერეთ შემდეგი სიმრავლეების რეკურსული და პრედიკატული განსაზღვრებები. გახსოვდეთ, რომ სიაში რიგს მნიშვნელობა არა აქვს. ამგვარად, არ შეიძლება ისეთი

სიტყვების გამოყენება, როგორიცაა „პირველი“ ან „უკანასკნელი“. გახსოვდეთ აგრეთვე, რომ რეკურსული წესი შეიძლება შეიცავდეს ერთზე მეტ „თუ ... მაშინ“ ტიპის გამონათქვამს.

(ა) {5, 10, 15, 20, . . .}
(ბ) {7, 17, 27, 37, . . .}
(ც) {300, 301, 302, . . . , 399, 400}
(დ) {3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, . . .}
(ე) {0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, . . .}
(ფ) {1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, . . .}

4. განიხილეთ შემდეგი სიმრავლეები:

$S_1 = \{\{\varnothing\}, \{A\}, A\}$
$S_2 = A$
$S_3 = \{A\}$
$S_4 = \{\{A\}\}$
$S_5 = \{\{A\}, A\}$
$S_6 = \varnothing$
$S_7 = \{\varnothing\}$
$S_8 = \{\{\varnothing\}\}$
$S_9 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

უპასუხეთ ქვემოთ მოცემულ შეკითხვებს. - გახსოვდეთ, რომ, როცა სიმრავლეში ერთზე მეტი წევრია, სიმრავლის წევრები ერთმანეთისაგან მძიმით გამოიყოფა და რომ მოცემული სიმრავლის ქვესიმრავლე იქმნება ამ სიმრავლის ნული, ან მეტი წევრის სიმრავლურ ფრჩხილებში მოთავსებით.

S_1 - S_9 სიმრავლეებიდან:
(ა) რომლებია S_1 სიმრავლის წევრები?
(ბ) რომლებია S_1 სიმრავლის ქვესიმრავლეები?
(გ) რომლებია S_9 სიმრავლის წევრები?
(დ) რომლებია S_9 სიმრავლის ქვესიმრავლეები?
(ე) რომლებია S_4 სიმრავლის წევრები?
(ვ) რომლებია S_4 სიმრავლის ქვესიმრავლეები?

5. განსაზღვრეთ თითოეული შემდეგი სიმრავლე წევრების სიის ჩამოწერით:

(ა) $\wp(\{a, b, c\})$
(ბ) $\wp(\{a\})$
(გ) $\wp(\{\varnothing\})$
(დ) $\wp(\wp(\{a, b\}))$
(ე) $\wp(\varnothing)$

6. მოცემულია სიმრავლეები A, ... , G (იხ. სავარჯიშო 1). ჩამოწერეთ შემდეგი სიმრავლეების წევრების სია:

(ა) $B\cup C$
(ბ) $A\cup B$
(გ) $D\cup E$
(დ) $B\cup G$
(ე) $D\cup F$
(ვ) $A\cap B$
(ზ) $A\cap E$
(კ) $C\cap D$
(ლ) $B\cap F$
(მ) $C\cap E$
(ნ) $B\cap G$
(პ) $A-B$
(ჟ) $B-A$
(რ) $C-D$
(ს) $E-F$
(ტ) $F-A$
(ფ) $G-B$

7. განვიხილოთ პირველი სავარჯიშოთი მოცემული სიმრავლეები: დავუშვათ, რომ დისკურსის უნივერსუმი არის $\cup\{A, B, C, D, E, F, G\}$. ჩამოწერეთ შემდეგი სიმრავლეების წევრები:

(ა) $(A\cap B)\cup C$
(ბ) $A\cap(B\cup C)$
(გ) $(B\cup C)-(C\cup D)$
(დ) $A\cap(C-D)$
(ე) $(A\cap C)-(A\cap D)$
(ვ) G'
(ზ) $(D\cup E)'$
(თ) $D'\cap E'$
(კ) $F\cap(A-B)$
(ლ) $(A\cap B)\cup U$
(მ) $(C\cup D)\cap U$
(ნ) $C\cap D'$
(ჟ) $G\cup F'$
(რ) $(B\cap C)'$

8. ვთქვათ, მოცემულია $A=\{a, b, c\}$, $B=\{c, d\}$ და $C=\{d, e,f\}$ სიმრავლეები.

(ა) რა იქნება:

(i) $A\cup B$
(ii) $A\cap B$
(iii) $A\cup(B\cap C)$
(v) $B\cup\varnothing$
(vi) $A\cap(B\cap C)$
(vii) $A-B$

(ბ) a ეკუთვნის თუ არა $\{A, B\}$ სიმრავლეს?
(გ) a ეკუთვნის თუ არა $A\cup B$ სიმრავლეს?

9. სიმრავლური იგივეობების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი A, B და C სიმრავლეებისათვის:

(a) $((A\cup C)\cap(B\cup C')) \subseteq (A\cup B)$
(b) $A\cap(B-A) = \varnothing$

10. აჩვენეთ დისტრიბუციულობის (ა) წესის სამართლიანობა $X\cup(Y\cap Z)$ და $(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$ გამოსახულებებისათვის ვენის დიაგრამების აგების გზით.

11. ორი A და B სიმრავლის სიმეტრიული სხვაობა განისაზღვრება როგორც იმ, და მხოლოდ იმ შემადგენლების სიმრავლე, რომელთაგან ნებისმიერი ეკუთვნის ან A სიმრავლეს, ან B სიმრავლეს, მაგრამ არ ეკუთვნის ორივეს ერთდროულად.

$$A+B =_{def} (A\cup B)-(A\cap B)$$

(ა) დახაზეთ ორი სიმრავლის სიმეტრიული სხვაობის ვენის დიაგრამა.

(ბ) სიმრავლური იგივეობების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $A+B=(A-B)\cup(B-A)$. აჩვენეთ, რომ $(A-B)\cup(B-A)$ სიმრავლის ვენის დიაგრამა ემთხვევა (ა) შეკითხვისას აგებულ დიაგრამას.

(გ) აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი A და B სიმრავლისათვის, ადგილი აქვს: $A+B=B+A$.

(დ) გამოსახეთ ქვემოთ მოცემული სიმრავლეები გაერთიანების, თანაკვეთის და დამატების ოპერაციებით და გაამარტივეთ სიმრავლური იგივეობების გამოყენებით.

(i) $A + A$
(ii) $A + U$
(iv) $A + B$, სადაც $A\subseteq B$
(v) $A + B$, სადაც $A\cap B = \varnothing$

(iii) $A + \varnothing$

(ე) აჩვენეთ, რომ $((A–B)+(B–A)) = A+ B$

(ფ) აჩვენეთ, რომ $(A+B)\subseteq B$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \subseteq B$

12. ზედსართავებს, რომლებიც გამომდინარე მათივე შინაარსიდან ლოგიკურად მიმართებადნი არიან თავიანთ თავზე ვუწოდოთ ავტოლოგიკური. იმ ზედსართავებს, რომელთა თავიანთ თავზე მიმართვა, გამომდინარე მათივე შინაარსიდან ლოგიკურად დაუშვებელია, ვუწოდოთ ჰეტეროლოგიკური. მაგალითად, 'English' და 'long' ავტოლოგიკური, ხოლო 'French' და 'short' ჰეტეროლოგიკურ ზედსართავებია.

აჩვენეთ, რომ ზედსართავი 'ჰეტეროლოგიკური' ბადებს ისეთსავე წინააღმდეგობას, როგორიც რასელის პარადოქსშია. რასელის პარადოქსის ეს ვარიანტი ცნობილია გრელინგის პარადოქსის სახელწოდებით.

თავი 2
მიმართებები და ფუნქციები

2. 1 დალაგებული წყვილი და დეკარტული ნამრავლი

გავიხსენოთ, რომ სიმრავლის წევრებს შორის რიგითობა ანუ დალაგება არ ივარაუდება. მიუხედავად ამისა, **დალაგებული წყვილი,** რომელიც $\langle a, b\rangle$ სახით ჩაიწერება, ჩვეულებრივი ანუ დაულაგებელი სიმრავლეების მეშვეობით განისაზღვრება. ამ ჩანაწერში a განიხილება დალაგებული წყვილის **პირველ წევრად**, b კი **მეორე წევრად**. დალაგებული წყვილი შემდეგი სიმრავლური ჩანაწერით მოიცემა:

(2-1) $\langle a, b\rangle =_{def} \{\{a\},\{a,b\}\}$

$\langle a,b\rangle$ წყვილის პირველ წევრად მიიჩნევა ერთ შემადგენლიანი $\{a\}$ სიმრავლის წევრი, ხოლო მეორე წევრი არის $\{a,b\}$ სიმრავლის ის წევრი, რომელიც არ მიეკუთვნება $\{a\}$ სიმრავლეს. ამგვარად, წყვილის დაულაგებელი სიმრავლური გაგების მიუხედავად, შესაძლებელი გახდა დალაგებული წყვილისთვის დამახასიათებელი რიგითობის პირობის დაკმაყოფილება. შეიძლება ითქვას, რომ დალაგებული წყვილებისათვის დამახასიათებელია შემდეგი: $\langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$. ეს იმიტომ, რომ, საზოგადოდ, $\{\{a\},\{a,b\}\}\neq\{\{b\},\{a,b\}\}$. მართლაც, $\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=b$. ეს განსაზღვრება შეიძლება განვავრცოთ დალაგებულ სამეულებზე და, აგრეთვე, ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის, იგი

შეიძლება განივრცოს დალაგებულ n-ეულებზეც. დალაგებული სამეული შემდეგნაირად განისაზღვრება:

(2-2) $\langle a, b, c \rangle =_{def} \langle\langle a,b\rangle, c\rangle$

ინტუიციური თვალსაზრისებით შეიძლება უფრო ბუნებრივიც ყოფილიყო დალაგებული წყვილის ერთ-ერთ ამოსავალ, ძირითად ცნებად განხილვა. მაგრამ, იმის გამო, რომ ზოგადი მათემატიკური პრინციპები ითხოვენ ძირითადი ცნებების მინიმუმამდე დაყვანას, იგი ამგვარად არ განიხილება.

ვთქვათ, უკვე მოცემული გვაქვს A და B სიმრავლეები. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ დალაგებული წყვილები მხოლოდ ამ A და B სიმრავლეების გამოყენებით. კერძოდ, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი წყვილები, რომელთა პირველი წევრი A სიმრავლის წევრია, მეორე კი B სიმრავლისა. განსაზღვრით, A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი არის სიმრავლე, რომელიც შედგება ყველა ზემოაღწერილი სახის წყვილისაგან. A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი ჩაიწერება როგორც - $A\times B$ და იგი პრედიკატული გზით შემდეგნაირად განისაზღვრება:

(2-3) $A\times B =_{def} \{\langle x, y\rangle \mid x\in A$ და $y\in B\}$

აქვე შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრის თანახმად, თუ ან A, ან B უდრის $\varnothing$ სიმრავლეს, მაშინ $A\times B=\varnothing$. ქვემოთ წარმოდგენილია დეკარტული ნამრავლის რამდენიმე მაგალითი:

(2-4) ვთქვათ, $K = \{a, b, c\}$ და $L = \{1, 2\}$, მაშინ

$K\times L = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle\}$
$L\times K = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 2, c\rangle\}$
$L\times L = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

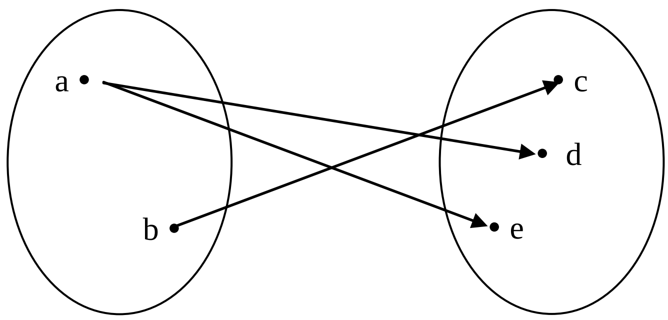
ყურადღება მიაქციეთ, რომ დეკარტული ნამრავლის წევრები **არ არიან დალაგებულნი** ერთმანეთის მიმართ. ამგვარად, მიუხედავად იმისა, რომ ნებისმიერი დეკარტული ნამრავლის თითოეული წევრი დალაგებული წყვილია, თავად დეკარტული ნამრავლი დალაგებული წყვილების ჩვეულებრივი ანუ დაულაგებელი სიმრავლეა.

ზოგჯერ, დალაგებული წყვილების M სიმრავლისათვის, მნიშვნელოვანი ხდება განსაზღვრა იმ უმცირესი დეკარტული ნამრავლისა, რომლის ერთ-ერთ ქვესიმრავლეს ეს M სიმრავლე წარმოადგენს. ის ორი უმცირესი A და B სიმრავლე, რომელთათვისაც $M\subseteq A\times B$, შემდეგნაირად განისაზღვრება - $A=\{a \mid \langle a,b\rangle\in M$, ერთი რომელიმე b ელემენტისათვის მაინც$\}$ და $B=\{b \mid \langle a, b\rangle\in M$, ერთი რომელიმე a ელემენტისათვის მაინც$\}$. ამ A, შესაბამისად, B სიმრავლეს უწოდებენ **M სიმრავლის გეგმილს პირველ,** შესაბამისად, **მეორე კოორდინატზე**. ასე მაგალითად, თუ $M=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,2\rangle\}$ სიმრავლეს, მაშინ სიმრავლე $\{1,3\}$ იქნება M სიმრავლის გეგმილი პირველ კოორდინატზე, სიმრავლე $\{1,2\}$ კი იქნება M სიმრავლის გეგმილი მეორე კოორდინატზე. აქედან გამომდინარე, $\{1,3\}\times\{1,2\}$ არის ის უმცირესი დეკარტული ნამრავლი, რომლის ერთ-ერთი ქვესიმრავლე ზემოგანხილული M სიმრავლეა.

2. 2 მიმართება

საგნებს შორის ბუნებრივი მიმართება არის ამ საგნებს შორის არსებული გარკვეული ბუნებრივი კავშირი. ხოლო ის, რაც ჩვენ გააზრებული გვაქვს საგნებს შორის მათემატიკურ

მიმართებად, არის ის, რაც ბუნებაში ამ საგნებს შორის ან არსებობს, ან არ არსებობს, მაგრამ რაც აზროვნებაში ამავე საგნებს შორის ჩვენს მიერ გააზრებულ ურთიერთდამოკიდებულებას ასახავს. მაგალითად, მიმართება 'დედაა' ანუ, რაც თითქმის იგივეა, 'არის დედა' არსებულად გააზრება 'დედებსა' და მათ 'შვილებს' შორის. მაგრამ, იგივე მიმართება მხოლოდ 'შვილებს', ან მხოლოდ 'დედებს' შორის არსებულად ვერ აზრდება. გარდამავალი ზმნები როგორც წესი მიმართებებს აღნიშნავენ. ასე მაგალითად, ზმნა 'კოცნა' შეიძლება განვიხილოთ ობიექტთა ისეთ წყვილებზე განსაზღვრული აბსტრაქტული მიმართების აღნიშვნად, რომელთა პირველი წევრი კოცნის მეორე წევრს. ზემოთ ქვესიმრავლეობის მიმართება განსაზღვრული იყო როგორც მიმართება სიმრავლეებს შორის. ნებისმიერი სიმრავლის ნებისმიერი წევრი შეიძლება გარკვეულად დავაკავშიროთ ან სხვა, ან იმავე სიმრავლის წევრთან ან წევრებთან. შეთანხმებით, ჩანაწერი Rab ან, რაც იგივეა, aRb ნიშნავს იმას, რომ a ობიექტი b ობიექტთან R მიმართებით განსაზღვრულ კავშირშია. ჩანაწერი $R \subseteq A \times B$ გვეუბნება, რომ A და B სიმრავლეების ელემენტებს შორის აზრდება R მიმართებით განსაზღვრული კავშირი და რომ ამ სიმრავლეების ზოგიერთი წევრი ერთმანეთთან R მიმართებით განსაზღვრულ კავშირში ანუ R მიმართებაშია, ზოგიერთი კი არა. ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ R არის მიმართება A სიმრავლიდან B სიმრავლეში. როდესაც მიმართება აკავშირებს ერთი და იგივე A სიმრავლის ელემენტებს, მაშინ ვამბობთ, რომ R მიმართება განსაზღვრულია A სიმრავლეში. R მიმართების გეგმილს მისი პირველი კოორდინატის გასწვრივ უწოდებენ R მიმართების **გამოსვლის არეს,** ხოლო R მიმართების გეგმილი მისი მეორე კოორდინატით იწოდება R მიმართების **ჩასვლის არედ**. ამგვარად, ნებისმიერი R მიმართება A სიმრავლიდან B სიმრავლეში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ A და B სიმრავლეების $A \times B$ დეკარტული ნამრავლის რაღაც ქვესიმრავლე. სამწუხაროდ, ჯერ კიდევ არ არსებობს საყოველთაოდ მიღებული ტერმინები იმ A და B სიმრავლეებისათვის, რომელთა ქვესიმრავლეებიცაა R მიმართების გამოსვლის არე და ჩასვლის არე. კიდევ ერთხელ შევნიშნოთ, რომ ზემოთ შემოთავაზებულია ბუნებრივად არსებული მიმართებების სიმრავლურ-თეორიული მოდელირების, ანუ მათი დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ $\{\langle a,b \rangle | aRb\}$ სახის მათემატიკურ მიმართებებზე დაყვანის ერთი გზა. ასე მაგალითად, მიმართება 'დედაა', რომელიც განისაზღვრება ყველა დღეს არსებულ ადამიანთა H სიმრავლეზე, არის $H \times H$ სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, ანუ დალაგებულ წყვილთა ისეთი სიმრავლე, რომ ამ სიმრავლეში შემავალი თითოეული წყვილის პირველი წევრი არის ამავე წყვილის მეორე წევრის დედა. მათემატიკაში ცნობილია A და B სიმრავლეებს შორის არსებული R მიმართებების სქემატურად წარმომდგენი მეთოდი ისეთი ისრების გამოყენებით, რომლებიც გამოდიან A სიმრავლის წევრებიდან და მიემართებიან B სიმრავლის წევრებისკენ.



ნახ. 2-1: მიმართება $R: A \rightarrow B$

2-1 ნახაზზე რგოლებით გამოხატულია $A=\{a,b\}$ და $B=\{a,d,e\}$ სიმრავლეები და ისრებით წარმოდგენილია სიმრავლური მიმართება $R=\{\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,c\rangle\}$. მიაქციეთ ყურადღება, რომ გამოსვლის არის ერთი წევრი მიმართებამ შეიძლება დააკავშიროს ჩასვლის არის ერთზე მეტ წევრთან. $R\subseteq A\times B$ მიმართების R' დამატებითი მიმართება, როგორც სიმრავლე, შემდეგნაირად განისაზღვრება:

?2–5% $R' =_{def} (A\times B)-R$

ამგვარად, R' შეიცავს $A\times B$ დეკარტული ნამრავლის ყველა იმ წყვილს, რომლებიც არ მიეკუთვნებიან R მიმართებას. აქვე შევნიშნოთ, რომ $(R')'=R$. ნებისმიერი $R\subseteq A\times B$ მიმართების ინვერსირებული ანუ შებრუნებული მიმართება აღინიშნება როგორც R^{-1} და იგი შეიცავს R მიმართების ყველა წყვილის პირველი და მეორე წევრების შებრუნებით მიღებულ ყველა წყვილს. ანუ, R მიმართების შებრუნებული R^{-1} მიმართება R მიმართების წევრების შებრუნებით მიღებული წყვილებისაგან შედგება. მაგალითად, ვთქვათ, $A=\{1,2,3\}$ და ვთქვათ, $R\subseteq A\times A$ არის $\{\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ სიმრავლე, რომელიც A სიმრავლეში 'მეტია' მიმართებას განსაზღვრავს. ამ შემთხვევაში R მიმართების დამატებითი R' მიმართება არის $\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$ სიმრავლე, რომელიც, თავის მხრივ, არის A სიმრავლეში განსაზღვრული 'ან ნაკლებია ან ტოლი' მიმართება. ამ R მიმართების შებრუნებული ანუ ინვერსირებული R^{-1} მიმართება იქნება $\{\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$ სიმრავლე. იგი A სიმრავლეში განსაზღვრულ 'ნაკლებია' მიმართებას წარმოადგენს. შევნიშნოთ, რომ $(R^{-1})^{-1} = R$ და თუ $R\subseteq A\times B$, მაშინ $R^{-1}\subseteq B\times A$, მაგრამ $R'\subseteq A\times B$.

ამჯერად ჩვენი მსჯელობა ეხებოდა **ორადგილიან** მიმართებებს, ე.ი. დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეებს. ანალოგიურადვე განიხილება მიმართებები, რომლებიც შედგება დალაგებული **სამეულებისაგან, ოთხეულებისაგან** და ა.შ.. საზოგადოდ, მათემატიკაში, ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის დაიშვება და განიხილება n-ადგილიანი მიმართებები.

2. 3 ფუნქცია

სიმრავლურ-თეორიული მიდგომებით ფუნქცია განისაზღვრება როგორც გარკვეული სახის მიმართება. R მიმართება A სიმრავლიდან B სიმრავლეში იწოდება ფუნქციონალურ მიმართებად ანუ ფუნქციად მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა დაკმაყოფილებულია შემდეგი პირობები:

1. გამოსვლის არის არცერთი წევრი არ წყვილდება ჩასვლის არის განსხვავებულ წევრებთან.
2. R მიმართების გამოსვლის არე ემთხვევა თავად A სიმრავლეს.

ზემოთ ნათქვამი ნიშნავს, რომ $A\times B$ დეკარტული ნამრავლის რაიმე ქვესიმრავლე მაშინ, და მხოლოდ მაშინ შეიძლება ჩაითვალოს ფუნქციად, როცა A სიმრავლის თითოეული a წევრისათვის ამ მიმართების ისეთი დალაგებული წყვილების ოდენობა, რომელთა პირველი კოორდინატი A სიმრავლის ეს a წევრია, ტოლია ერთის.

მაგალითისათვის განვიხილოთ $A=\{a,b,c\}$ და $B=\{1,2,3,4\}$ სიმრავლეები. A სიმრავლიდან B სიმრავლეში განსაზღვრული შემდეგი მიმართებები წარმოადგენენ ფუნქციებს:

?2–6% $P = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$
$Q = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c,1\rangle\}$
$R = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle\}$

შემდეგი მიმართებები კი არ წარმოადგენენ ფუნქციებს A სიმრავლიდან B სიმრავლეში.

?2–7% S = {⟨a, 1⟩, ⟨b, 2⟩}
T = {⟨a, 2⟩, ⟨b, 3⟩, ⟨a, 3⟩, ⟨c,1⟩}
V = {⟨a, 2⟩, ⟨a, 3⟩, ⟨b, 4⟩}

აქ S მიმართება არ აკმაყოფილებს ფუნქციის განსაზღვრით მოთხოვნილ მეორე პირობას გამომდინარე იქიდან, რომ მიმართებითი წყვილების პირველი წევრების სიმრავლე {a,b} არ ემთხვევა A სიმრავლეს. T მიმართება არ აკმაყოფილებს ფუნქციის განსაზღვრით მოთხოვნილ პირველ პირობას გამომდინარე იქიდან, რომ a დაწყვილებულია B სიმრავლის ორ განსხვავებულ წევრთან. V მიმართების შემთხვევაში დარღვეულია მიმართების ფუნქციონალურობის ორივე პირობა.

ფუნქციებზე მსჯელობისას ჩვენ ძირითადად იგივე ტერმინოლოგიას გამოვიყენებთ, რასაც ვიყენებდით მიმართებებთან დაკავშირებით. ამგვარად, ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს A×B სიმრავლის ქვესიმრავლეს, იწოდება ფუნქციად A სიმრავლიდან B სიმრავლეში, ხოლო ფუნქციას, რომელიც A×A სიმრავლის ქვესიმრავლეა, უწოდებენ ფუნქციას A სიმრავლეში. ის, რომ 'F არის ფუნქცია A სიმრავლიდან B სიმრავლეში'. მოკლედ შემდეგნაირად ჩაიწერება - 'F:A→B'. ზოგჯერ ფუნქციის განსაზღვრის არის შემადგენელს ფუნქციის არგუმენტს, ხოლო მნიშვნელობათა არის მასთან დაწყვილებულ შემადგენელს ფუნქციის მნიშვნელობას უწოდებენ. ამგვარად, (2-6) მაგალითით განხილულ P ფუნქციასთან დაკავშირებით შეიძლება ითქვას, რომ c არგუმენტზე ფუნქციის მნიშვნელობა არის '3'. ჩვეულებრივ, ეს ფაქტი შემდეგნაირად ჩაიწერება P(c)=3, სადაც ფუნქციის დასახელება წინ უსწრებს არგუმენტს, რომელიც ჩაწერილია ფრჩხილებში, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობა იწერება ტოლობის ნიშნის მარჯვენა მხარეს.

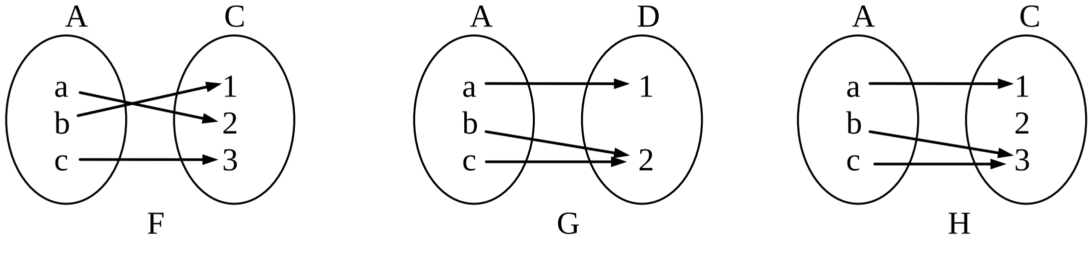
'გარდაქმნა', 'ასახვა', 'გადასახვა', 'შესაბამისობა' არიან 'ფუნქციის' ფართოდ გავრცელებული სინონიმები და ხშირად ჩანაწერს 'F(a)=2' კითხულობენ შემდეგნაირად: 'F ფუნქცია a-ს გარდაქმნის 2-ად'. ამგვარი მიდგომით ფუნქცია წარმოგვიდგება როგორც აქტიური პროცესი, რომელიც არგუმენტებს გარდაქმნის მათ მნიშვნელობებად. ფუნქციათა ამგვარი გაგება ერთგვარად მყარდება ამგვარ მიდგომათა ბუნებრიობით მათემატიკაში, სადაც ფუნქციათა უმეტესობა არგუმენტებს აწყვილებს მნიშვნელობებთან ფორმულებით, რომლებიც აიგება ისეთი ოპერაციებით, როგორებიცაა შეკრება, გამრავლება, გაყოფა და ა.შ.. მაგალითად, F(x)=2x+1 არის ფუნქცია და იმ შემთხვევაში, თუ იგი განსაზღვრულია მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე, იგი აწყვილებს 1-ს 3-თან, 2-ს 5-თან, 3-ს 7-თან და ა.შ.. მეორე მხრივ, აღნიშნული ფუნქცია შეგვიძლია გავიაზროთ როგორც პროცესი, რომელიც მოიცემა და განისაზღვრება შემდეგი წესით - „იმისათვის, რომ ვიპოვოთ F ფუნქციის მნიშვნელობა ნებისმიერად აღებულ x-ზე, საჭიროა x ჯერ გავამრავლოთ 2-ზე და შემდეგ მიღებულ შედეგს დავუმატოთ 1". მოგვიანებით ვნახავთ, რომ რიგ შემთხვევებში მომგებიანია ფუნქციები განხილულ იქნან როგორც გარკვეული სახის გარდამქმნელები, რომლებიც მათ შესასვლელში შესულ ობიექტებს გარდაქმნიან ახალ ობიექტებად, რომლებსაც მათსავე გამოსასვლელში იძლევიან, როგორც გარდაქმნის საბოლოო შედეგებს. ჯერჯერობით კი, ჩვენ შევჩერდებით მხოლოდ ფუქციათა არაპროცესუალურ, სიმრავლურ-თეორიულ გააზრებებზე. ამგვარად, ფუნქცია F(x)=2x+1 განიხილება როგორც დალაგებულ წყვილთა გარკვეული სიმრავლე, რომელიც შემდეგი პრედიკატული ჩანაწერით განისაზღვრება:

(2-8) F = {⟨x, y⟩ | y=2x+1} (აქ x და y ნებისმიერი მთელი რიცხვებია).

ავტორები, რომლებიც ფუნქციას განიხილავენ როგორც გარდამქმნელს, ზოგჯერ, დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეს, რომელიც მიიღება ფუნქციის განსაზღვრის არის თითოეული წევრის დაწყვილებით მასზე ამ გარდამქმნელის ზემოქმედების შედეგად მიღებულ წევრთან, გარდამქმნელის **გრაფს** უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ ღერძთა საკოორდინატო სისტემაში ფუნქციის გრაფიკად წოდებულ ობიექტსა და აქ გრაფად წოდებულ ცნებებს შორის მსგავსება არ არის შემთხვევითი.

შევნიშნოთ ისიც, რომ მიმართება, რომელიც ფუნქციის განსაზღვრებაში მოცემული პირობებიდან აკმაყოფილებს პირველს, მაგრამ არ აკმაყოფილებს მეორეს, ზოგჯერ, მაინც განიხილება როგორც ფუნქცია. თუმცა, ასეთ ფუნქციებს, დანარჩენებისაგან გამოსარჩევად, შეთანხმებით, 'ნაწილობრივ ფუნქციებს' უწოდებენ. მაგალითად, მიმართება, რომელიც ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ ⟨a,b⟩ წყვილს გადასახავს a:b განაყოფში ანუ მიმართება, რომელიც მაგალითად ⟨6,2⟩ წყვილს უთანადებს 3-ს, ხოლო ⟨5,2⟩ წყვილს კი - 2,5-ს, არ არის განსაზღვრული იმ შემთხვევაში, როცა b=0. თუმცა, ეს მიმართება ყველა იმ წევრზე, რომელზედაც განსაზღვრულია, ცალსახაა ანუ ერთმნიშვნელობიანია, რაც იმას ნიშნავს, რომ იგი გამოსვლის არიდან აღებულ ნებისმიერ შემადგენელს მნიშვნელობად უთანადებს მნიშვნელობათა არის ერთადერთ შემადგენელს და, ამდენად, იგი მხოლოდ გამოსვლის არეში აკმაყოფილებს ფუნქციის განსაზღვრის ორივე პირობას. ამგვარად, მკაცრად თუ ვიმსჯელებთ, ჩვენი განსაზღვრის თანახმად იგი არ წარმოადგენს ფუნქციას, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ასეთი მიმართებები იწოდებიან ნაწილობრივ ფუნქციებად და მათ ფუნქციის განზოგადებულ სახეებად განიხილავენ. რაც ბუნებრივია, რადგან A სიმრავლიდან B სიმრავლეში განსაზღვრული ნებისმიერი ნაწილობრივი ანუ ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია A სიმრავლის გარკვეულ ქვესიმრავლეზე სრულ ანუ სრულად განსაზღვრულ ფუნქციას წარმოადგენს. შემდგომში, საჭიროების შემთხვევაში, ტერმინს 'ფუნქცია' გამოვიყენებთ ისეთი ცალსახა, ანუ ერთმნიშვნელობიანი, ანუ ერთი-ერთზე მიმართებებისათვის, რომელთა გამოსვლის ანუ განსაზღვრის არე შეიძლება არც ემთხვეოდეს A სიმრავლეს და მხოლოდ მის ნაწილს წარმოადგენდეს.

ზოგჯერ საჭიროა სპეციალურად აღინიშნოს ემთხვევა თუ არა A სიმრავლიდან B სიმრავლეში განსაზღვრული ფუნქციის მნიშვნელობათა არე B სიმრავლეს. საზოგადოდ, ფუნქციას განსაზღვრულს A სიმრავლიდან B სიმრავლეში, ში-ასახვას ანუ ში-ფუნქციას უწოდებენ. მაგრამ, თუ ფუნქციის ჩასვლის ანუ მნიშვნელობების არე ემთხვევა B სიმრავლეს, მაშინ ფუნქცია ზე-ასახვად ანუ ზე-ფუნქციად იწოდება. ამგვარად, ნებისმიერი ზე-ფუნქცია ამავე დროს არის ში-ფუნქციაც, მაგრამ არა პირიქით. 2-2 ნახაზზე იგივე სახის დიაგრამების მეშვეობით, რაც საზოგადოდ მიმართებებისათვის გამოიყენება, გამოსახულია სამი ფუნქცია. მკითხველისთვის გასაგები უნდა იყოს, რომ ნახაზზე განხილული F და G ფუნქციები არიან ზე-ფუნქციები, ხოლო H კი - არა. — რა თქმა უნდა, სამივე ეს ფუნქცია წარმოადგენს ში-ფუნქციას.



ნახ. 2-2: ში და ზე ფუნქციების მაგალითები

განსაზღვრით, $F:A \rightarrow B$ ფუნქციას უწოდებენ ერთზე-ერთი ფუნქციას იმ, და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ B სიმრავლის არცერთ წევრზე არ აისახება A სიმრავლის ერთზე მეტი შემადგენელი. 2-2 ნახაზზე F ფუნქცია არის ერთზე-ერთი ფუნქცია, ხოლო G – არა, რადგან G ფუნქციის შემთხვევაში 2-ზე აისახება A სიმრავლის არა ერთი, არამედ ორი - b და c შემადგენლები. არც H ფუნქციაა ერთზე-ერთი, რადგან $H(b)=H(c)=3$. (2-8) პრედიკატული ჩანაწერით მოცემული F ფუნქცია არის ერთზე-ერთი, რადგანაც ყოველი მთელი კენტი y რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი მთელი x რიცხვი, ისეთი რომ $y=2x+1$. აქვე შევნიშნოთ ის, რომ F არ არის მთელ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრული ზე-ფუნქცია. მართლაც, ცხადია, რომ x ცვლადის არცერთი მნიშვნელობისათვის F ფუნქციის მნიშვნელობა არ ხდება ლუწი რიცხვი. საზოგადოდ, ნებისმიერი ფუნქცია, რომელთაგან ზოგიერთი შეიძლება ერთზე-ერთიც იყოს, გაიგება როგორც ერთზე-ბევრი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციონალური მიმართებებისათვის დაშვებულია ის, რომ ჩასვლის არის ერთ წევრთან ერთდროულად წყვილდებოდეს გამოსვლის არის ერთზე მეტი ანუ ბევრი წევრი. - ამგვარად, ამ მიდგომებით, ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება დახასიათდეს როგორც ერთზე-ბევრი და მხოლოდ ზოგიერთი, და არა ყველა, ამავდროულად შეიძლება დახასიათდეს როგორც ერთზე-ერთი. თუმცა, ჩვეულებრივ, ტერმინი „ერთზე-ბევრი“ გამოიყენება იმ ფუნქციათა მიმართ, რომლებიც ფაქტობრივად არ წარმოადგენენ ერთზე-ერთი ფუნქციებს.

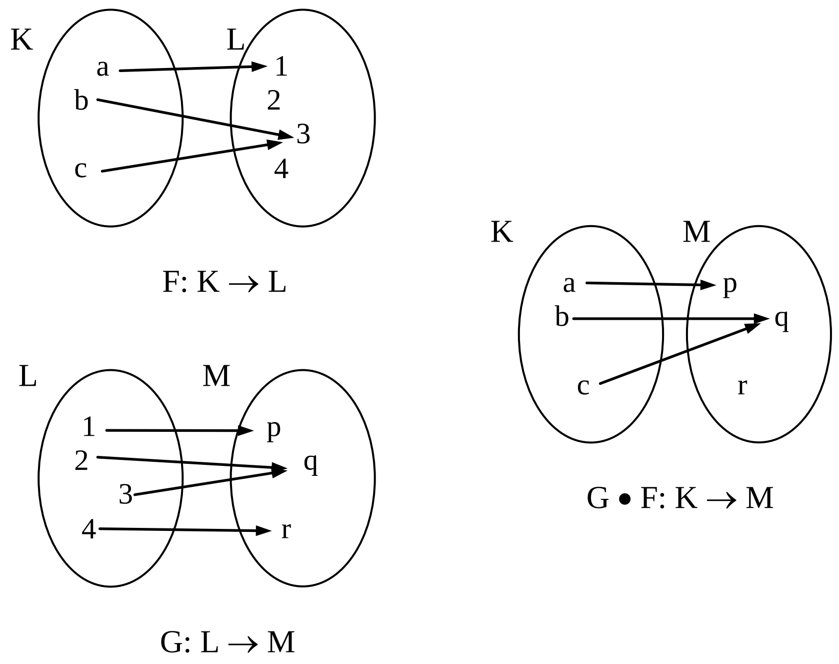
ერთზე-ერთი ფუნქცია, რომელიც ამავე დროს ზე-ფუნქცია (მაგალითად F ფუნქცია 2-2 ნახაზზე), **ურთიერთცალსახა ანუ ერთი-ერთი შესაბამისობად** იწოდება. ასეთი ფუნქციები განსაკუთრებით საინტერესოა, რადგანაც ნებისმიერი მათგანის ინვერსირება ანუ შებრუნება ასევე ფუნქციას იძლევა. აქვე შევნიშნოთ, რომ მიმართებებისათვის განსაზღვრული ინვერსიისა და დამატების ოპერაციები ფუნქციებისთვისაც იგივენაირად განისაზღვრება. 2-2 ნახაზზე G ფუნქციის ინვერსია ანუ შებრუნება არ იძლევა ფუნქციას, რადგანაც შებრუნებისას 2 ერთდროულად აისახება b და c ელემენტებზე. ასევე, H^{-1} არ არის ფუნქცია, თუნდაც იმიტომ, რომ აქ 2-ს საერთოდ არ მოეპოვება სახე.

ამოცანა: არის თუ არა (2-8) პრედიკატული ჩანაწერით განსაზღვრული F ფუქციის ინვერსია ფუნქცია? არის თუ არა F ფუნქცია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა?

2. 4 კომპოზიცია

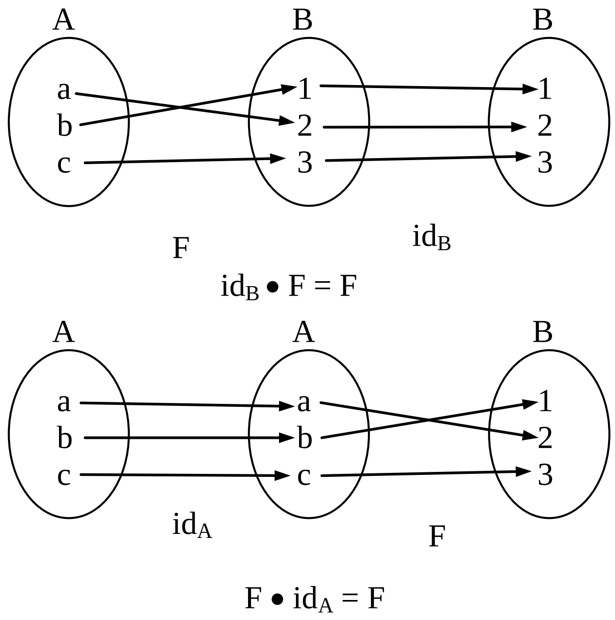
ერთი და იგივე მნიშვნელობათა არისა და განსაზღვრის არის მქონე ორი $F:A \rightarrow B$ და $G:B \rightarrow C$ ფუნქციით იგება ახალი $G \bullet F$ გამოსახულებით აღნიშნული ფუნქცია, რომელიც A სიმრავლეს გადასახავს C სიმრავლეში და რომელსაც F და G ფუნქციათა **კომპოზიციას** უწოდებენ. F და G ფუნქციათა $G \bullet F$ კომპოზიცია პრედიკატული ჩანაწერებით შემდეგნაირად განისაზღვრება:

(2-9) $G \bullet F =_{def} \{\langle x, z\rangle \mid$ არსებობს ერთი მაინც ისეთი y, რომ $\langle x,y\rangle \in F$ და $\langle y,z\rangle \in G\}$



ნახ. 2-3: F და G ფუნქციების კომპოზიცია

2-3 ნახაზზე განიხილება F და G ფუნქციები და მათი კომპოზიცია. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნულ მაგალითში F არის ში-ფუნქცია, მაშინ როდესაც G ზე-ფუნქციაა და არცერთი მათგანი არ არის ერთზე-ერთი. მაგალითი გვიჩვენებს, რომ კომპოზიციების მიღება შესაძლებელია იმ ფუნქციებისგანაც, რომლებსაც ზემოთ აღნიშნული განსაკუთრებული თვისებები არ ახასიათებთ. შესაძლებელია გვქონდეს ისეთი შემთხვევაც, როცა პირველი ფუნქციის ჩასვლის არეს არაფერი აქვს საერთო მეორე ფუნქციის გამოსვლის არესთან. ამ შემთხვევაში, ცხადია, არ არსებობს ისეთი y, რომ $\langle x,y\rangle \in F$ და $\langle y,z\rangle \in G$. ასეთ შემთხვევაში გამოდის რომ დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე, რომლითაც G•F კომპოზიცია ისაზღვრება, ცარიელია. 2-3 ნახაზზე F წარმოადგენს პირველ საკომპოზიციო ფუნქციას, ხოლო G მეორეს. ფუნქციათა რიგს მათი კომპოზიციური შეერთებისას დიდი მნიშვნელობა აქვს, რამდენადაც G•F ფუნქცია, საზოგადოდ, არ არის F•G ფუნქციის ტოლი. აქედან გამომდინარე, თითქოსდა ბუნებრივია G•F ჩანაწერი კეთდებოდეს და იკითხებოდეს პირიქითი რიგით. თუმცა, თუ გამოვალთ იქიდან, რომ F ფუნქციის მნიშვნელობა a არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის არის F(a), ხოლო G ფუნქციის მნიშვნელობა F(a) არგუმენტისათვის არის G(F(a)) და რომ კომპოზიციის განსაზღვრის თანახმად, (G•F)(a) და G(F(a)) ერთი და იგივე მნიშვნელობის მქონე გამოსახულებებია, შემოთავაზებული აღნიშვნის ბუნებრიობა გასაგები გახდება.



ნახ.2-4: კომპოზიცია იდენტურ ფუნქციასთან

$F{:}A \to A$ ფუნქცია, რომელიც $F=\{\langle x,x\rangle \mid x \in A\}$ პრედიკატული ჩანაწერით განისაზღვრება, იდენტურ ანუ იგივურ ფუნქციად იწოდება და აღნიშნება id_A გამოსახულებით. id_A ფუნქციით A სიმრავლის თითოეული ელემენტი თავის თავში აისახება. ნებისმიერი F ფუნქციის რიგით ნებისმიერი კომპოზიცია ამ F ფუნქციის შესაბამის იგივურ ფუნქციასთან იძლევა ფუნქციას, რომელიც ამავე F ფუნქციის ტოლია. აღნიშნულთან დაკავშირებით იხილეთ ნახაზი 2-4.

ვთქვათ $F{:}A \to B$ ნებისმიერი ერთზე-ერთი ზე-ფუნქცია. ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, რომ ასეთივეა F^{-1} მიმართებაც და რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

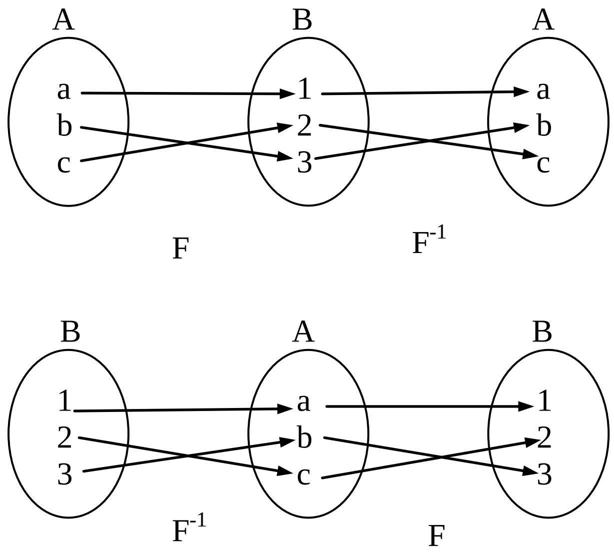
(2-10) $F^{-1} \bullet F = id_A$

$F \bullet F^{-1} = id_B$

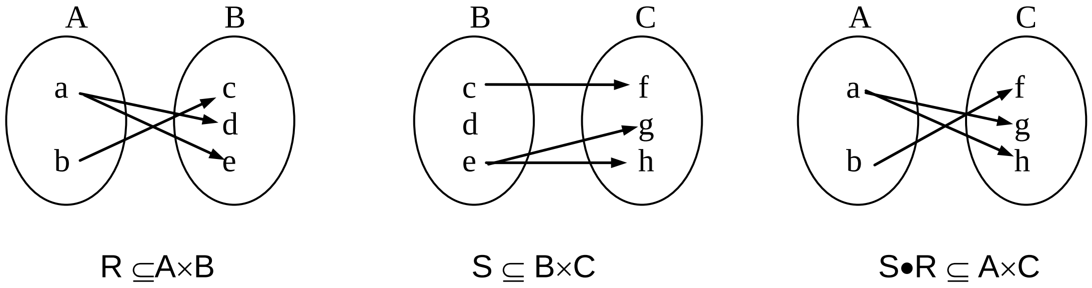
(2-10) ტოლობები გრაფიკულად ილუსტრირებულია 2-5 ნახაზზე.

ზემოთ განსაზღვრული ფუნქციათა კომპოზიციის ცნება თავისუფლად შეიძლება განზოგადდეს მიმართებებზეც. დავუშვათ, მოცემული გვაქვს $R \subseteq A \times B$ და $S \subseteq B \times C$ მიმართებები. R და S მიმართებების კომპოზიცია აღინიშნება $S \bullet R$ გამოსახულებით და იგი შემდეგი პრედიკატული ჩანაწერით განისაზღვრება:

$S \bullet R = \{\langle x,z\rangle \mid$ არსებობს ერთი მაინც ისეთი y, რომ $\langle x,y\rangle \in R$ და $\langle y,z\rangle \in S\}$.



ნახ. 2-5: ურთიერთცალსახა ფუნქციის კომპოზიცია მისსავე ინვერსიასთან



ნახ. 2-6: R და S მიმართებათა კომპოზიცია

ნებისმიერი $R \subseteq A \times B$ მიმართებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

?2-11% $$id_B \bullet R = R$$ $$R \bullet id_A = R$$

შევნიშნოთ, რომ A სიმრავლეში განსაზღვრული id_A იგივური ფუნქცია, ცხადია, ამავდროულად წარმოადგენს მიმართებას და მას A სიმრავლეში განსაზღვრულ იგივურ მიმართებასაც უწოდებენ.

(2.10) ტოლობები არაა მართებული იმ მიმართებებისათვის და, შესაბამისად, არც იმ ფუნქციებისათვის, რომლებიც არ წარმოადგენენ ურთიერთცალსახა შესაბამისობებს. თუმცა ნებისმიერი ერთზე-ერთი $R:A \to B$ მიმართებისათვის ადგილი აქვს შემდეგს:

?2-12% $$R^{-1} \bullet R \subseteq id_A$$

$R \bullet R^{-1} \subseteq id_B$

აქვე უნდა ითქვას, რომ ჩვენი ზოგადი შენიშვნები სამადგილიანი, ოთხადგილიანი და ა.შ. მიმართებებთან დაკავშირებით, ბუნებრივია, ვრცელდება ფუნქციებზეც. ამასთან, ცხადია, რომ ფუნქციის განსაზღვრის არედ შეიძლება განვიხილოთ დალაგებულ n-ეულთა ნებისმიერი სიმრავლე, თუმცა ფუნქციონალური ასახვისას თითოეულ ასეთ n-ეულს მნიშვნელობად უნდა შეესაბამებოდეს მნიშვნელობათა არის ერთი, და მხოლოდ ერთი შემადგენელი. მაგალითად, ასეთია ფუნქცია, რომელიც გადასახავს ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერ წყვილს მათ ჯამში.

სავარჯიშოები

1. მოცემულია $A=\{b,c\}$ და $B=\{2,3\}$.

(ა) განსაზღვრეთ შემდეგი სიმრავლეები წევრთა სიის ჩამოწერით:

(i) $A \times B$

(ii) $B \times A$

(iii) $A \times A$

(iv) $(A \cup B) \times B$

(v) $(A \cap B) \times B$

(vi) $(A-B) \times (B-A)$

(ბ) თითოეულისათვის მიუთითეთ ჭეშმარიტია იგი, თუ მცდარი:

(i) $(A \times B) \cup (B \times A) = \varnothing$

(ii) $(A \times A) \subseteq (A \times B)$

(iii) $(c, c) \subseteq (A \times A)$

(iv) $\{\langle b, 3\rangle, \langle 3, b\rangle\} \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$

(v) $\varnothing \subseteq A \times A$

(vi) $\{\langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$ წარმოადგენს მიმართებას A-დან B-ში.

(vii) $\{\langle b, b\rangle\}$ წარმოადგენს მიმართებას A-ში.

(გ) განვიხილოთ შემდეგი მიმართება A-დან $(A \cup B)$-ში:

$$R = \{\langle b, b\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$$

(i) განსაზღვრეთ R-ის გამოსვლისა და ჩასვლის არეები.

(ii) განსაზღვრეთ R მიმართების დამატებითი მიმართება R' და შებრუნებული მიმართება R^{-1}.

(iii) უდრის თუ არა $(R')^{-1}$ მიმართება (დამატების შებრუნებული მიმართება) $(R^{-1})'$ მიმართებას (შებრუნებული მიმართების დამატებას)?

2. მოცემულია $A=\{a,b,c\}$ და $B=\{1,2\}$. რამდენი განსხვავებული მიმართება შეიძლება განისაზღვროს A-დან B-ში? რამდენი მათგანია ფუნქცია? ფუნქციათაგან რამდენია ზე-ფუნქცია? რამდენია ერთზე-ერთი? არსებობს თუ არა ფუნქცია, რომლის შებრუნებული მიმართება, კვლავ ფუნქციაა? – ჩამოაყალიბეთ იგივე სახის შეკითხვები მიმართებებზე და უპასუხეთ.

3. მოცემულია $A = \{1, 2, 3, 4\}$ სიმრავლეში განსაზღვრული მიმართებები:

$$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 3, 4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$$

(ა) განსაზღვრეთ კომპოზიციები $R_2 \bullet R_1$ და $R_1 \bullet R_2$. არის თუ არა მათ შორის ტოლობა?

(ბ) აჩვენეთ, რომ $R_1^{-1} \bullet R_1 \neq id_A$ და რომ $R_2^{-1} \bullet R_2 \not\subseteq id_A$.

4. 2-3 ნახაზზე განხილული F და G ფუნქციებისათვის აჩვენეთ, რომ:

(ა) $(G \bullet F)^{-1} = F^{-1} \bullet G^{-1}$

(ბ) (ა) ტოლობის მსგავს ტოლობებს ადგილი აქვს 2-6 ნახაზზე განხილული R და S მიმართებებისათვისაც.

თავი 3
მიმართებების თვისებები

3.1. რეფლექსურობა, სიმეტრიულობა, ტრანზიტულობა და ბმულობა

ორადგილიან მიმართებათა ზოგიერთ ხშირად გამოყენებად თვისებასთან იმდენჯერ გვიწევს ურთიერთობა, რომ ხელსაყრელი ხდება მათი სახელდება, რაც მათთვის სპეციალური სახელების შერჩევას გულისხმობს. ასეთებიდან ჩვენ განვიხილავთ **რეფლექსურობის**, **სიმეტრიულობის**, **ტრანზიტულობის** და **ბმულობის** თვისებებს. შევნიშნოთ, რომ ეს თვისებები განიხილება მხოლოდ ერთ რაიმე A სიმრავლეში განსაზღვრული A×A ტიპის მიმართებებისათვის და რომ ისინი განსხვავებულ A და B სიმრავლეებს შორის არსებული A×B ტიპის ორადგილიანი მიმართებებისათვის არ განისაზღვრება.

რეფლექსურობა:

განვიხილოთ ნებისმიერი A სიმრავლე და ამ A სიმრავლეში განსაზღვრული ნებისმიერი R მიმართება. განსაზღვრით, R არის **რეფლექსური** მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა A სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის დალაგებული წყვილი (x,x) არის R მიმართების წევრი.

განვიხილოთ სიმრავლე A={1,2,3} და ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული R_1={(1,1),(2,2),(3,3),(3,1)} და R_2={(1,1),(2,2)} მიმართებები. R_1 არის რეფლექსური, რადგან ის შეიცავს დალაგებულ წყვილებს (1,1), (2,2), (3,3). R_2={(1,1), (2,2)} მიმართება არ არის რეფლექსური, რადგან დალაგებული წყვილი (3,3) არ არის მისი წევრი. ამგვარად, R_2 მიმართება არ აკმაყოფილებს რეფლექსურობის განსაზღვრის იმ მოთხოვნას, რომლის მიხედვითაც A სიმრავლეში განსაზღვრული რეფლექსური მიმართება A სიმრავლის ნებისმიერი x წევრისათვის უნდა შეიცავდეს (x,x) სახის ყველა დალაგებულ წყვილს. რეფლექსურობის განსაზღვრის კიდევ ერთი გზა შემდეგია: A სიმრავლეში განსაზღვრული R მიმართება არის რეფლექსური მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა იგივე A სიმრავლეში განსაზღვრული id_A იგივურობის მიმართება R მიმართების ქვესიმრავლეა. ასე მაგალითად, მიმართება 'Xი არის დაბადებული იმავე დღეს, რა დღესაც Yი' ადამიანთა სიმრავლეში განსაზღვრული რეფლექსური მიმართებაა, რადგან ნებისმიერი ვინმე დაბადებულია იმავე დღეს, რა დღესაც თავად იგია დაბადებული.

მიმართებას, რომელიც არ არის რეფლექსური, ეწოდება **არარეფლექსური**. მაგრამ, თუ ამავდროულად, ის არ შეიცავს (x,x) სახის არცერთ დალაგებულ წყვილს ანუ არცერთ წყვილს ერთი და იგივე პირველი და მეორე წევრებით, მაშინ მიმართებას **ირეფლექსურს** უწოდებენ. R_3={(1,2),(3,2)} არის ზემომოყვანილ A სიმრავლეში ირეფლექსური მიმართების მაგალითი. ირეფლექსურობა უფრო მკაცრი პირობაა, ვიდრე არარეფლექსურობა, რადგან ყოველი ირეფლექსური მიმართება არის არარეფლექსური, მაგრამ არა პირიქით. მიმართება 'Xი არის Yზე უფრო მაღალი' ადამიანთა სიმრავლეში არის ირეფლექსური, რაც თავისთავად იმასაც ნიშნავს, რომ იგი არარეფლექსურიცა. თუმცა, მიმართება 'Xი არის Yის ფინანსური მხარდამჭერი' არარეფლექსურია, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, იგი არ არის ირეფლექსური,

რადგან ზოგიერთი ადამიანი შეიძლება ფინანსურად თვითონვე იყოს თავისი თავის მხარდამჭერი. შევნიშნოთ, რომ A სიმრავლეში განსაზღვრული R მიმართება არარეფლექსურია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $id_A \not\subset R$ და ირეფლექსურია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $R \cap id_A = \varnothing$.

სიმეტრიულობა:

მოცემულია ნებისმიერი A სიმრავლე და ამ A სიმრავლეში განსაზღვრული ნებისმიერი R მიმართება. განსაზღვრით, R არის **სიმეტრიული** მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა R მიმართების თითოეული (x,y) წყვილისთვის, (y,x) წყვილიც ასევე R მიმართების წევრია. მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ ეს განსაზღვრება არ ითხოვს $A \times A$ დეკარტული ნამრავლის ყოველი დალაგებული წყვილისთვის იმას, რომ ის R მიმართების წევრი იყოს. ამ განსაზღვრებით R მიმართების სიმეტრიულობისათვის საკმარისია ის, რომ R მიმართებაში მყოფ ნებისმიერ დალაგებული წყვილთან ერთად R მიმართებაში იყოს აგრეთვე ამ წყვილის შებრუნებული წყვილიც.

ქვემოთ წარმოდგენილია {1,2,3} სიმრავლეში განსაზღვრული სიმეტრიული მიმართებების რამდენიმე მაგალითი:

(3-1) {(1,2), (2,1), (3,2), (2,3)}
{(1,3), (3,1)}
{(2,2)}

{(2,2)} სიმეტრიული მიმართებაა, რადგან ამ მიმართებაში შემავალ თითოეულ დალაგებულ წყვილთან ერთად (ე.ი. (2,2) წყვილთან ერთად) ამ წყვილის შებრუნებული წყვილი, ანუ მისი პირველი და მეორე წევრების გადაადგილებით მიღებული დალაგებული წყვილი (ე.ი ისევ იგივე (2,2) წყვილი), ასევე ამ მიმართების წევრია.

′Xი ნათესავია Yის′ არის ადამიანთა სიმრავლეში განსაზღვრული სიმეტრიული მიმართების მაგალითი. თუ R მიმართების ერთი მაინც (x,y) წყვილისთვის მისი შებრუნებული (y,x) წყვილი არ არის R მიმართებაში, მაშინ R **არასიმეტრიული** მიმართებაა. მიმართება ′Xი არის Yის და′ ადამიანთა სიმრავლეში განსაზღვრული არასიმეტრიული მიმართებაა, მაგრამ თუ იგივე მიმართებას განვიხილავთ ქალთა სქესის ადამიანთა სიმრავლეზე, მაშინ ის სიმეტრიულია.

შემდეგი მიმართებები {1,2,3} სიმრავლეში განსაზღვრული არასიმეტრიული მიმართებებია:

(3-2) {(2,3), (1,2)}
{(3,3), (1,3)}
{(1,2), (2,1), (2,2), (1,1), (2,3)}

R მიმართებას უწოდებენ **ასიმეტრიულს**, თუ R მიმართების არცერთი (x,y) წყვილისთვის წყვილი (y,x) არ არის R მიმართებაში. მიმართება ′Xი უფროსია Yზე′ დღეს არსებულ ადამიანთა სიმრავლეში განსაზღვრული ასიმეტრიული მიმართებაა. იქიდან გამომდინარე, რომ ასიმეტრიულობის განსაზღვრებაში არ არის მოთხოვნა x და y ელემენტების განსხვავებულობაზე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი ასიმეტრიული მიმართება ამავდროულად ირეფლექსურია. ქვემოთ მოყვანილია {1,2,3} სიმრავლეში ასიმეტრიული მიმართებების მაგალითები:

(3-3) {(2,3), (1,2)}

{(1,3), (2,3), (1,2)}
{(3,2)}

R მიმართებას უწოდებენ **ანტი-სიმეტრიულს,** თუ ნებისმიერი (x,y) და (y,x) წყვილებიდან ორივენი მხოლოდ მაშინ არიან R მიმართებაში, როცა x=y. ეს განსაზღვრება გვეუბნება მხოლოდ იმას, რომ თუ (x,y) და (y,x) წყვილები არიან R მიმართებაში, მაშინ x და y არიან ერთი და იგივენი. აქ არ არის მოთხოვნილი, რომ (x,x) წყვილი ეკუთვნოდეს R მიმართებას A სიმრავლის ყოველი, ან თუნდაც რომელიმე x ელემენტისთვის. - ანუ, მიმართებას არ ჭირდება იყოს რეფლექსური, იმისათვის, რომ იყოს ანტი-სიმეტრიული.

შემდეგნი არიან {1,2,3} სიმრავლეში განსაზღვრული ანტი-სიმეტრიული მიმართებები:

(3-4) {(2,3), (1,1)}
{(1,1), (2,2)}
{(1,2), (2,3)}

ტრანზიტულობა:

R მიმართება არის ტრანზიტული მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა (x,y) და (y,z) დალაგებულ წყვილებთან ერთად R მიმართებაშია (x,z) დალაგებული წყვილიც.

ვინაიდან განსაზღვრება არ ითხოვს x, y და z ელემენტების განსხვავებულობას, მომდევნო (3-5) მიმართება, იმის გათვალისწინებით, რომ x=y=z=2, აკმაყოფილებს ტრანზიტულობის პირობას,

(3-5) {(2,2)}

(3,6) მიმართება არ არის ტრანზიტული, რადგან, მიუხედავად იმისა, რომ (3,2) და (2,3) ამ მიმართების წევრები არიან, (3,3) არ არის მისი წევრი.

(3,6) {(2,3), (3,2), (2,2)}

ქვემოთ არის წარმოდგენილი ტრანზიტული მიმართებების კიდევ რამდენიმე მაგალითი:

(3-7) {(1,2), (2,3), (1,3)}
{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)}
{(1,2), (2,3), (1,3), (3,2), (2,1), (3,1), (1,1), (2,2), (3,3)}

'Xი წინაპარია Yის' ადამიანთა სიმრავლეში განსაზღვრული ტრანზიტული მიმართებაა. თუ მიმართება არ აკმაყოფილებს ტრანზიტულობის მოთხოვნებს, ანუ თუ მიმართება არ არის ტრანზიტული, მაშინ ის იწოდება **არატრანზიტულად**. R მიმართებას უწოდებენ **ინტრანზიტულს,** თუ R მიმართება არცერთ (x,y) და (y,z) წყვილთან ერთად არ შეიცავს (x,z) წყვილს. ასე მაგალითად, მიმართება 'Xი დედაა Yის' ადამიანთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ინტრანზიტული მიმართებაა.

(3-6), ისევე როგორც მომდევნო ორი მიმართება, არატრანზიტული მიმართებებია.

(3-8) {(1,2), (2,3)}
{(1,2), (2,3), (1,3), (3,1)}

(3-8) მიმართებებიდან პირველი მიმართება, ისევე როგორც მომდევნო ორი მიმართება, ინტრანზიტული მიმართებებია.

(3-9) {(3,1), (1,2), (2,3)}
{(3,2), (1,3)}

ბმულობა:

A სიმრავლეში განსაზღვრული R მიმართება არის **ბმული** მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა A სიმრავლის ყოველი ორი განსხვავებული x, y წევრისათვის სამართლიანია ის, რომ (x,y) და (y,x) წყვილებიდან ერთი მაინც R მიმართების შემადგენელია.

შევნიშნოთ, რომ ბმულობის განსაზღვრება, ისევე როგორც რეფლექსურობის განსაზღვრება, მიემართება A სიმრავლის ყველა წევრს. გარდა ამისა, განსაზღვრებაში ნახსენები (x,y) და (y,x) წყვილებისგან ცალსახად მოითხოვება ის, რომ მათი პირველი და მეორე წევრები ერთმანეთისგან განსხვავდებოდნენ. მიუხედავად ამისა, ბმულობის მიმართებაში არ იკრძალება (x,x) ფორმის წყვილების არსებობა, თუმცა ისინი არაძალისმიერნი არიან მიმართების ბმულობის საკითხისათვის.

მომდევნო მიმართებები {1,2,3} სიმრავლეში ბმული მიმართებები არიან:

(3-10) {(1,2), (3,1), (3,2)}
{(1,1), (2,3), (1,2), (3,1), (2,2)}

შემდეგი მიმართებები, რომლებიც {1,2,3} სიმრავლეში არ აკმაყოფილებენ ბმულობის მოთხოვნებს არიან **არაბმული**:

(3-11) {(1,2), (2,3)}
{(1,3), (3,1), (2,2), (3,2)}

ქვემოთ, რეფლექსურობის, სიმეტრიულობის, ტრანზიტულობის და ბმულობის თვალსაზრისებით განვიხილავთ პრედიკატული განსაზღვრებებით მოცემულ რამდენიმე მიმართებას.

(3-12) მაგალითი: R_f სიმბოლოთი აღვნიშნოთ 'Xი მამაა Yის' ფრაზით ადამიანთა H სიმრავლეში განსაზღვრული ორადგილიანი მიმართება. R_f არის ირეფლექსური (არავინ არ არის თავისი თავის მამა), ასიმეტრიული (თუ 'xი მამაა yის' ჭეშმარიტია, მაშინ 'yი მამაა xის' დაუშვებელია იყოს ჭეშმარიტი), ინტრანზიტული (თუ 'xი მამაა yის' და თუ 'yი მამაა zის', მაშინ, ცხადია, 'xი არის ბაბუა zისა და არა მამა') და არაბმული (H სიმრავლეში არის ისეთი განსხვავებული x და y ინდივიდები, რომ არც 'xი მამაა yის' და არც 'yი მამაა xის' არ არის ჭეშმარიტი).

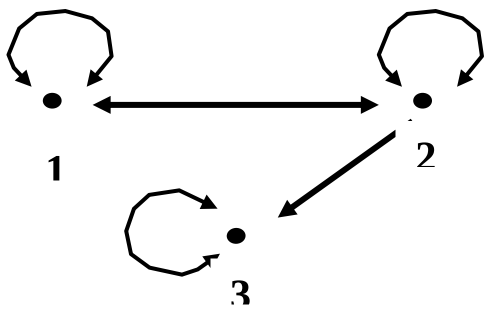
(3-13) მაგალითი: R სიმბოლოთი აღვნიშნოთ 'Xი მეტია Yზე' ფრაზით ყველა დადებით მთელ რიცხვთა Z={1,2,3,4...} სიმრავლეში განსაზღვრული მიმართება. Z სიმრავლე, ისევე როგორც R სიმრავლე, შეიცავს წევრების უსასრულო რაოდენობას, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, მთელი რიცხვების თვისებებზე დაყრდნობით ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ R მიმართების გარკვეული თვისებები. R არის ირეფლექსური (არც ერთი რიცხვი არ არის თავის თავზე მეტი),

ასიმეტრიული (თუ ‘Xი მეტია Yზე’ ჭეშმარიტია, მაშინ ცხადია, რომ ‘Yი მეტია Xზე’ არ არის ჭეშმარიტი), ტრანზიტული (თუ $x>y$ და $y>z$, მაშინ $x>z$) და ბმული (მთელი x და y რიცხვების ყოველი განსხვავებული წყვილისათვის ან $x>y$ ან $y>x$).

(3-14) მაგალითი: R_a სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ცოცხალ ადამიანთა H სიმრავლეში ‘xი არის იმდენივე წლის რამდენისაც yი’ ფრაზით განსაზღვრული მიმართება. R_a არის რეფლექსური (ყოველი ადამიანი არის იმდენივე წლის რამდენი წლისაც თვითონ არის), სიმეტრიული (თუ xი არის იმდენივე წლის რამდენისაც არის yი, მაშინ yი არის იმდენივე წლის რამდენისაც არის xი), ტრანზიტული (თუ xი და yი არიან ერთი და იგივე ასაკის და ასევე არიან yი და zი, მაშინ xი არის იმდენივე წლის რამდენისაც არის zი) და არაბმული (H სიმრავლეში არიან განსხვავებული ადამიანები, რომლებიც არ არიან ერთი და იმავე ასაკის).

3.2. მიმართებების დიაგრამები

რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის ცნებების უკეთ გააზრებაში ხელს შეგვიწყობს მათი დიაგრამული გამოსახვა. დიაგრამებზე განსახილველი სიმრავლეების წევრები მოიცემიან ნატურალური რიცხვებით გადანომრილი წერტილებით. გასაგებია, რომ მათი რაიმეგვარი სპეციალური მონიშვნა ამ შემთხვევაში არამიზნობრივია. ამასთან, ის, რომ სიმრავლის რაიმე x წერტილი მიმართულია (ე.ი. დაწყვილებულია) სიმრავლის y წერტილთან ანუ ის, რომ $\langle x,y\rangle\in R$, დიაგრამაზე გამოისახება x წერტილიდან y წერტილისკენ მიმართული ისრით. მაგალითად,



ნახ. 3.1 R მიმართების დიაგრამა

ნახაზი 3.1 წამოგვიდგენს მიმართებას

$$R=\{(1, 2), (2,1), (2,2), (1,1), (2,3), (3,3)\}$$

დიაგრამიდან ცხადად ჩანს, რომ მიმართება არის რეფლექსური, რადგანაც თითოეულ წერტილს თან ახლავს მარყუჟი და რომ იგი არასიმეტრიულია, რადგანაც 3-ი არ არის მისგან მიმართული ისრით დაკავშირებული 2-თან, მაშინ როდესაც 2-ი ასეთი ისრით კავშირდება 3-თან. ამ მიმართებას ვერ ვუწოდებთ ვერც ასიმეტრიულს და ვერც ანტისიმეტრიულს, რადგან 1-იც დაკავშირებულია 2-თან და 2-იც დაკავშირებულია 1-თან. ეს მიმართება არატრანზიტულია, რადგან, მიუხედავად იმისა, რომ 1--ი უკავშირდება 2-ს და 2-ი უკავშირდება 3-ს, 1-ი არ არის დაკავშირებული 3-თან. მიმართება არ არის ინტრანზიტული მასში (1,1) წყვილის არსებობის გამო.

თუ მიმართება ბმულია, მაშინ დიაგრამაზე ნებისმიერი წერტილი ერთი მაინც პირდაპირი ისრით უნდა უკავშირდებოდეს ყველა დანარჩენ წერტილს. როგორც ვხედავთ, R არ არის ბმული, რადგანაც დიაგრამაზე წერტილები 1-ი და 3-ი პირდაპირი ისრით არ არიან დაკავშირებულნი ერთმანეთთან.

3.3. ინვერსიისა და დამატების თვისებები

დავუშვათ R არის მიმართება, რომელიც ხასიათდება რეფლექსურობის, სიმეტრიულობის, ტრანზიტულობისა და ბმულობის თვისებებიდან ან მხოლოდ ერთით, ან ერთდროულად რამდენიმეთი. ქვემოთ განიხილულია ის, თუ რა თვისებებით შეიძლება ხასიათდებოდეს ზემოგანხილული სახის გარკვეული კონკრეტული R მიმართებისგან ინვერსიისა და დამატების ოპერაციებით მიღებული R^{-1} და R' მიმართებები.

1. ვთქვათ R არის A სიმრავლეში განსაზღვრული რაიმე რეფლექსური მიმართება. რეფლექსურობის თვისების განსაზღვრიდან, A სიმრავლის ყოველი $x \in A$ წევრისათვის $(x,x) \in R$. აქედან გამომდინარე, რადგანაც R^{-1} მიმართება R მიმართების თითოეული დალაგებული წყვილისთვის შეიცავს ამ წყვილის პირველი და მეორე წევრების გადანაცვლებით მიღებულ დალაგებულ წყვილსაც, ცხადია, რომ $A \times A$ სიმრავლის ნებისმიერი (x,x) წყვილი არის როგორც R, ისე R^{-1} მიმართების წევრი. ამგვარად, დასაბუთდა, რომ რეფლექსური R მიმართების ინვერსიული ანუ შებრუნებული მიმართება აგრეთვე რეფლექსური მიმართებაა. რაც შეეხება R მიმართების დამატებით R' მიმართებას, განსაზღვრით, იგი შეიცავს $A \times A$ დეკარტული ნამრავლის ყველა ისეთ დალაგებულ წყვილს, რომელიც არ შედის R მიმართებაში. აქედან გამომდინარე, რადგანაც A სიმრავლის ნებისმიერი $x \in A$ წევრისათვის, R შეიცავს (x,x) სახის დალაგებულ წყვილს, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ R' არ შეიცავს არცერთ ასეთ წყვილს, რაც იმას ნიშნავს, რომ რეფლექსური მიმართების დამატებითი მიმართება ირეფლექსურია.

2. ვთქვათ R არის A სიმრავლეზე განსაზღვრული სიმეტრიული მიმართება. დავსვათ კითხვა: ხასიათდება თუ არა R' მიმართება იგივე თვისებით? - დავუშვათ, რომ R მიმართების R' დამატებითი მიმართება არ არის სიმეტრიული და ვნახოთ, რა მიიღება ამ დაშვებიდან. არასიმეტრიული მიმართების განსაზღვრებიდან გამომდინარე, თუ R' არ არის სიმეტრიული, მაშინ არსებობს ისეთი $(x,y) \in R'$, რომ $(y,x) \notin R'$. რადგან $(y,x) \notin R'$, უნდა დავასკვნათ, რომ (y,x) ეკუთვნის R' მიმართების დამატებას, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში თავად R მიმართებაა. მაგრამ, რადგან R არის სიმეტრიული, R მიმართებას (y,x) წყვილთან ერთად უნდა ეკუთვნოდეს (x,y) წყვილიც. ეს, იმის გათვალისწინებით, რომ ერთი და იგივე დალაგებული (x,y) წყვილი ერთდროულად შეუძლებელია იყოს R და R' მიმართებების წევრი, იძლევა წინააღმდეგობას. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ზემოთ გაკეთებული დაშვება შეუძლებელია იყოს ჭეშმარიტი და რომ ნებისმიერი R სიმეტრიული მიმართების R' დამატებითი მიმართება ასევე სიმეტრიულია. ამგვარად, თუ R არის A სიმრავლეში განსაზღვრული რაიმე სიმეტრიული მიმართება, მაშინ R მიმართების დამატებითი R' მიმართება აგრეთვე სიმეტრიულია და პირიქით. გასაგებია, რომ ამ პირიქითი შემთხვევის მტკიცება მიიღება ზუსტად იგივე მსჯელობაში R და R' გამოსახულებების ურთიერთ ჩანაცვლებით. ზემოგანხილული არის საწინააღმდეგოს დაშვების გზით მტკიცების ერთი მაგალითი. მტკიცების ამ მეთოდს ლოგიკაში წინააღმდეგობამდე მიყვანის ანუ reductio ad absurdum მეთოდს უწოდებენ. ეს მეთოდი ხასიათდება ისეთი დაშვების გაკეთებით, რომელსაც დასამტკიცებელი დებულების ჭეშმარიტების შემთხვევაში მცდარ დასკვნამდე მივყავართ. შესაბამისად ამისა, ამგვარი დაშვების საფუძველზე უკვე მიღებული მცდარი ანუ წინააღმდეგობრივი დასკვნა საშუალებას იძლევა უარვყოთ დაშვებული და დავასკვნათ დასამტკიცებელი. მეექვსე თავში ჩვენ გავეცნობით გამოყვანების ანუ

მტკიცებების სხვადასხვა წესებს, რომელთა მეშვეობით ჩვენ შევძლებთ ავაგოთ გამოყვანები სრული მათემატიკური სიზუსტეების გათვალისწინებით.

3-2 ცხრილით შეფასებულია R არაცარიელი მიმართებისგან ინვერსიის და დამატების ოპერაციებით მიღებული R^{-1} და R' მიმართებები მიმართებათა ძირითადი თვისებების შენარჩუნების თვალსაზრისით. ცხრილის შემადგენელი თითოეული წესი შეიძლება დამტკიცდეს შესაბამისი ცნებათა განსაზღვრებებისა და სიმრავლეთა თეორიის კანონების საფუძველზე. თუმცა, რადგან ჯერ არ განგვიხილია დამტკიცების ფორმალური ცნება, ჩვენ აქ არ გთავაზობთ მათ მკაცრ, მათემატიკურ დამტკიცებებს. მიუხედავად ამისა, კარგი იქნება თუ შეეცდებით არაფორმალური საშუალებებით დარწმუნდეთ ხაზთა გასწვრივ მოცემული კანონების სისწორეში. ამ თვალსაზრისებით ისინი კარგი სავარჯიშოებია თქვენი ცოდნის შესამოწმებლად.

R (არა ∅)	R^{-1}	R'
რეფლექსური	რეფლექსური	ირეფლექსური
ირეფლექსური	ირეფლექსური	რეფლექსური
სიმეტრიული	სიმეტრიული ($R^{-1} = R$)	სიმეტრიული
ასიმეტრიული	ასიმეტრიული	არა-სიმეტრიული
ანტისიმეტრიული	ანტისიმეტრიული	დამოკიდებულია R – ზე
ტრანზიტული	ტრანზიტული	დამოკიდებულია R – ზე
ინტრანზიტული	ინტრანზიტული	დამოკიდებულია R – ზე
ბმული	ბმული	დამოკიდებულია R – ზე

ცხრილი 3-2: მიმართების ძირითადი თვისებების შენახვის ცხრილი
მათზე ინვერსიისა და დამატების ოპერაციებით მოქმედებისას

3.4. ეკვივალენტობის მიმართება და დაყოფა

ეკვივალენტობის (ერთიდაიგივეობის) მიმართება მიმართებების განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანი კლასია. მიმართება იწოდება **ეკვივალენტობის ანუ (ერთიდაიგივეობის) მიმართებად** თუ იგი ერთდროულად არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული. ტოლობის მიმართება ეკვივალენტობის მიმართების ყველაზე კარგად ცნობილი მაგალითია. 'Xს აქვს იმავე ფერის თმა, რაც Yს' და 'Xი არის იმავე ასაკის, რა ასაკისაც არის Yი' ეკვივალენტობის მიმართების მაგალითებია. ეკვივალენტობის მიმართებები ძირითადად გამოიყენება სიმრავლეების დასაყოფად ისეთ ურთიერთ არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად, რომელთა წევრები ამ მიმართებით ერთი და იგივენი ანუ ეკვივალენტურნი არიან.

ყოველი კონკრეტული ეკვივალენტობის მიმართებით სიმრავლე, რომელშიც ეს მიმართებაა განსაზღვრული, ბუნებრივად იყოფა ურთიერთ არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად. რომლებსაც ამ სიმრავლეში ამ მიმართებით განსაზღვრულ ეკვივალენტობის ანუ ერთიდაიგივეობის კლასებს უწოდებენ. ნებისმიერი R ეკვივალენტობის მიმართებისათვის, [[x]] გამოსახულებით აღინიშნება ყველა ისეთი y შემადგენლების სიმრავლე, რომელთათვისაც $(x,y)\in R$. ამგვარად, თუ R არის ეკვივალენტობის მიმართება, მაშინ [[x]] არის ამ R მიმართებითა და x შემადგენლით მოცემადი ეკვივალენტობის კლასი. მიმართება 'Xი არის იმავე ასაკის, რა ასაკისაც არის Yი' ადამიანთა სიმრავლეს წლოვანების მიხედვით ყოფს ასაკობრივ ჯგუფებად, რაც საბოლოო ჯამში ერთი და იგივე წლოვანების ადამიანთა სიმრავლეებს ეკვივალენტობის სხვადასხვა კლასებად აყალიბებს. ცხადია, რომ ეს განსხვავებული ასაკობრივი ჯგუფები ანუ ეკვივალენტობის ეს

განსხვავებული კლასები ურთიერთ არაგადამკვეთ სიმრავლეებს წარმოადგენენ, რადგანაც თითოეული პიროვნება შეიძლება იყოს მხოლოდ ერთი, მისთვის დამახასიათებელი ასაკისა და, შესაბამისად, ეკუთვნოდეს მხოლოდ ერთ, ამ ასაკით განსაზღვრულ ეკვივალენტობის კლასს მიუხედავად იმისა, ამ ასაკის ადამიანები რამდენიმეა, თუ მხოლოდ ერთი. – ამ უკანასკნელ შემთხვევაში, ცხადია, რომ მხოლოდ ამ ერთი ადამიანით ყალიბდება მისი ასაკის შესაბამისი ეკვივალენტობის კლასი. სიმრავლის დანაწევრებას ამ სიმრავლის ისეთ არაცარიელ ურთიერთ არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად, რომელთა გაერთიანება მთლიანად ფარავს პირველსაწყის სიმრავლეს, სიმრავლის **დაყოფას** უწოდებენ.

ამგვარად, A სიმრავლის **დაყოფა** არის A სიმრავლის არაცარიელი ქვესიმრავლეების ისეთი ერთობლიობა, რომ (1) ამ ერთობლიობის ყოველი ორი განსხვავებული X და Y ქვესიმრავლესთვის $X \cap Y = \varnothing$ და (2) ამ ერთობლიობის შემადგენელი ქვესიმრავლეების გაერთიანება A სიმრავლის ტოლია. დაყოფის ცნება არ განისაზღვრება და არ გაიგება ცარიელი სიმრავლისათვის. სიმრავლის ქვესიმრავლეები, რომლებიც ამ სიმრავლის დაყოფის წევრები არიან, ამ დაყოფის უჯრედებად იწოდებიან.

მაგალითისათვის განვიხილოთ $A=\{a, b, c, d, e\}$ სიმრავლე. $P=\{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ არის A სიმრავლის სამუჯრედიანი დაყოფა, რადგან $\{a, c\} \cap \{b, e\}=\varnothing$, $\{d\} \cap \{b, e\}=\varnothing$, $\{a, c\} \cap \{d\}=\varnothing$ და, ამავდროულად, $\cup\{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}=A$.

მომდევნო სიმრავლეები არიან იგივე A სიმრავლის დაყოფები:

(3-15) $P_1=\{\{a,c,d\}, \{b,e\}\}$
$P_2=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$
$P_3=\{\{a, b, c, d, e\}\}$

P_3 არის A სიმრავლის ტრივიალური დაყოფა. ამ დაყოფით A სიმრავლე მხოლოდ ერთ სიმრავლედ იყოფა. შევნიშნოთ, რომ ამ ტიპის ტრივიალური დაყოფებიც აკმაყოფილებს დაყოფის განსაზღვრებას.

მომდევნო სიმრავლეები არ არიან A სიმრავლის დაყოფები:

(3-16) $C=\{\{a, b, c\}, \{b, d\}, \{e\}\}$
$D=\{\{a\}, \{b, e\}, \{c\}\}$

C სიმრავლე არ აკმაყოფილებს დაყოფის განსაზღვრებას, რადგან $\{a,b,c\} \cap \{b,d\} \neq \varnothing$. არც D სიმრავლე წარმოადგენს A სიმრავლის დაყოფას, რადგან $\cup\{\{a\},\{b,e\},\{c\}\} \neq A$.

აღსანიშნავია მჭიდრო ორმხრივი კავშირი სიმრავლეების სხვადასხვა დაყოფებსა და იგივე სიმრავლეებზე განსაზღვრულ ეკვივალენტობის სხვადასხვა მიმართებებს შორის. მართლაც, A სიმრავლის ნებისმიერი დაყოფისთვის, $R=\{(x,y)$ / x და y არიან მოცემული დაყოფის ერთი და იგივე უჯრედში$\}$ არის A სიმრავლეში განსაზღვრული ეკვივალენტობის მიმართება. ამავდროულად, A სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი R ეკვივალენტობის მიმართებისთვის, არსებობს A სიმრავლის ისეთი დაყოფა, რომლისთვისაც A სიმრავლის ნებისმიერი ორი x და y წევრი ერთსა და იმავე უჯრედშია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა x და y ამ R მიმართებით ურთიერთ დაკავშირებულნი არიან. ამგვარად, ნებისმიერი R მიმართებით A სიმრავლეში განსაზღვრული ეკვივალენტობის კლასები არიან ამავე R მიმართებით A სიმრავლეზე განსაზღვრული დაყოფის უჯრედები. A სიმრავლეზე განსაზღვრული ეკვივალენტობის მიმართება ზოგჯერ A სიმრავლის დაყოფის წარმომქმნელადაც იწოდება.

მაგალითისთვის განვიხილოთ სიმრავლე $A=\{1,2,3,4,5\}$ და ეკვივალენტობის მიმართება

(3-17) R={(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(5,2),(2,5)}

რომლის რეფლექსურობასა, სიმეტრიულობასა და ტრანზიტულობაში მკითხველი მარტივად დარწმუნდება. ამ მიმართებაში 1 და 3, ისევე როგორც 2, 4 და 5 ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან ყველა შესაძლო გზით, მაგრამ პირველი ჯგუფის არცერთი წევრი არ უკავშირდება მეორე ჯგუფის არცერთ წევრს. მაშასადამე, R, როგორც ეკვივალენტობის მიმართება, განსაზღვრავს ეკვივალენტობის კლასებს {1,3} და {2,4,5} და, შესაბამისად, წარმოქმნის A სიმრავლის დაყოფას.

(3-18) P_R={{1, 3}, {2, 4, 5}}

ახლა ვთქვათ, პირიქით, მოცემულია A სიმრავლის შემდეგი Q დაყოფა.

(3-19) Q={{1, 2}, {3, 5}, {4}}

R_Q მიმართება, რომელიც შედგება მხოლოდ ისეთი (x,y) წყვილებისაგან, რომელთათვისაც ეს x და y არიან Q დანაწევრების ერთი და იგივე უჯრედის წევრები და რომელიც სიმრავლურად შემდეგნაირად გამოისახება

(3-20) R_Q={(1, 1), {1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,5), (5,3), (5,5), (4,4)}

არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული და, ამდენად, ის A სიმრავლეზე განსაზღვრული ეკვივალენტობის მიმართებაა.

'Xი იმავე კონტინენტზეა, რომელზეცაა Yი' ფრაზით A={საფრანგეთი, ჩილე, ნიგერია, ეკვადორი, ლუქსემბურგი, ზამბია, განა, სან მარინო, ურუგვაი, კენია, უნგრეთი} სიმრავლეზე განისაზღვრება ეკვივალენტობის მიმართება, რომლითაც A იყოფა შემდეგ სამ ეკვივალენტობის კლასად: (1) A_1={საფრანგეთი, ლუქსემბურგი, სან მარინო, უნგრეთი} (2) A_2={ჩილე, ეკვადორი, ურუგვაი} და (3) A_3={ნიგერია, ზამბია, განა, კენია}.

3.5 დალაგება

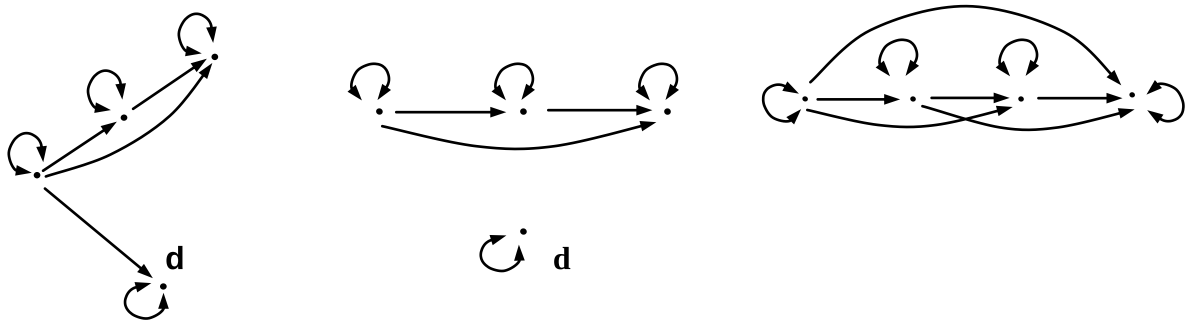
დალაგება ეწოდება ისეთ ორადგილიან მიმართებას, რომელიც ტრანზიტულია და დამატებით არის ან (i) რეფლექსური და ანტისიმეტრიული, ან (ii) ირეფლექსური და ასიმეტრული. პირველ შემთხვევაში დალაგება იწოდება არამკაცრ (ანუ სუსტ), მეორე შემთხვევაში კი - მკაცრ (ანუ ძლიერ) დალაგებად.

მაგალითისთვის განვიხილოთ A={a,b,c,d} სიმრავლე. შემდეგი მიმართებებიდან თითოეული A სიმრავლეზე განსაზღვრული არამკაცრი დალაგებაა:

(3-21) R_1={(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d}
R_2={(c,b), (c,a), (b,a), (b,b), (a,a), (c,c), (d,d)}
R_3={(d,c), (d,b), (d,a), (c,b), (c,a), (b,a), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d)}

ეს დალაგებები მიმართებითი დიაგრამებით გამოსახულია 3-3 ნახაზზე, რისი მეშვეობითაც მარტივად დავრწმუნდებით, რომ თითოეული მათგანი ნამდვილად რეფლექსური, ანტისიმეტრიული და ტრანზიტულია.

c
d c b a
b c b a

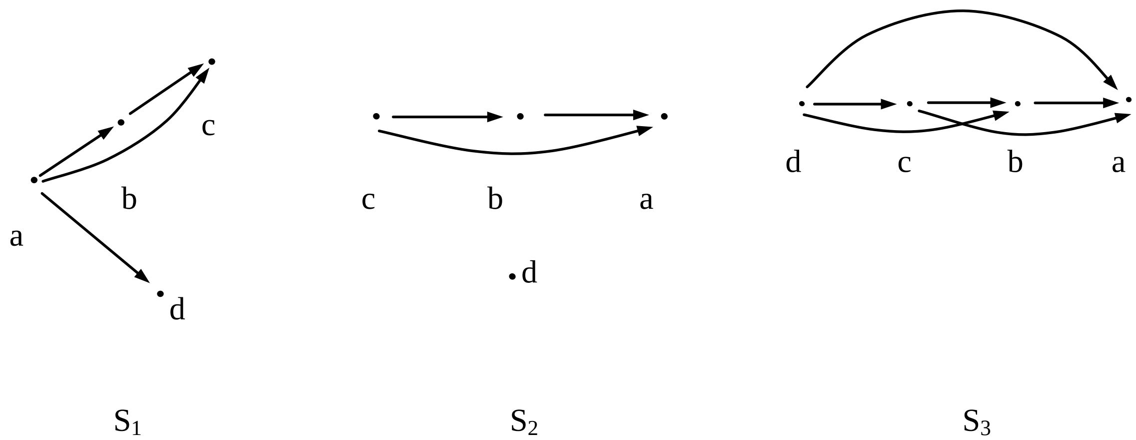


ნახაზი 3-3: (3-21) ტოლობებით მოცემული არამკაცრი დალაგებების დიაგრამები

ამ არამკაცრ R_1, R_2 და R_3 დალაგებებს ბუნებრივად შეესაბამება ქვემოთ განხილულ მკაცრი S_1, S_2 და S_3 დალაგებები:

(3-22) S_1={(a,b), (a,c), (a,d), (b,c)}
S_2={(c,b), (c,a), (b,a)}
S_3={(d,c), (d,b), (d,a), (c,b), (c,a), (b,a)}

ცხადია, რომ თითოეული მათგანი მიიღება შესაბამისი სუსტი მიმდევრობისგან ყველა (x,x) სახის წყვილის ამოგდებით. პირიქით, ნებისმიერი მკაცრი მიმართების შესაბამისი არამკაცრი მიმართების მისაღებად საკმარისია ამ მკაცრ მიმართებას დავუმატოთ (x,x) სახის ყველა წყვილი A სიმრავლეში არსებული ნებისმიერი x ელემენტისათვის.



ნახაზი 3-4: (3-22) ტოლობებით მოცემული მკაცრი დალაგებების დიაგრამები

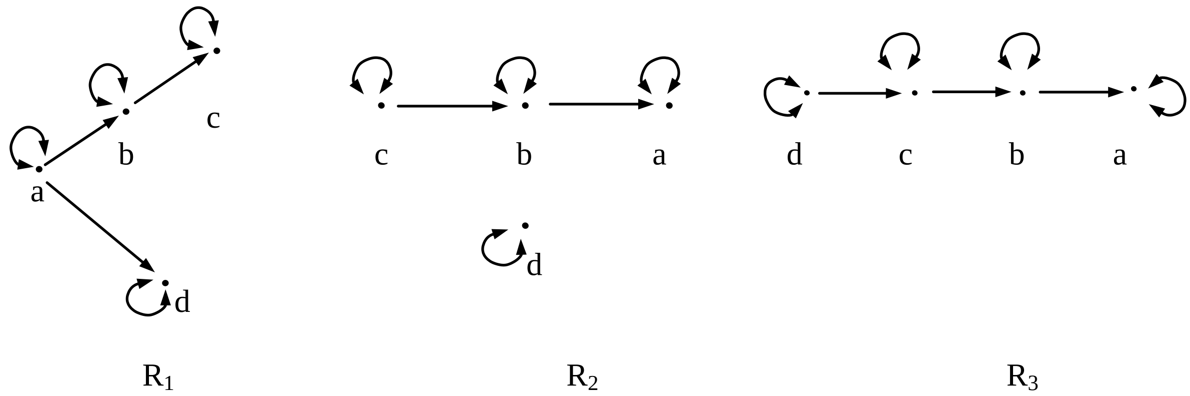
არამკაცრი დალაგების მიმართების კიდევ ერთ მაგალითად განვიხილოთ სიმრავლეთა ნებისმიერ C სიმრავლეში $R=\{(X,Y) \setminus X\subseteq Y\}$ ტოლობით განსაზღვრული მიმართება. ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ქვესიმრავლეობის მიმართება არის ტრანზიტული და რეფლექსური. იგი არის ამავდროულად ანტისიმეტრიული, რადგანაც ნებისმიერი X და Y სიმარვლეებისათვის, იქიდან, რომ $X\subseteq Y$ და $Y\subseteq X$ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ X=Y (ეს დამტკიცდება მეშვიდე თავში). ამ არამკაცრი დალაგების შესაბამისი მკაცრი დალაგებაა 'Xი არის Yის საკუთრივი ქვესიმრავლე'.

ადრე, (3-13) მაგალითში, ვნახეთ, რომ მიმართება 'Xი მეტია Yზე' დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეში არის ირეფლექსური, ასიმეტრიული და ტრანზიტული. აქედან

გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ იგი მკაცრი დალაგების მიმართებაა. (შეკითხვა: რა მიმართებით განისაზღვრება შესაბამისი არამკაცრი დალაგება?)

ზოგიერთი ტერმინოლოგიური შეთანხმება: ვთქვათ R არის დალაგება, ან მკაცრი ან არამკაცრი, და $(x,y)\in R$. ამასთან, დავუშვათ ისიც, რომ ეს x და y ერთი და იგივე სიმრავლის განსხვავებული შემადგენლებია (წევრებია). ასეთ შემთხვევაში ერთი და იგივე შინაარსობრივი დატვირთვებით ითქმება, რომ (R მიმართებით ანუ R მიმართების მიხედვით) 'xი არის yის წინმსწრები', ან რომ 'xი არის yის წინამდებარე', ან რომ 'xი არის yის წინაპარი' ან რომ 'yი არის xის შემდგომი', ან რომ 'yი არის xის მემკვიდრე'. ეს გამოთქმები ურთიერთ ეკვივალენტური ტერმინებია. დავუშვათ, xი არის yის წინმსწრები და, ამასთან, $x\neq y$. მაშინ, თუ არ არსებობს xისა და yისაგან განსხვავებული ისეთი zი, რომ xი არის zის წინმსწრები და, ამავდროულად, zი არის yის წინმსწრები, ვამბობთ, რომ 'xი არის yის უშუალო წინმსწრები', ან რომ 'xი არის yის უშუალო წინამდებარე', და ა.შ., ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, xი არის yის უშუალო წინმსწრები, თუ დალაგებაში xსა და yს შორის არ არსებობს სხვა რაიმე წევრი იმ სიმრავლისა, რომელზედაც ეს დალაგებაა განსაზღვრული. შევნიშნოთ, არცერთი სიმრავლის არცერთი შემადგენელი არ შეიძლება იქნეს გაგებული თავის თავის უშუალო წინამდებარედ, რადგანაც განსაზღვრებაში მოთხოვნილია x და y შემადგენლების განსხვავებულობა.

(3-21) და (3-22) მაგალითებით მოცემულ R_1 და S_1 დალაგებებში, b არის a და c შემადგენლებს შორის. ამიტომ, თუმცა a წინამორბედია cსი, a არ არის cს უშუალო წინამორბედი. R_2 და S_2 დალაგებებში, c არის უშუალო წინამორბედი bსი და b არის უშუალო წინამორბედი aსი.



ფიგურა 3-5
(3-21) დალაგებების უშუალო წინამორბედობრივი დიაგრამები

სიმრავლეში განსაზღვრული მკაცრი თუ არამკაცრი დალაგების მიმართების დიაგრამული გამოსახვა მარტივდება და უფრო გასაგებიც ხდება, თუ სიმრავლის წევრთან ისრით მხოლოდ მის უშუალო წინამორბედს დავაკავშირებთ. დარჩენილი კავშირები შეიძლება დადგინდეს გამომდინარე იქიდან, რომ მიმართება ტრანზიტულია. ამასთან, იმისათვის, რომ განვასხვავოთ ერთმანეთისაგან მკაცრი და არამკაცრი დალაგებები, უნდა დავაკვირდეთ მხოლოდ არამკაცრი დალაგებებისათვის დამახასიათებელ ე.წ. 'რეფლექსურ' მარყუჟებს. ამგვარად, თუ (3-21) მაგალითით მოცემული დალაგებების დიაგრამებს ავაგებთ ამგვარი გამარტივებული მიდგომებით მივიღებთ 3-5 ნახაზზე გამოსახულ ფიგურებს. გასაგებია, რომ შესაბამისი მკაცრი დალაგებების დიაგრამების მისაღებად საკმარისია თითოეული შემადგენლის თავზე არსებული რეფლექსურობის მარყუჟის მოშლა.

განვიხილოთ კიდევ რამდენიმე სასარგებლო და ხშირად გამოყენებადი ცნება, რომლებიც განისაზღვრებიან დალაგებათა განსაკუთრებული თვისებების მქონე წევრებისათვის. ვთქვათ მოცემულია A სიმრავლეზე განსაზღვრული რაიმე R დალაგება.

1. A სიმრავლის x წევრი იწოდება სიმრავლის მინიმალურ ანუ ქვეკიდურა წევრად მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა A სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი წევრი, რომელიც წინ უსწრებს xს (მაგ.: a წევრი R_1 და S_1 დალაგებებში; c და d წევრები R_2 და S_2 დალაგებებში; d წევრი R_3 და S_3 დალაგებებში).
2. A სიმრავლის x წევრი იწოდება სიმრავლის უმცირეს ანუ ქვეუკიდურეს წევრად მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა x წინ უსწრებს A სიმრავლის მისგან განსხვავებულ ყველა სხვა წევრს. (მაგ.: a წევრი R_1 და S_1 დალაგებებში; d წევრი R_3 და S_3 დალაგებებში).
3. A სიმრავლის x წევრი იწოდება სიმრავლის მაქსიმალურ ანუ ზეკიდურა წევრად მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა A სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი წევრი, რომელიც x წევრის შემდგომია (მაგ.: c და d წევრები R_1 და S_1 დალაგებებში; a და d წევრები R_2 და S_2 დალაგებებში; a წევრი R_3 და S_3 დალაგებებში).
4. A სიმრავლის x წევრი იწოდება სიმრავლის უდიდეს ანუ ზეუკიდურეს წევრად მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა x არის A სიმრავლის ყველა მისგან განსხვავებული წევრის შემდგომი (მაგ. a ელემენტი R_3 და S_3 დალაგებებში).

შევნიშნოთ, რომ a წევრი R_1 და S_1 დალაგებებში ერთდროულად არის როგორც ქვეკიდურა, ისე ქვეუკიდურესი წევრი, მაშინ როცა c და d წევრები იმავე დალაგებაში არიან ზეკიდურა, მაგრამ არა ზეუკიდურესი წევრები (მაგალითად, c არ არის d ელემენტის შემდგომი წევრი); d წევრი R_2 და S_2 დალაგებებისათვის ერთდროულად არის როგორც ქვეკიდურა, ისე ზეკიდურა წევრი, მაგრამ არ არის არც ზეუკიდურესი და არც ქვეუკიდურესი. (3-13) მაგალითში R მიმართებით განსაზღვრული დალაგებისათვის 1 არის როგორც ქვეკიდურა, ისე ქვეუკიდურესი წევრი (1 არის Z სიმრავლის ყველა დანარჩენი წევრის წინამდებარე და, შესაბამისად, Z სიმრავლეში ცხადია არ არსებობს მისი წინამდებარე), მაგრამ ამ დალაგებაში არ მოიძებნება მისი არც ზეკიდურა და არც ზეუკიდურესი წევრი. დააკვირდით იმას, რომ დალაგებებში გამოყენებულ ტერმინ ‘‘უდიდესის’’ შინაარსი არ არის აუცილებელი დაემთხვეს საშუალო სკოლიდან თქვენთვის ნაცნობ ტერმინ ‘‘უდიდესის’’ შინაარსს.

უმცირესი წევრი, თუ ასეთი საერთოდ არსებობს დალაგებაში, ერთადერთია (თუ დავუშვებდით ორი უმცირესი წევრის არსებობას, მაშინ თითოეულ მათგანი უნდა ყოფილიყო მეორის წინამდებარე, რაც დაარღვევდა ასიმეტრიასაც და ანტისიმეტრიასაც). გასაგებია, რომ ანალოგიურია ვითარება უდიდეს წევრთან დაკავშირებით. დალაგებაში მინიმალური, ისევე როგორც მაქსიმალური წევრი შეიძლება იყოს ერთზე მეტი (მაგ. c და d წევრები R_2 და S_2 დალაგებებში). თუმცა, შესაძლებელია ისიც, რომ დალაგებას არ ჰქონდეს არც ერთი მათგანი. ასე მაგალითად, დალაგებას „უფრო დიდი ვიდრე’’ განსაზღვრულს მთელ რიცხვთა {0, 1, -1, 2, -2, . . .} სიმრავლეზე არა აქვს არც მაქსიმალური (ე.ი. ზეკიდურა), არც მინიმალური (ე.ი. ქვეკიდურა), არც უდიდესი (ე.ი. ზეუკიდურესი) და არც უმცირესი (ე.ი. ქვეუკიდურესი) წევრი.

თუ მკაცრი ან არამკაცრი დალაგება ამავდროულად არის ბმული, მაშინ მას სრულ, ზოგჯერ კი წრფივ დალაგებას უწოდებენ. წრფივი დალაგების მაგალითებია ზემოთ განხილული R_3 და S_3 მიმართებები და R მიმართება (3-13) მაგალითიდან. მათი გამარტივებული დიაგრამები წარმოადგენენ ერთ მთლიან ჯაჭვში გაბმულ ელემენტებს. R_1 დალაგების დიაგრამა არ არის სრული, რადგან d და c არ უკავშირდებიან ერთმანეთს. ზოგჯერ, ავტორები, ნაცვლად ტერმინებისა დალაგება და დალაგებული სიმრავლე იყენებენ უფრო განზოგადებულ ტერმინებს ნაწილობრივი დალაგება და ნაწილობრივად დალაგებული

სიმრავლე, რაც არც ისე მოხერხებული ტერმინებია, რადგან, ამ შემთხვევაში, ზოგიერთი ნაწილობრივი დალაგება გამოდის სრული. მიუხედავად ამისა, ჩვენ, ზოგჯერ, ამ წიგნში სწორედ ამ ტერმინებით ვისარგებლებთ.

დასასრულს, ჩვენ შევეხებით ზოგიერთ ისეთ ცნებას, რომლებთანაც ხშირად მოგვიწევს ურთიერთობა დალაგებებთან დაკავშირებით. A სიმრავლე იწოდება R მიმართებით სავსებით დალაგებულ სიმრავლედ, თუ R არის A სიმრავლის სრული დალაგება და, გარდა ამისა, თუ A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეში მოიძებნება R დალაგების მიმართ უმცირესი ელემენტი. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა N={0,1,2,3,...} სიმრავლე ,,ნაკლებია'' მიმართებით სავსებით დალაგებული სიმრავლეა (ეს დალაგება სრული დალაგებაა და, ამასთან, N სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე ამ დალაგებით შეიცავს უმცირეს ელემენტს). რაც შეეხება მთელ რიცხვთა Z={0,1,-1,2,-2,...} სიმრავლეს, იგი იმავე მიმართებით სრულად არ ლაგდება, რადგან ნებისმიერი მთელი რიცხვისათვის არსებობს მასზე ნაკლები მთელი რიცხვი. აღსანიშნავია, რომ ყველა სასრული წრფივად დალაგებული სიმრავლე ამავდროულად სავსებით დალაგებულია.

A სიმრავლეზე განსაზღვრული R მიმართება მკვრივია, თუ ყოველი $(x,y)\in R$ $(x\neq y)$, წყვილისათვის არსებობს ისეთი $z\in A$, რომ $x\neq z$, $y\neq z$ და, ამასთან, $(x,z)\in R$ და $(z,y)\in R$. სიმკვრივე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის მეტად მნიშვნელოვანი დამახასიათებელი თვისებაა. ეს სიმრავლე ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც უსასრულო სწორ ხაზზე მკვრივად განლაგებულ წერტილთა სიმრავლე. ამასთან, ცხადია, რომ მიმართება ,,არის უფრო დიდი ვიდრე'' არ იძლევა მკვრივ დალაგებას ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, მაშინ როდესაც იგივე მიმართება მკვრივად ალაგებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს.

სავარჯიშოები

1. (ა) გამოიკვლიეთ ყველა ადამიანების სიმრავლეში განსაზღვრული შემდეგი მიმართებების მახასიათებელი თვისებები. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში გააკეთეთ ყველაზე ძლიერი შეფასება ანუ არარეფლექსური მიმართება, თუ ის ირეფლექსურიცა, შეაფასეთ ირეფლექსურად.

(i) xი არის yის შვილი
(ii) xი არის yის ძმა
(iii) xი არის yის შთამომავალი
(iv) xი არის yის ბიძა

(ბ) თქვენი რომელი პასუხი შეიცვლება, თუ ეს მიმართებები განისაზღვრება მხოლოდ მამრობითი სქესის ადამიანების სიმრავლეში?

2. გამოიკვლიეთ მომდევნო მიმართებების თვისებები და გაარკვიეთ არის თუ არა რომელიმე მათგანი ეკვივალენტობის მიმართება? გააკეთეთ დაყოფა, რომელსაც ის წარმოქმნის შესაბამის სიმრავლეში (თუ თქვენ არ გაქვთ ნათელი წარმოდგენა

საკითხზე, შეეცადეთ ვარაუდით მოიძიოთ რაიმე ღირებული დაშვება, ჩამოაყალიბოთ ის ნათლად და გააკეთოთ სავარჯიშო მასზე დაყრდნობით).

(ა) M={(x,y) \ x და y არის მინიმალური წყვილი ინგლისური გამოთქმებისა}

(ბ) C={(x,y) \ x და y არიან ინგლისური მეტყველების ბგერები დამატებით დისტრიბუციაში}

(გ) F={(x, y) \ x და y არიან ინგლისური მეტყველების ალოფონები}

(დ) A={(x, y) \ x და y არიან ინგლისური ბგერები თავისუფალ ვარიაციაში}

(ე) Q არის სიმრავლეთა რაღაც სიმრავლეზე 'Xის წევრთა ოდენობა ემთხვევა Yის წევრთა ოდენობას' პრედიკატული ფრაზით განსაზღვრული მიმართება.

3. დავუშვათ A={1,2,3,4}

(ა) გამოიკვლიეთ მომდევნო მიმართებების, მათი შებრუნებულებისა და მათი დამატებების თვისებები. თუ რომელიმე მიმართება აღმოჩნდება ეკვივალენტობის მიმართება, აჩვენეთ დაყოფა, რომელიც ამ მიმართებით წარმოიქმნება A სიმრავლეზე.

R_1={(1,1), (2,1), (3,4), (2,2), (3,3), (4,4), (4,1)}

R_2={(3,4), (1,2), (1,4), (2,3), (2,4), (1,3)}

R_3={(2,4), (3,1), (3,4), (2,2), (1,3), (4,3), (4,2)}

R_4={(1,1), (2,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,4), (3,3), (4,2)}

(ბ) იპოვეთ ის ეკვივალენტობის მიმართება, რომელიც იძლევა A სიმრავლის შემდეგ დაყოფას - P={{1}, {2,3}, {4}}.

(გ) A სიმრავლის რამდენი განსხვავებული დაყოფაა შესაძლებელი?

4. რა შეცდომაა დაშვებული შემდეგ მსჯელობაში, რომლითაც მტკიცდება, რომ რეფლექსურობა არის შედეგი სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობისა? (ბირკოფი და მაკლეინი (1965)). - თუ $(x,y)\in R$, მაშინ $(y,x)\in R$, რადგანაც, ჩვენი დაშვებით, ეს R არის სიმეტრიული. თუ ორივე (x,y) და (y,x) არის R მიმართებაში, მაშინ (x,x) უნდა იყოს R მიმართებაში, ამ R მიმართების ტრანზიტულობის გამო. ამგვარად, დამტკიცდა, რომ ეს R მიმართება რეფლექსურია.

5. ვთქვათ A={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} და R მიმართება A სიმრავლეზე განისაზღვრება როგორც

R={(x, y) \ xი ყოფს yს უნაშთოდ}.

(ა) ჩამოთვალეთ R მიმართების წევრები და აჩვენეთ, რომ იგი არის არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგება და რომ იგი არ არის სრული დალაგება.

(ბ) ააგეთ გამარტივებული დიაგრამა ამ დალაგებისათვის და დაადგინეთ ყველა მინიმალური, მაქსიმალური და, შესაბამისად, უდიდესი და უმცირესი ელემენტები.

(გ) გააკეთეთ იგივე $\wp$(B) სიმრავლეზე (B={a,b,c}) 'ქვესიმრავლეა' ფრაზით მოცემული მიმართებისათვის.

თავი 4
უსასრულობა

წინა თავში გაკვრით შევეხეთ რიცხვით სიმრავლეებს, კერძოდ, დადებითი მთელი რიცხვების სიმრავლეს, რომელსაც ინტუიციურად უსასრულო სიმრავლედ განვიხილავდით. ახლა უსასრულობის ცნებას უფრო დაწვრილებით შევისწავლით.

ჩვენ ვერ დავკმაყოფილდებით უსასრულობის ისეთი განსაზღვრებებით, როგორიცაა, მაგალითად, 'რომელიც არასდროს არ სრულდება', ან 'რომლის ამომწურავი გადათვლაც პრინციპულად შეუძლებელია', რადგან ეს გამონათქვამები ისეთივე ბუნდოვანია, როგორც თვით განსასაზღვრი ტერმინი 'უსასრულო'. ჩვენ გვჭირდება იმგვარი განსაზღვრება, რომელშიც გამოყენებული იქნება ჩვენს ხელთ უკვე არსებული სიმრავლურ-თეორიული ცნებები და რომელიც თავსებადი იქნება უსასრულო სიმრავლეებზე ჩვენს ინტუიციურ წარმოდგენებთან. რამდენადაც, უსასრულო სიმრავლე გარკვეული აზრით უფრო ,,დიდია'' ნებისმიერ სასრულ სიმრავლეზე, თავდაპირველად განვსაზღვრავთ იმას, თუ რას ნიშნავს ის, რომ ორი სიმრავლე სიდიდით ერთმანეთის ტოლია, ან ის, რომ ისინი არ არიან ერთმანეთის ტოლი.

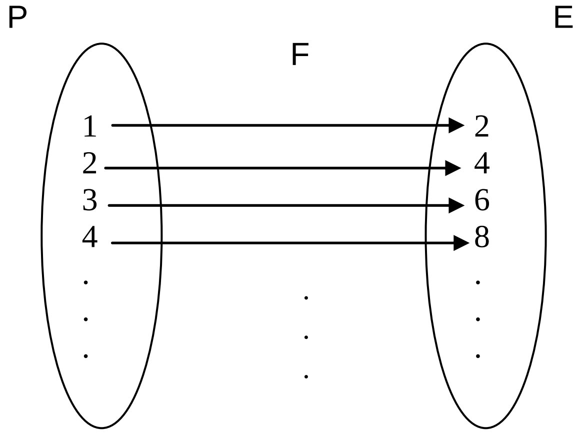
4.1 ეკვივალენტური სიმრავლეები და ოდენობითობა

ვამბობთ, რომ ორი A და B სიმრავლე ერთი და იგივე რაოდენობის წევრებს შეიცავს ანუ არიან **ეკვივალენტურნი (ე.ი. ტოლოდენნი)** მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა ერთი სიმრავლისა მეორეზე. მართლაც, რადგან ურთიერთცალსახა ასახვა არის ფუნქციონალური ერთზე-ერთი ზე-ასახვა შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ A და B სიმრავლეებს შორის ურთიერთცალსახა ასახვა A სიმრავლის ყოველ წევრს აწყვილებს B სიმრავლის ზუსტად ერთ წევრთან და პირიქით. ასეთ შემთხვევაში მართლაც შეიძლება

ითქვას, რომ ამ სიმრავლეებს ერთი და იგივე ანუ ტოლი რაოდენობის წევრები აქვთ. იმას, რომ A და B სიმრავლეები **ეკვივალენტურნი ანუ ტოლოდენნი** არიან, ასე აღვნიშნავთ: A ~ B.

ტერმინები **ტოლი** და **ეკვივალენტური** არ უნდა ავურიოთ ერთმანეთში. ტოლი სიმრავლეები **ერთი და იგივე წევრებისგან** იგება, მაშინ როცა ეკვივალენტური სიმრავლეები **ერთი და იგივე რაოდენობის წევრებისაგან** არიან აგებულნი. ამდენად, ტოლი სიმრავლეები აუცილებლად ტოლოდენებიც არიან, მაგრამ არა პირიქით. ნიშანდობლივია ისიც, რომ ეკვივალენტობის განსაზღვრებაში არაფერია ნათქვამი იქ მოთხოვნილი ურთიერთცალსახა შესაბამისობის კერძო ბუნების შესახებ, ითქვა მხოლოდ ის, რომ ასეთი უნდა არსებობდეს.

სასრული სიმრავლეების შემთხვევაში **ტოლოდენობის** ასეთ განსაზღვრას ბუნებრივ და მოსალოდნელ შედეგებამდე მივყავართ. სიმრავლე, რომელიც ოთხი განსხვავებული წევრისგან შედგება, შეიძლება ურთიერთცალსახად ავსახოთ ნებისმიერ ისეთ სიმრავლეზე, რომელიც ასევე ზუსტად ოთხ წევრს შეიცავს. ამასთან, ვერცერთ ასეთ სიმრავლეს ურთიერთცალსახად ვერ ავსახავთ ვერცერთ ისეთ სიმრავლეზე, რომელიც შედგება ოთხზე მეტი ან ნაკლები წევრისგან. ეკვივალენტობის ანუ ტოლოდენობის მიმართება, როგორც ამას სახელიც მიგვანიშნებს, არის ისეთი მიმართება, რომლის საფუძველზეც ყველა ერთი და იგივე რაოდენობის წევრების შემცველი სიმრავლე ერთიანდება ტოლოდენობის ერთსა და იმავე კლასში. ტოლოდენობის ყოველ კლასთან შეგვიძლია დავაწყვილოთ რაღაც რიცხვი, რომელიც ტოლოდენობის ამ კლასში შემავალი სიმრავლეების წევრთა რაოდენობის აღმნიშვნელად მიიჩნევა. ასეთ რიცხვს **კარდინალურ ანუ რაოდენობრივ რიცხვს** უწოდებენ. სასრული სიმრავლეების კარდინალური რიცხვი ზუსტად შეესაბამება ამ სიმრავლეების წევრთა რაოდენობის გამომხატველ ნატურალურ რიცხვებს. ამდენად, ნებისმიერი 4 წევრიანი A სიმრავლის კარდინალური რიცხვი ანუ **ოდენობა** არის 4 და, როგორც პირველ თავში ითქვა, ეს შემდეგნაირად აღინიშნება: |A|=4.



ნახაზი 4-1: დადებით მთელ და დადებით მთელ წყვილ რიცხვთა ურთიერთცალსახა ასახვა

უსასრულო სიმრავლეებისათვის ტოლოდენობის ზემომოყვანილი განსაზღვრება საკმაოდ უცნაურ ვითარებებს წარმოშობს. მაგალითად, განვიხილოთ დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე P, დადებით წყვილ მთელ რიცხვთა სიმრავლე E და F ფუნქცია, რომელიც ყოველ დადებით მთელ x რიცხვს გადასახავს 2x რიცხვში, როგორც ეს 4-1 ნახაზზეა ნაჩვენები.

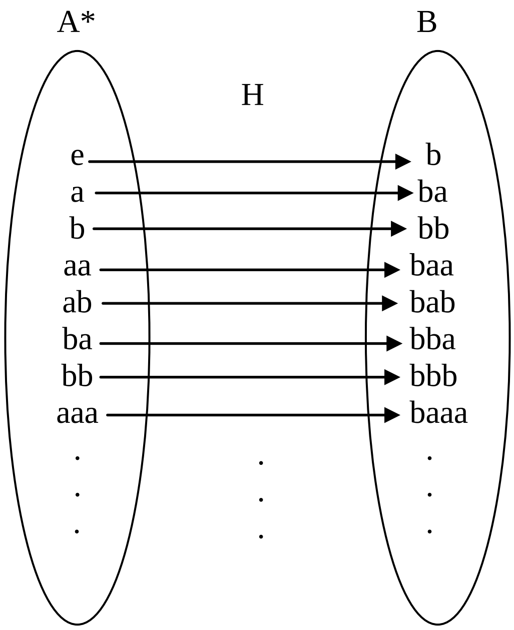
ნებისმიერი დადებითი მთელი რიცხვის ორზე გამრავლებით ყოველთვის ცალსახად განსაზღვრულ დადებით მთელ წყვილ რიცხვს ვიღებთ. ეს იმას ნიშნავს, რომ F ფუნქციის მნიშვნელობათა არე E სიმრავლეა. ამასთან, F არის ერთზე-ერთი ფუნქცია, რადგან ნებისმიერი x და y მთელი რიცხვებისათვის თუ 2x=2y, მაშინ x=y. ამის გარდა, F არის ზე-ფუნქცია, რადგან E სიმრავლის ნებისმიერი წევრისთვის ანუ ნებისმიერი y ლუწი რიცხვისთვის არსებობს ისეთი x მთელი რიცხვი, რომ 2x=y. ამდენად, F არის ურთიერთცალსახა ასახვა

და, შესაბამისად, P და E, რომლებიც ტოლოდენი სიმრავლეებია, შეიცავენ ერთი და იგივე რაოდენობის წევრებს. ეს უცნაური შედეგია, რადგან E არის P სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე და ჩვენ შეჩვეულნი ვართ იმ აზრს, რომ სიმრავლე თავის ნებისმიერ საკუთრივ ქვესიმრავლეზე „დიდი“ ანუ „მეტოდენი” უნდა იყოს. მაგრამ, თუკი სიმრავლეთა რაოდენობრივი ტოლობის კრიტერიუმად მივიღებთ ზემოგანსაზღვრულ ტოლოდენობის ცნებას, მაშინ იმის აღიარებაც მოგვიწევს, რომ ზოგჯერ სიმრავლე და მისი საკუთრივი ქვესიმრავლე შეიძლება ტოლი რაოდენობის წევრებს შეიცავდნენ. ისევე როგორც, თუკი ჩვენ ვიტყოდით, რომ სიმრავლე ყოველთვის „დიდია“ ანუ „მეტოდენია” თავის საკუთრივ ქვესიმრავლეზე, მაშინ ისიც უნდა დაგვეშვა, რომ სხვადასხვა რაოდენობით დახასიათებადი სიმრავლეები შეიძლება ურთიერთცალსახად ესაბამებოდნენ ერთმანეთს, რაც ასევე საკმაოდ უცნაური ვითარებაა. ამგვარად, ნებისმიერ შემთხვევაში ვღებულობთ უცნაურ ვითარებას. თუმცა, ყოველთვის, როცა აღმოჩნდება, რომ სიმრავლე ასეთ უცნაურ თვისებებს ამჟღავნებს, ირკვევა, რომ ეს სწორედ ის სიმრავლეა, რომელსაც, ინტუიციურად, უსასრულოს ვუწოდებთ ხოლმე. აქედან გამომდინარე, უსასრულო სიმრავლეს ასე განვსაზღვრავთ:

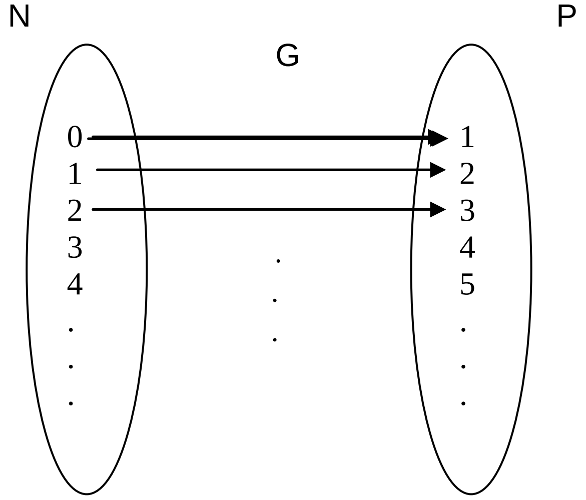
განსაზღვრება 4.1 სიმრავლე იწოდება **უსასრულოდ** მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა ის თავისი საკუთრივი ქვესიმრავლის ტოლოდენია.

(4-1) მაგალითი: {a, b} ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა სასრული სიგრძის სტრიქონების A* სიმრავლე არის უსასრულო. მართლაც, ცხადია, რომ A* სიმრავლეში შემავალი ყველა იმ სტრიქონთა სიმრავლე, რომელიც იწყება b ასოთი, ანუ B={b, ba, bb, baa, bab, bba,...} სიმრავლე, A* სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლეა. ასახვა H, რომელიც ნაჩვენებია 4-2 ნახაზზე, არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რადგან A* სიმრავლეში შემავალი ყოველი x სტრიქონისათვის არსებობს B სიმრავლეში შემავალი ერთადერთი bx სტრიქონი და პირიქით (აქ e არის ცარიელი სტრიქონი). ე.ი. A* არის უსასრულო სიმრავლე და A* ~ B.

(4-2) მაგალითი: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე N={0,1,2,3,...} უსასრულო სიმრავლეა. მართლაც, განვიხილოთ სიმრავლე P={1,2,3,4,...}, რომელიც N სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლეა და გავაკეთოთ 4-3 ნახაზზე ნაჩვენები გადასახვა, რომლითაც ყოველი n ნატურალური რიცხვი გადადის (n+1) რიცხვში. N სიმრავლის ყოველ წევრს აქ შეესაბამება P სიმრავლის ერთადერთი წევრი და პირიქით. ამდენად, G არის ურთიერთცალსახა ასახვა და, შესაბამისად, N არის უსასრულო სიმრავლე და P ~ N.



ნახაზი 4-2: {a, b}* სიმრავლის ერთი-ერთი გადასახვა
თავის საკუთრივ ქვესიმრავლეზე



ნახაზი 4-3: ასახვა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ N სიმრავლე
არის თავისი საკუთრივი ქვესიმრავლის ეკვივალენტური.

ადვილი დასანახია, რომ არცერთი სასრული სიმრავლე არ შეიძლება იყოს თავისი რომელიმე საკუთრივი ქვესიმრავლის ტოლოდენი. მაგალითად, ავიღოთ {a,b,c} სიმრავლე და მისი ნებისმიერი საკუთრივი ქვესიმრავლე. **უსასრულო სიმრავლეების** განსაზღვრებაში ერთი პუნქტი ზოგჯერ გაუგებრობას იწვევს: მოთხოვნილია სიმრავლის სულ მცირე ერთი ისეთი საკუთრივი ქვესიმრავლის **არსებობა,** რომელიც ამ სიმრავლის ტოლოდენია. განსაზღვრებაში არაა ნათქვამი, რომ უსასრულო სიმრავლე ტოლოდენი იყოს თავისი **ყველა** საკუთრივი ქვესიმრავლისა, რაც, ცხადია, ვერასდროს ვერ შესრულდება. მაგალითად, N არ არის {0,3,18} სიმრავლის ტოლოდენი, რომელიც მისი საკუთრივი ქვესიმრავლეა.

4.2 სიმრავლეთა თვლადობა

უკვე აღინიშნა, რომ ყოველ სასრულ სიმრავლეს შეგვიძლია შევუსაბამოთ ნატურალური რიცხვი, რომელიც მის ოდენობას გამოხატავს და რომ ერთნაირი ოდენობის სიმრავლეები ქმნიან ეკვივალენტობის (ტოლოდენობის) კლასებს. ტოლოდენი უსასრულო სიმრავლეებიც შეიძლება გავაერთიანოთ კლასებში, რომელთა ყველა წევრსაც ერთი და იგივე ოდენობა ექნებათ, მაგრამ ასეთ ეკვივალენტობის კლასს კარდინალურ რიცხვად ვერ შევუსაბამებთ ვერც ერთ დადებით მთელ რიცხვს. ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ თითოეული მთელი რიცხვი არის რომელიმე სასრული სიმრავლის კარდინალური რიცხვი და არცერთი უსასრულო სიმრავლე არ შეიძლება იყოს არცერთი სასრული სიმრავლის ტოლოდენი, რადგან სასრულ და უსასრულო სიმრავლეებს შორის არ შეიძლება არსებობდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. მიუხედავად ამისა, მოსახერხებელი იქნებოდა გვქონოდა გარკვეული სიმბოლოები, რომლებითაც აღვნიშნავდით უსასრულო სიმრავლეების კარდინალურ რიცხვებს. ერთ-ერთი ასეთი სიმბოლოა $\aleph_0$ (ალეფ ნული). $\aleph_0$ აღნიშნავს ნატურალური რიცხვების სიმრავლისა და ყველა მისი ტოლოდენი სიმრავლის კარდინალურ რიცხვს. ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ $\aleph_0$, როგორც უკვე ვთქვით, არაა ნატურალური რიცხვი, ე.ი. ის არ არის N={0,1,2,3,...} სიმრავლის წევრი. ყოველი ნატურალური რიცხვის შესაბამისი კარდინალური რიცხვი არსებობს, მაგრამ არსებობენ ისეთი კარდინალური რიცხვებიც, მაგალითად $\aleph_0$, რომელთა შესაბამისი ნატურალური რიცხვები არ არსებობენ. კარდინალური რიცხვები შეიძლება გაგებულ იქნენ

როგორც პასუხი კითხვაზე, თუ რამდენი წევრია სიმრავლეში. თუ ჩვენ დავსვამთ კითხვას 'სულ რამდენი ნატურალური რიცხვია?' ან 'სულ რამდენი დადებითი მთელი რიცხვია?' – პასუხი იქნება კარდინალური რიცხვი $\aleph_0$.

განსაზღვრით, სიმრავლე, რომელიც არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ტოლოდენი და რომლის კარდინალური რიცხვია $\aleph_0$, იწოდება **გადათვლადად ანუ გადათვლად უსასრულობად**. სიმრავლე, რომელიც ან სასრულია ან თვლადი უსასრულობაა, იწოდება **თვლადად**. ჩვენ ვნახეთ, რომ დადებით მთელ ლუწ რიცხვთა სიმრავლე (E 4-1 ნახაზზე) არის თვლადი. მოვიყვანოთ კიდევ რამდენიმე სხვა მაგალითიც:

(4-3) მაგალითი: მთელ რიცხვთა $Z=\{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$ სიმრავლე არის უსასრულოდ თვლადი ანუ გადათვლადი, რასაც N და Z სიმრავლეებს შორის არსებული ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ადასტურებს.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
Z = \{ & 0, & +1, & -1, & +2, & -2, & +3, & -3, & \dots\} \\
F & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
N = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots\}
\end{array}
$$

ფუნქცია $F: Z \to N$ ასეა განსაზღვრული:

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{როცა } x = 0 \\ 2x - 1 & \text{როცა } x \text{ დადებითია} \\ -2x & \text{როცა } x \text{ უარყოფითია} \end{cases}
$$

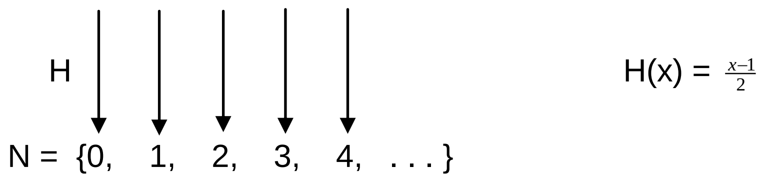
F რომ მართლაც ურთიერთცალსახა შესაბამისობაა, იქიდანაც ჩანს, რომ Z სიმრავლის დადებით რიცხვებს ურთიერთცალსახად შეესაბამება N სიმრავლის კენტი რიცხვები, Z სიმრავლის უარყოფით რიცხვებს – N სიმრავლის ლუწი რიცხვები, ხოლო Z სიმრავლის რიცხვი 0 შესაბამისობაშია N სიმრავლის რიცხვთან 0.

(4-4) მაგალითი: ნულისგან განსხვავებულ ნატურალურ რიცხვთა შებრუნებული რიცხვების $S=\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\}$ სიმრავლე არის გადათვლადი. ეს ჩანს S და N სიმრავლეებს შორის არსებული შემდეგი ურთიერთცალსახა შესაბამისობით:

$$
\begin{array}{lccccccc}
S = \{ & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \dots\} \\
G & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
N = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots\}
\end{array}
\qquad G(x) = \frac{1}{x} - 1
$$

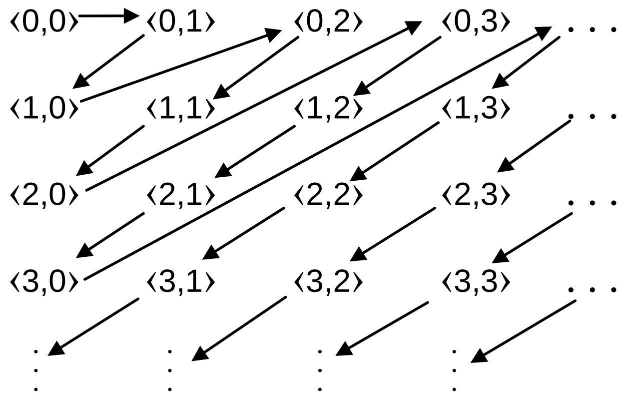
(4-5) მაგალითი: დადებითი მთელი კენტი რიცხვების სიმრავლე $F=\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ არის გადათვლადი. მართლაც, N სიმრავლესთან მისი ერთი-ერთი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება ასეთიც იყოს:

$F = \{1, \ 3, \ 5, \ 7, \ 9, \ \dots\}$

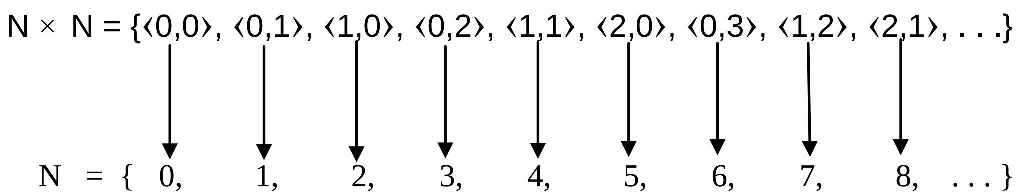


ჩვენ ვნახეთ, რომ დადებით მთელ რიცხვთა P სიმრავლეს, დადებით მთელ ლუწ რიცხვთა E სიმრავლეს და დადებით მთელ კენტ რიცხვთა F სიმრავლეს აქვთ ერთი და იგივე კარდინალური (ოდენობითი) რიცხვი. რამდენადაც $P=E\cup F$, ვინმემ შეიძლება იფიქროს, რომ P მეტ წევრს შეიცავს, ვიდრე E ან F სიმრავლეები, მაგრამ ეს ასე არაა. ამდენად, არაა აუცილებელი, რომ ორი უსასრულო სიმრავლის გაერთიანებას უფრო დიდი კარდინალური რიცხვი ჰქონდეს ვიდრე გაერთიანებაში შემავალ სიმრავლეებს აქვთ.

არსებობს თუ არა დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე უფრო დიდი ანუ უფრო ოდენი სიმრავლეები? – ინტუიციურად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ასეთია N×N დეკარტული ნამრავლის დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე. მაგრამ, თუ წყვილებს ისეთი თანამიმდევრობით გადავთვლით, როგორც ეს ნაჩვენებია ისრებით 4-4 ნახაზზე, ვნახავთ, რომ N×N სიმრავლესა და N სიმრავლეს შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. თუმცა, ამ შემთხვევაში, რთულია იმის დამტკიცება, რომ ეს შესაბამისობა მართლაც ურთიერთცალსახაა.



ნახაზი 4-4: (N × N) სიმრავლის წევრთა გადათვლა.



ნახაზი 4-5: ურთიერთცალსახა შესაბამისობა
(N × N) და N სიმრავლეებს შორის.

ასევე, ვინმემ შეიძლება იფიქროს, რომ რაციონალურ რიცხვთა რაოდენობა აღემატება ნატურალური რიცხვებისას, რადგან ნებისმიერ ორ ნატურალურ რიცხვს შორის არსებობს რაციონალურ რიცხვთა უსასრულო ოდენობა. გაიხსენეთ, რომ ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ორი მთელი რიცხვის ფარდობის სახით x/y, სადაც

$y \neq 0$. მაგრამ, ირკვევა, რომ ამ სიმრავლეებს შორისაც შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რაც მათ ტოლოდენობაზე მეტყველებს.

ზემოაღნიშნული ურთიერთცალსახა შესაბამისობის ასაგებად ჩამოვწეროთ დადებითი რაციონალური (ე.ი. წილადური) რიცხვები შემდეგი მატრიცის სახით:

1/1, 2/1, 3/1, 4/1, 5/1, 6/1, . . .
1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2, . . .
1/3, 2/3, 3/3, 4/3, . . .
1/4, 2/4, 3/4, . . .
1/5, 2/5, . . .
1/6, . . .
. . .

თავდაპირველად ამ მატრიცის ელემენტებს შემდეგნაირად შევუსაბამებთ დადებით მთელ რიცხვებს: ვიწყებთ ზედა მარცხენა კუთხით და მივყვებით დიაგონალებს, რომლებსაც ერთმანეთის მიყოლებით გავავლებთ ზედა რიგიდან უკიდურესი მარცხენა სვეტისკენ. ამ შესაბამისობის პირველი რამდენიმე წევრი იქნება: 1/1 – 1, 2/1 – 2, 1/2 – 3, 3/1 – 4, 2/2 – 5, 1/3 – 6, 4/1 – 7, და ა. შ.. ეს იმ გადათვლის ანალოგიურია, რომელიც 4-4 ნახაზზე იყო ნაჩვენები. ამის შემდეგ უარყოფით რაციონალურ რიცხვებს ანალოგიურად ვაწყვილებთ უარყოფით მთელ რიცხვებთან, ხოლო რიცხვს 0 ვაწყვილებთ რიცხვთან 0, რითაც სრულდება მთელ და რაციონალურ რიცხვებს შორის ურთიერთცალსახა თანადობის დამყარების პროცესი. ამის შემდეგ ვიყენებთ ნატურალურ რიცხვებსა და მთელ რიცხვებს შორის 4-3 მაგალითში უკვე დამყარებულ ურთიერთცალსახა შესაბამისობას, რითაც ვიღებთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობას ნატურალურ და რაციონალურ რიცხვებს შორის. გასაგებია, რომ თითოეული რაციონალური რიცხვი ამ პროცედურის შედეგად რამდენჯერმე ჩაიწერება, მაგალითად 1/2 ასევე მოგვეცემა 2/4-ის, 3/6-ის და ა. შ. სახით. მაგრამ, როცა უკვე ვაჩვენეთ, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ამ უფრო დიდ სიმრავლესა და ნატურალურ რიცხვებს შორის, იმის გაკეთება, რომ ჩამოვუყვეთ ამ ჩამონათვალს და ამოვყაროთ ის რაციონალური რიცხვები, რომლებიც მანამდე ერთხელ უკვე შეგვხვდნენ სხვა ფორმით და, ამასთან, გამეორების მიზეზით ამოგდებული რიცხვის მომდევნო წევრები ჩამონათვალში უკან გადმოვწიოთ იქ წარმოქმნილი ცარიელი ადგილების შესავსებად, სიძნელეს არ წარმოადგენს. წინასწარ განსაზღვრული პროცედურის გამოყენებით სიმრავლის წევრების ურთიერთცალსახა ასახვას ნატურალური რიცხვების სიმრავლესთან, ზოგჯერ, სიმრავლის წევრთა **ეფექტურ გადათვლას** უწოდებენ.

4.3 არათვლადი სიმრავლეები

როგორც ირკვევა არსებობს არა მხოლოდ მთელ რიცხვთა დალაგებული წყვილების ეფექტური გადათვლის პროცედურა, არამედ ასევე შესაძლებელია ეფექტურად გადავითვალოთ მთელ რიცხვთა დალაგებული სამეულები, ოთხეულები და, საზოგადოდ, მთელ რიცხვთა დალაგებული n-ეულები სრულიად ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

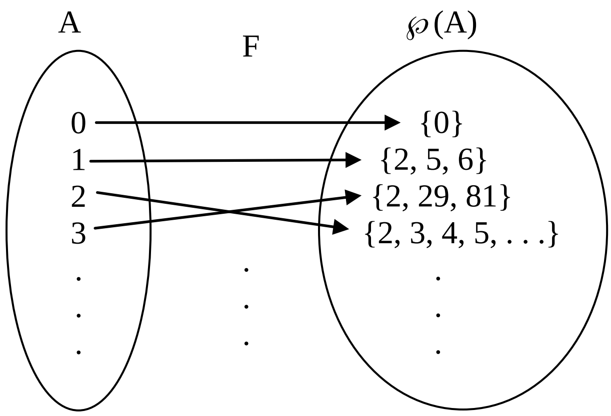
ამოცანა: ჩამოაყალიბეთ მთელ რიცხვთა დალაგებული სამეულების სრულად გადამთვლელი პროცედურა, რომელიც დალაგებული ორეულებისათვის უკვე ზემოთ აღწერილი სწორხაზოვანი ბიჯითი პროცესის მსგავსი იქნება.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის არცერთჯერადი დეკარტული ნამრავლი არ მოგვცემს ისეთ სიმრავლეს, რომლის კარდინალური რიცხვი $\aleph_0$

კარდინალურ რიცხვზე მეტია. ერთ დროს ითვლებოდა, რომ საერთოდ არ არსებობენ ისეთი სიმრავლეები, რომელთა კარდინალური რიცხვი $\aleph_0$ კარდინალურ რიცხვზე მეტია. მაგრამ, გერმანელმა მათემატიკოსმა გეორგ კანტორმა, რომელიც კლასიკური სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლად ითვლება, დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი A სიმრავლისთვის A სიმრავლის ხარისხობრივ სიმრავლეს A სიმრავლეზე მეტი კარდინალური რიცხვი აქვს. ამდენად, დამტკიცდა, რომ N სიმრავლის ხარისხობრივი სიმრავლის კარდინალური რიცხვი მეტია $\aleph_0$ კარდინალურ რიცხვზე.

თეორემა 4.1 (კანტორი (1845-1918)): ნებისმიერი A სიმრავლისთვის $|A|<|\wp(A)|$

დამტკიცება: არსებობს $\wp(A)$ სიმრავლის ისეთი ფუნქციონალური გადასახვა A სიმრავლეში, რომელიც $\wp(A)$ სიმრავლის ნებისმიერ ერთელემენტიან სიმრავლეს უთანადებს A სიმრავლის იმავე ელემენტს, ხოლო $\wp(A)$ სიმრავლეში შემავალ ყველა დანარჩენ სიმრავლეს უთანადებს A სიმრავლის ერთ რომელიმე განსაზღვრულ ელემენტს. ეს ფუნქცია ზე-ასახვაა, რადგან, ასახვის პირობის პირველი ნაწილიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ A სიმრავლის ყოველ წევრზე $\wp(A)$ სიმრავლის სულ მცირე ერთი წევრი მაინც აისახება. აქედან გამომდინარე, $|A|<|\wp(A)|$ ან $|A|=|\wp(A)|$, ე.ი. $\wp(A)$ სიმრავლის ოდენობაზე სულ ცოტა შეიძლება ითქვას ის, რომ იგი არაა A სიმრავლის ოდენობაზე ნაკლები. ახლა ვაჩვენოთ, რომ



ნახაზი 4-6: სიმრავლესა და მის ხარისხობრივ სიმრავლეს შორის პირობითად დაშვებული ერთზე-ერთი შესაბამისობის ილუსტრაცია.

არ არსებობს ისეთი F ფუნქცია, რომელიც A სიმრავლეს ურთიერთცალსახად გადასახავს $\wp(A)$ სიმრავლეზე და რომ აქედან გამომდინარე ეს სიმრავლეები არ შეიძლება იყვნენ ტოლოდენნი (ეკვივალენტურნი). დავუშვათ, რომ ასეთი $F:A\rightarrow\wp(A)$ არსებობს. მაშინ, ცხადია, რომ A სიმრავლის ყოველი წევრი გადაისახება A სიმრავლის რომელიმე ქვესიმრავლეზე. ზოგადად, A სიმრავლის ზოგიერთი წევრი გადაისახება A სიმრავლის ისეთ ქვესიმრავლეზე, რომლის წევრი თავადაც არის, ზოგიერთი - არა. 4-6 ნახაზზე F ფუნქციით 0 და 2 გადაისახებიან ისეთ სიმრავლეებზე, რომლის წევრები თავად ისინიც არიან, 3 და 1 კი - არა. ახლა, დავუშვათ, B სიმრავლე შედგება A სიმრავლის მხოლოდ იმ წევრებისგან, რომლებიც ამ F ფუნქციით გადაისახებიან ამავე წევრის არ შემცველ ქვესიმრავლეზე; ე. ი. $B=\{x\in A \mid x\notin F(x)\}$. ცხადია, B სიმრავლე A სიმრავლის ქვესიმრავლეა და, ამდენად, იგი $\wp(A)$ სიმრავლის ერთ-ერთი შემადგენელია. დაშვების თანახმად, F არის ზე-ფუნქცია, რაც იმას ნიშნავს, რომ A სიმრავლეში უნდა არსებობდეს ერთი ისეთი წევრი მაინც, რომელიც ამ B სიმრავლეში აისახება. ეს წევრი იყოს y. ახლა კი დავსვათ კითხვა, ეს y არის თუ არა B სიმრავლის წევრი?

1. თუ $y \in B$, მაშინ ის არის A სიმრავლის ისეთი შემადგენელი, რომელიც F ფუნქციით აისახება ისეთ სიმრავლეში, რომლის ერთ-ერთი წევრი თვითონაც არის, რაც გამომდინარე B სიმრავლის განმსაზღვრელი პირობიდან ნიშნავს იმას, რომ იგი არ უნდა ეკუთვნოდეს B სიმრავლეს. ამგვარად, თუ $y \in B$, მაშინ $y \notin B$. - მივიღეთ წინააღმდეგობა!

2. თუ $y \notin B$, მაშინ ის არის A სიმრავლის ერთ-ერთი ისეთი შემადგენელი, რომელიც არ შედის იმ სიმრავლეში, რომელშიც გადაისახა; ასე რომ, B სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად, ის უნდა შედიოდეს B სიმრავლეში. ამგვარად, თუ $y \notin B$, მაშინ $y \in B$. ისევ წინააღმდეგობას ვიღებთ!

ეს ორმაგი წინააღმდეგობა, რომელიც რასელის პარადოქსს მოგვაგონებს, გვიჩვენებს, რომ დაშვება, რომლის თანახმადაც F არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, მცდარია. ამდენად, შეუძლებელია, რომ $|A|=|\wp(A)|$ და, შესაბამისად, ვასკვნით, რომ $|A|<|\wp(A)|$. ამ მნიშვნელოვანი თეორემიდან გამომდინარეობს ის, რომ არსებობს ალეფ ნულზე დიდი კარდინალური რიცხვი, რომელსაც, სასრული სიმრავლეების ანალოგიით, სადაც ნებისმიერი n-წევრიანი სიმრავლის ხარისხობრივი სიმრავლე 2^n წევრს შეიცავს, $2^{\aleph_0}$ გამოსახულებით აღნიშნავენ. მაგრამ $2^{\aleph_0}$ არ გამოხატავს არც მთელ და არც რომელიმე ნამდვილ რიცხვს, რადგან 2 ხარისხად $\aleph_0$ არ არის ინტერპრეტირებადი არითმეტიკული ოპერაცია.

თუ ავაგებთ $\wp(N)$ სიმრავლის ხარისხობრივ სიმრავლეს, მივიღებთ კარდინალურ რიცხვს $2^{2^{\aleph_0}}$, რომელიც მეტია $2^{\aleph_0}$ კარდინალურ რიცხვზე; $\wp(\wp(\wp(N)))$ სიმრავლის კარდინალური რიცხვი იქნება $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ და ა.შ.. ამგვარად, კანტორის თეორემა გვაძლევს უსასრულო კარდინალურ რიცხვთა მზარდ უსასრულო რიგს: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$.

არათვლადი სიმრავლის კიდევ ერთი მაგალითია 0 და 1 რიცხვებს შორის განთავსებული ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე თავად ამ 0 და 1 რიცხვების ჩათვლით. ამ სიმრავლეს $[0,1]$ გამოსახულებით აღნიშნავენ. ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი წარმოიდგინება მთელი, წილადური და არაწილადური რიცხვების გარკვეული კომბინირებით. არაწილადური რიცხვების მაგალითებია ისეთი ირაციონალური რიცხვები, როგორებიცაა $\sqrt{5}, \pi, \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$ და ა. შ.. ეს ისეთი რიცხვებია, რომელთა გამოხატვაც არ შეიძლება ორი მთელი რიცხვით შემდგარი წილადის სახით. რიცხვთა თეორიაში დამტკიცებულია ისიც, რომ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, სულერთია ის რაციონალური იქნება თუ ირაციონალური, შეიძლება ჩაიწეროს მთელი რიცხვისა და უსასრულო ათწილადის კომბინირებით, რომელიც ამ მთელი რიცხვის შემდგომ მდებარე წერტილს მოსდევს. მაგალითად, წილადი $\frac{1}{3}$ შეიძლება ჩაიწეროს როგორც $0.3333333\ldots$, სადაც სამი წერტილი გვიჩვენებს, რომ სამიანების ეს რიგი უსასრულოდ გრძელდება. წილადი $\frac{1}{2}$ შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ან როგორც 0.5 ან 0.50 ან 0.500 და ა.შ., ანდა როგორც პერიოდული (განმეორებადი) უსასრულო ათწილადი – $0.4999999\ldots$. ამ ბოლო დებულების დამტკიცება მოითხოვს ამ უსასრულო ათწილადის გეომეტრიულ პროგრესიად გადააზრებას. მაგრამ, არსებობს ამ საკითხის საკმარისი დამაჯერებლობით ამხსნელი შემდეგი მარტივი არითმეტიკული მეთოდიც:

ცნობილია, რომ $\frac{1}{9}=0.11111\ldots$ და $1=9(\frac{1}{9})$. აქედან ვღებულობთ $1=9(0.11111\ldots)=0.99999\ldots$.

ნებისმიერი არაწილადური რიცხვის ათწილადური გამოსახულება უსასრულო ათწილადს იძლევა, მაგრამ, წილადური ანუ რაციონალური რიცხვებისგან განსხვავებით, იგი არ შეიცავს ციფრების განმეორებად თანამიმდევრობებს ანუ არ არის პერიოდული.

$[0,1]$ ინტერვალის არათვლადობის დამტკიცების კანტორისეული მეთოდი გულისხმობს დაშვებას, რომ ამ სიმრავლის ყოველი რიცხვი ერთადერთი გზით წარმოიდგინება 0 მთელი

რიცხვისა და უსასრულო ათწილადის მეშვეობით. მაგრამ, ამისათვის უნდა შევთანხმდეთ, რომ ის რაციონალური რიცხვები ანუ ის სასრული ათწილადები, რომლებიც 0-ების უსასრულო რიგითაც ჩაიწერებიან, მაგალითად, როგორიცაა 0.5000..., გამოხატული იქნენ 9-ების უსასრულო რიგით, მაგალითად როგორც 0.4999... . ახლა კი გავაკეთოთ დაშვება, რომლის მცდარობაც შემდგომში დამტკიცდება. კერძოდ, დავუშვათ, რომ სიმრავლე [0,1] არის თვლადი. თუ ეს ასეა, მაშინ მისი წევრები შეიძლება დალაგდეს ისეთი წრფივი თანამიმდევრობით, რომელშიც შევა [0,1] ინტერვალის ყველა წევრი. 4-7 ნახაზზე ეს მიმდევრობა $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ ვერტიკალური რიგის სახითაა წარმოდგენილი და ტოლობის ნიშნის მარჯვნივ მოცემულია თითოეული x_i რიცხვის ათწილადური გამოსახულება. ინდექსირებული a სიმბოლოებით აღნიშნულია ათწილადებში შემავალი კონკრეტული ციფრები; მაგალითად, a_{13} არის ამ თანამიმდევრობის პირველი რიცხვის ათწილადური ნაწილის მესამე ციფრი.

ახლა კი ვაჩვენოთ, რომ ამ [0,1] სიმრავლეში არსებობს ისეთი y რიცხვი, რომელიც არ შედის $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ მიმდევრობაში. განვიხილოთ რიცხვი, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება: მისი მთელი ნაწილი არის 0; მისი პირველი ათწილადური ციფრი, a_{y1}, განსხვავდება a_{11}-ისაგან; მისი მეორე ათწილადური ციფრი a_{y2} განსხვავდება a_{22} ციფრისაგან და, საზოგადოდ, მისი n-ური ათწილადური ციფრი a_{yn} განსხვავდება a_{nn} ციფრისგან. აქედან იმის გათვალისწინებით, რომ [0,1] სიმრავლის თითოეული რიცხვი წარმოიდგინება ერთადერთი ათწილადური სახით, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ y არ შეიძლება იყოს x_1-ის ტოლი, რადგან ეს რიცხვები განსხვავდებიან ერთმანეთისგან პირველი ათწილადური ციფრით. y ასევე არ შეიძლება იყოს x_2-ის ტოლი, რადგან ისინი განსხვავდებიან ერთმანეთისგან მეორე ათწილადური ციფრით. ზოგადად კი, y არ შეიძლება იყოს ამ მიმდევრობის თუნდაც რომელიმე x_n რიცხვის ტოლი, რადგან ეს უკანასკნელი განსხვავებული იქნება y-ისგან n-ური ათწილადური ციფრით. არადა, ცხადია, რომ ასე განსაზღვრული უსასრულო ათწილადი $y=0.a_{y1}a_{y2}a_{y3}\ \ldots\ a_{yn}\ \ldots$ არის [0,1] სიმრავლეში შემავალი რიცხვი. ამგვარად, არ დასტურდება ჩვენი ვარაუდი იმის თაობაზე, რომ [0,1] სიმრავლის ელემენტები შეიძლებოდა წარმოგვედგინა წრფივი მიმდევრობის სახით და ამდენად, ეს სიმრავლე არათვლადია. წინააღმდეგობის დაშვების მეთოდით მტკიცების ეს კონკრეტული მაგალითი ცნობილია აგრეთვე როგორც დიაგონალური მტკიცების მეთოდი. ამ მეთოდის ეს დასახელება ბუნებრივად განპირობებულია y-ის აგების თავისებურებით: კერძოდ y აგებულია ისე, რომ იგი ყოველი ათწილადური ციფრით განსხვავდება $0.a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}\ldots$ რიცხვისაგან, რომელიც, თავის მხრივ, აგებულია ამ კვადრატული მატრიცის დიაგონალზე განლაგებული ციფრებისაგან.

$$
\begin{array}{l}
x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots \\
x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots \\
x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots \\
\vdots \qquad\quad \vdots \\
x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots \\
\vdots \qquad\quad \vdots
\end{array}
$$

ნახატი 4-7: [0, 1]-ის სავარაუდო წარმოდგენა

ზემოაღნიშნული ამტკიცებს, რომ [0,1] სიმრავლის კარდინალური რიცხვი მეტია $\aleph_0$ კარდინალურ რიცხვზე, მაგრამ ამით არ განისაზღვრება ის, თუ რა რიცხვია [0,1] სიმრავლის ოდენობა. კანტორმა შეძლო ეჩვენებინა, რომ [0,1] არის მთელ რიცხვთა ხარისხობრივი სიმრავლის ეკვივალენტური და რომ მისი კარდინალური რიცხვი არის $2^{\aleph_0}$. იგივე ოდენობის მქონეა შემდეგი სიმრავლეები: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, წრფის ყველა წერტილების

სიმრავლე, სიბრტყის ყველა წერტილების სიმრავლე, n განზომილებიანი სივრცის ყველა წერტილების სიმრავლე, მთელ რიცხვთა სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე და სხვა.

მრავალი წლის განმავლობაში გადაუჭრელ პრობლემად რჩებოდა კითხვა იმის თაობაზედ არსებობს თუ არა $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$ და ა. შ. რიცხვებისგან განსხვავებული კარდინალური რიცხვები. მაგალითად, არსებობს თუ არა ისეთი კარდინალური რიცხვი β, რომ $\aleph_0 < \beta < 2^{\aleph_0}$ ან, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არსებობს თუ არა ისეთი სიმრავლე, რომელსაც N და $\wp(N)$ სიმრავლეების შუალედური ოდენობითობა აქვს. ვარაუდი, რომ ამ კითხვაზე პასუხი უარყოფითი იქნებოდა, ცნობილია **კონტინიუმის ჰიპოთეზის** სახელით. ეს საკითხი საბოლოოდ 1963 წელს გადაწყდა. როცა პ. ჯ. კოენმა აჩვენა, რომ შეუძლებელია კონტინიუმის ჰიპოთეზის ან დამტკიცება ან უარყოფა სიმრავლეთა თეორიის ტრადიციული დაშვებების საფუძველზე. **საკითხი იმდენად მნიშვნელოვან მოვლენად შეფასდა, რომ ცნობა მის შესახებ დაიბეჭდა „New York Time"-ის იმავე 1963 წლის 14 ნოემბრის ნომრის 37 გვერდზე.** ამდენად, კონტინიუმის ჰიპოთეზა სიმრავლეთა თეორიის სხვა აქსიომებიდან დამოუკიდებელი დებულებაა და, შესაბამისად, სიმრავლეთა თეორიას შესაძლებელია დაემატოს ის, ან მისი უარყოფა ისე, რომ ის არც ჭარბი იქნება და არც წინააღმდეგობას არ შეიტანს ამ თეორიაში.

შემდეგ მაგალითებში წარმოდგენილია დიაგონალური და ზოგიერთი სხვა მეთოდიც, რომლებსაც იყენებენ იმის საჩვენებლად, რომ მოცემული სიმრავლის კარდინალური რიცხვი მეტია $\aleph_0$-ზე.

(1) **ორობითი სისტემით წარმოდგენილი ყველა ნამდვილი x რიცხვების ($0 \le x < 1$) სიმრავლე**. ამ სიმრავლის მიმართ ზუსტად ისევე შეიძლება გამოვიყენოთ დიაგონალური მეთოდი, როგორც ათწილადებით წარმოდგენილ $[0,1]$ ინტერვალის რიცხვთა სიმრავლის მიმართ. რამდენადაც ამ შემთხვევაში რიცხვების ამგები თითოეული ციფრი არის ან 0, ან 1. მტკიცების მიზნებისათვის საკმარისი ხდება დიაგონალური მეთოდით y-ის შერჩევისას გავითვალისწინოთ, რომ თუ $a_{nn}=0$, მაშინ $y_{nn}=1$, ხოლო თუ $a_{nn}=1$, მაშინ $y_{nn}=0$. რიცხვების ორობით აღნიშვნაზე მხოლოდ იმიტომ გავამახვილეთ ყურადღება, რომ ხშირად უფრო მარტივია ურთიერთცალსახა მიმართების დამყარება ორობითად წარმოდგენილ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესთან, ვიდრე ათობით სისტემაში წარმოდგენილ ნამდვილ რიცხვთა იგივე სიმრავლესთან.

(2) **ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა $\wp(N)$ სიმრავლე.** ამ მაგალითში ჩვენ გამოვიყენებთ მეთოდს, რომელიც არაა ცალსახად „დიაგონალური", მაგრამ საკმაოდ ახლოსაა მასთან. 4-1 თეორემის თანახმად ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ამ სიმრავლის კარდინალური რიცხვი $\aleph_0$ კარდინალზე დიდია, ამდენად აღნიშნული მაგალითი განიხილება მხოლოდ აქ წარმოჩენილი დამტკიცების მეთოდის საილუსტრაციოდ.

დავუშვათ, $\wp(N)$ სიმრავლეს აქვს იგივე კარდინალური რიცხვი, რაც ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, ე.ი. $\aleph_0$. მაშინ, შესაძლებელი იქნება $\wp(N)$ სიმრავლის ყველა წევრის, ე.ი. N სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის გადათვლა გარკვეული წრფივი მეთოდით. ვთქვათ $\wp(N)$ სიმრავლის ეს სრული გადათვლაა S_0, S_1, S_2, ... მიმდევრობა. ასეთ პირობებში ჩვენ $S_0, S_1, S_2, \ldots$ ქვესიმრავლეებიდან შემდეგი მარტივი მეთოდით შეგვიძლია ავაგოთ N სიმრავლის ახალი, მიმდევრობაში უკვე არსებულებისაგან განსხვავებული S^* ქვესიმრავლე:

დავუშვათ, რომ ნატურალური რიცხვი 0 არის S^* ქვესიმრავლის წევრი მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა 0 არ არის S_0 ქვესიმრავლის წევრი, ანუ დავუშვათ, რომ $0 \in S^*$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $0 \notin S_0$.

დავუშვათ, რომ $1 \in S^*$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $1 \notin S_1$.

დავუშვათ, რომ $2 \in S^*$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $2 \notin S_2$.

საზოგადოდ: დავუშვათ, რომ $n \in S^*$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $n \notin S_n$.

ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, რომ S^* არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ N სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომელიც განსხვავდება გადათვლაში შემავალი თითოეული ქვესიმრავლისგან სულ მცირე ერთი წევრით მაინც. თუ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის $n \in S_n$, მაშინ, ცხადია, რომ $S^* = \varnothing$, და ცხადია ისიც, რომ ასეთ პირობებში S^* ანუ $\varnothing$ არ შეიძლება შედიოდეს $S_0, S_1, S_2, \ldots$ გადათვლაში. ამდენად, ეს ჩამონათვალი არცერთ შემთხვევაში არ არის სრული და ამიტომაც $\wp(N)$ სიმრავლის კარდინალური რიცხვი $\aleph_0$ კარდინალურ რიცხვზე მეტი უნდა იყოს.

(3) სასრულ ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა ენების სიმრავლე. ვთქვათ მოცემულია ალფაბეტი $V=\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; ამ V ალფაბეტით შედგენილი **წინადადება** განვსაზღვროთ როგორც V ალფაბეტის წევრების ნებისმიერი სასრული ჯაჭვი (დავუშვათ განმეორებებიც). V ალფაბეტის წინადადებათა ნებისმიერ სიმრავლეს **V ალფაბეტზე განსაზღვრულ ენას** უწოდებენ.

თავდაპირველად დავასაბუთოთ, რომ V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა წინადადების სიმრავლის კარდინალური რიცხვია $\aleph_0$. ამისთვის ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება დალაგდეს ეს წინადადებები ერთ წრფივ ხაზში. ჯერ გავაკეთოთ ყველა 1 სიმბოლოიანი წინადადების გადათვლა, შემდეგ ყველა 2 სიმბოლოიანი წინადადებისა და ა.შ.. ყოველი ჯგუფის ფარგლებში წინადადებები შესაძლებელია ჩამოიწეროს ალფაბეტური თანამიმდევრობით, a_0 იქნება პირველი სიმბოლო, a_n კი - ბოლო. ჩამონათვალი ასე დაიწყება:

a_0
a_1
.
.
.
a_n
a_0a_0
a_0a_1
.
.
.
a_0a_n
a_1a_0
a_1a_1
.
.
.
a_1a_n
a_2a_0
.
.
.
a_na_n

$a_0a_0a_0$
:
:
$a_na_na_n$
$a_0a_0a_0a_0$
:
:
:

რამდენადაც ნათელია, რომ ყველა წინადადება შედის ამ ჩამონათვალში, ისინი შეიძლება გადაინომროს 0, 1, 2, ... რიცხვებით და ასე დამყარდეს ურთიერთცალსახა თანადობა წინადადებათა ამ სიმრავლესა და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს შორის.

მას შემდეგ, რაც დავადგინეთ, რომ V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა **წინადადებების** სიმრავლის კარდინალური რიცხვი არის $\aleph_0$, შეგვიძლია ისიც ვაჩვენოთ, რომ V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა **ენათა** სიმრავლის კარდინალური რიცხვი უფრო დიდია. გთავაზობთ ამის დამტკიცების სამ სხვადასხვა მეთოდს.

(i) (დიაგონალური მტკიცება) დავუშვათ, რომ V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა ენების სიმრავლის კარდინალური რიცხვია $\aleph_0$ და რომ L_0, L_1, L_2, ... არის ამ ენების გადათვლა. ჩვენ უკვე გვაქვს მეთოდი, რომლის საშუალებითაც გადაითვლება V ალფაბეტის ყველა წინადადება s_0, s_1, s_2, ... მიმდევრობად. ამდენად, შეგვიძლია ავაგოთ 0 და 1 ციფრებისაგან შედგენილი უსასრულო კვადრატული მატრიცა, სადაც x_i^k არის 0, თუ s_i არ შედის, ხოლო x_i^k არის 1, თუ s_i შედის L_k ენაში.

მაგალითად, ენა, რომელიც მხოლოდ კენტნომრიანი წინადადებებისგან შედგება, წარმოდგენილი იქნება 010101 მიმდევრობით. ენა, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთ სიმბოლოიან წინადადებებს ანუ მხოლოდ a_0, a_1, a_2, . . . a_n წინადადებებისგან შემდგარი ენა წარმოდგენილი იქნება მიმდევრობით, რომლის პირველი n+1 ელემენტი იქნება ერთი, ყველა დანარჩენი კი - ნული.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \dots \\
\hline
L_0 & x_0^0 & x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 & \dots \\
L_1 & x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & \dots \\
L_2 & x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & \dots \\
L_3 & x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & \dots \\
L_4 & x_0^4 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

ახლა უკვე ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი $L^*=x_0^*x_1^*x_2^*\dots x_m^*\dots$ ორობითი რიცხვით მოცემადი ენა, რომელიც განსხვავებული იქნება ზემოჩამოთვლილი ენებისაგან. ამას ასე გავაკეთებთ: ვთქვათ $x_0^*=0$, თუ $x_0^0=1$, ხოლო $x_0^*=1$ თუ $x_0^0=0$. ანალოგიურად, ვთქვათ x_1^*

განსხვავდება x^1_1, ხოლო x^*_2 განსხვავდება x^2_2 ციფრისაგან და ა.შ.; საზოგადოდ, ვთქვათ x^*_m=0, თუ x^m_m=1, ხოლო x^*_m=1, თუ x^m_m=0. აქედან და ზემოთ გაკეთებული შეთანხმებებიდან გამოდის, რომ s_m შედის L^* ენაში მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, თუ s_m არ შედის L_m ენაში, რაც იმას ნიშნავს, რომ L^* სულ მცირე ერთი წინადადებით მაინც განსხვავდება ჩამონათვალში არსებული ყველა დანარჩენი ენისაგან. იქიდან გამომდინარე, რომ ეს პროცედურა შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ნებისმიერი სასრული ალფაბეტის ენების ნებისმიერი ასეთი ჩამონათვალის მიმართ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ასეთი ჩამონათვალი საერთოდ არ შეიძლება არსებობდეს და, ამდენად, სასრული V ალფაბეტის ყველა ენების სიმრავლის კარდინალური რიცხვი მეტია $\aleph_0$ კარდინალურ რიცხვზე.

(ii) მეორე მტკიცება იმ მტკიცების ანალოგიურია, რომელიც ზემოთ მოყვანილ (2) მაგალითში $\wp(N)$ სიმრავლის მიმართ გამოვიყენეთ. ვთქვათ, S არის V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა შესაძლო წინადადებების სიმრავლე. მაშინ, რამდენადაც V ალფაბეტზე განსაზღვრული ნებისმიერი ენა არის V ალფაბეტზე განსაზღვრული წინადადებების რაღაც სიმრავლე და V ალფაბეტზე განსაზღვრული წინადადებების ყოველი სიმრავლე არის V ალფაბეტზე განსაზღვრული ენა, V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა ენების სიმრავლე არის S სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, ანუ $\wp(S)$. ახლა დავუშვათ, რომ V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა ენების სიმრავლის კარდინალური რიცხვია $\aleph_0$. მაშინ ჩვენ შეგვეძლება ერთ ჩამონათვალში ჩამოვწეროთ ყველა ენა, ანუ $\wp(S)$ სიმრავლის ყველა წევრი - $L_0, L_1, L_2, \ldots$. ახლა კი, ამ ყველაფერზე დაყრდნობით და შემდეგი ზოგადი მეთოდით ავაგოთ $L_0, L_1, L_2, \ldots$ ენებისგან განსხვავებული ახალი L^* ენა (აქ ვიყენებთ S სიმრავლის შემადგენელი წინადადებების უკვე ზემოთ დადგენილ გადათვლას). დავუშვათ, რომ $s_0 \in L^*$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $s_0 \notin L_0$ და რომ $s_1 \in L^*$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $s_1 \notin L_1$ და ა.შ.; საზოგადოდ, დავუშვათ, რომ $s_m \in L^*$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $s_m \notin L_m$. ამდენად, L^* არის S სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, რომელიც განსხვავდება $L_0, L_1, L_2, \ldots$ ჩამონათვალის თითოეული ენისაგან ერთი წევრით მაინც, რაც ადასტურებს იმას, რომ ეს ჩამონათვალი არ შეიძლება სრული იყოს. ამგვარად, დამტკიცდა, რომ V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა შესაძლო ენების სიმრავლის კარდინალური რიცხვი, რომელიც $\wp(S)$ სიმრავლის კარდინალურ რიცხვს ემთხვევა, არ შეიძლება იყოს $\aleph_0$.

(iii) მესამე მტკიცება არის ერთი ზოგადი მეთოდის ერთი კერძო მაგალითი: იმის საჩვენებლად, რომ მოცემული სიმრავლის კარდინალური რიცხვი მეტია $\aleph_0$ კარდინალურ რიცხვზე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ამ სიმრავლის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ისეთ სიმრავლესთან, რომლის შესახებაც ვიცით, რომ მისი კარდინალური რიცხვი მეტია $\aleph_0$ კარდინალზე. რამდენადაც, უკვე ვიცით, რომ [0,1] ინტერვალში ორობითი აღნიშვნებით მოცემულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის კარდინალური რიცხვი მეტია $\aleph_0$ კარდინალზე, ჩვენ V ალფაბეტზე განსაზღვრული ყველა ენათა სიმრავლის კარდინალური რიცხვის შესაფასებლად დავამყარებთ ურთიერთცალსახა თანადობას ამ სიმრავლესა და ზემოაღწერილ სიმრავლეს შორის.

ყოველი ენა წარმოვადგინოთ 0 და 1 ციფრების უსასრულო მიმდევრობის სახით ისე, როგორც ეს იყო აღწერილი პირველ დამტკიცებაში. თუმცა, ამჯერად, ჩვენ არ ვარაუდობთ, რომ ენების გადათვლა შესაძლებელია, რადგან უკვე ვნახეთ, რომ ამგვარ დაშვებას წინააღმდეგობამდე მივყავართ. ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, რომ თითოეული ენა შეიძლება დაწყვილდეს ერთადერთ ნამდვილ რიცხვთან [0,1] ინტერვალიდან, რადგან თითოეული ენის მახასიათებელი უსასრულო ათწილადი, რომელიც 0 და 1 ციფრების უსასრულო მიმდევრობაა აღნიშნავს ზუსტად ერთ, და მხოლოდ ერთ ნამდვილ რიცხვს აღნიშნული ინტერვალიდან, რაც საბოლოოდ ასრულებს წინამდებარე მტკიცებას.

ეს სამი მეთოდი თანაბრად ქმედითია. პირველ ორს ის უპირატესობა აქვს, რომ არ მოითხოვს რომელიმე ისეთი სიმრავლის წინასწარ ცოდნას, რომლის კარდინალური რიცხვიც $\aleph_0$ კარდინალზე მეტია. მაგრამ, თუკი ვიცით ასეთი სიმრავლე, ეს მესამე მეთოდი, ხშირად, უფრო მოსახერხებელიცაა. გარდა ამისა, მხოლოდ მესამე მეთოდი იძლევა საშუალებას ზუსტად დადგინდეს სიმრავლის კარდინალური რიცხვი იმ სიმრავლის მეშვეობით, რომლის კარდინალური რიცხვი უკვე ცნობილია. ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში ყველა იმ სიმრავლეს, რომლის კარდინალური რიცხვიც $\aleph_0$ კარდინალურ რიცხვზე მეტი იყო, ჰქონდა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ტოლი კარდინალური რიცხვი, თუმცა, განხილულ მაგალითთა უმეტესობაში ჩვენ ეს არ დაგვიმტკიცებია. არადა, ჩვენ არ შეგვიძლია ასეთი ფაქტი თავისთავად ცხადად ჩავთვალოთ, რადგან, როგორც უკვე ვნახეთ, არსებობს $\aleph_0$ კარდინალურ რიცხვზე უფრო დიდი კარდინალური რიცხვების ფაქტიურად უსასრულო რაოდენობა.

სიმრავლეს, რომელიც არ არის თვლადი, **არათვლადს** ანუ **არაგადათვლად უსასრულობას** უწოდებენ.

4.4 უსასრულო და შემოუსაზღვრელი

ხშირად უჭირთ ,,უსასრულო‘‘ და ,,შემოუსაზღვრელი‘‘ ტერმინებით მოცემული ცნებების გარჩევა, განსაკუთრებით ისეთ გამონათქვამებში, როგორიცაა ‘ინგლისური წინადადებების სიგრძე შემოუსაზღვრელია’ ან ‘ინგლისური წინადადებები სიგრძით შემოუსაზღვრელია’. **შემოუსაზღვრელი** ნიშნავს ‘ზედა ზღვრის არმქონეს’, ე. ი. ისეთი ზღვრული მნიშვნელობის არმქონეს, რომელსაც უტოლდება ან რომელზეც ნაკლებია ყველა სხვა შესაძლო მნიშვნელობა. ორივე ციტირებული წინადადება უბრალოდ იმას ნიშნავს, რომ არ არსებობს ისეთი ფიქსირებული სიგრძე, რომ ნებისმიერი ინგლისური წინადადების სიგრძე ან მას უტოლდებოდეს ან მასზე ნაკლები იყოს და ეს არ ეწინააღმდეგება გამონათქვამს, რომ ყველა (ანუ თითოეული) ინგლისური წინადადება სასრული სიგრძისაა. იმ დაშვებიდან, რომ ინგლისური წინადადებების სიგრძე არის შემოუსაზღვრელი, შეიძლება გაკეთდეს დასკვნა, რომ ინგლისურ წინადადებათა სიმრავლე უსასრულოა (იხ. მომდევნო სავარჯიშოებში მეოთხე ამოცანა), მაგრამ ასეთი დაშვების საფუძველზე არ შეიძლება დავასკვნათ, რომ ერთი რომელიღაც ინგლისური წინადადების **სიგრძე** უსასრულოა.

სხვა მაგალითები:

(1) ამოზნექილი მრავალკუთხედების გვერდების რაოდენობა შემოუსაზღვრელია, რამდენადაც ნებისმიერი n გვერდიანი მრავალკუთხედისთვის არსებობს მრავალკუთხედი გვერდების $n+1$ რაოდენობით. მიუხედავად ამისა, ცხადია, რომ ნებისმიერ მრავალკუთხედში გვერდების რაოდენობა ყოველთვის სასრულია.

(2) განვიხილოთ $0<x<1$ უტოლობით განსაზღვრული ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ამ სიმრავლეში არ არსებობს უდიდესი ნამდვილი რიცხვი, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ამ სიმრავლეში ნამდვილ რიცხვთა სიდიდე შემოსაზღვრულია, რამდენადაც რიცხვი 1 სიმრავლეში შემავალ ყველა რიცხვზე მეტია. ამგვარად, ამ შემთხვევაში სიმრავლის წევრთა სიდიდე შემოსაზღვრულია, მაგრამ თავად სიმრავლე უსასრულოა.

(3) რომელიმე კონკრეტული ინგლისური ლექსიკონის გათვალისწინებით იმ ინგლისური წინადადებების სიგრძე, რომლებშიც არ მეორდება არცერთი სიტყვა, შემოსაზღვრულია. ასეთ წინადადებათა სიგრძის ზედა საზღვრად გამოდგებოდა მოცემული ლექსიკონის სიტყვების

საერთო რაოდენობა. ამ საკითხის განხილვისას არა აქვს მნიშვნელობა, რეალურად შეიძლება თუ არა აიგოს ასეთი სიგრძის წინადადება.

როგორც ამ მაგალითებიდან ჩანს, ტერმინები 'შემოსაზღვრული' და 'უსაზღვრო' გამოიყენება ფუნქციათა მნიშვნელობების ან სიმრავლის წევრების სხვადასხვა ტიპის მახასიათებლების მიმართ; ეს ტერმინები არ აღწერენ სიმრავლეთა ოდენობას, როგორც ამას აკეთებს ტერმინი 'სასრული' ან 'უსასრულო'. მკაცრად თუ ვიმსჯელებთ, უაზრობაა 'შემოუსაზღვრელ სიმრავლეზე' ლაპარაკი, თუმცა ასეთი ფრაზა გარკვეულ კონტექსტში შეიძლება რომელიმე უფრო გრძელი ფრაზის შემოკლებულ ფორმად იქნეს გაგებული. გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად უმჯობესი იქნებოდა საერთოდ არ გამოგვეყენებინა ტერმინები 'შემოუსაზღვრელი' და 'შემოსაზღვრული' და ზემომოტანილი წინადადების მსგავსი ფრაზები შეგვეცვალა ასეთი გამონათქვამით - 'ინგლისურ ენაში არ არსებობს წინადადებების სიგრძის შემზღუდავი რაიმე ზედა საზღვარი'. ამგვარად, როდესაც ტექსტში შეგვხვდება ტერმინი 'შემოუსაზღვრელი', კარგი იქნება თუ კითხვის გაგრძელებამდე ჯერ გავარკვევთ, ხომ არ არის შესაძლებელი მისი ზემომონიშნული ფორმით შეცვლა ისე, რომ ამან რაიმე ორაზროვნება არ გამოიწვიოს.

სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ, რომ სიმრავლეთა შორის ტოლოდენობის მიმართება ფაქტიურად ეკვივალენტობის მიმართებაა.

2. აჩვენეთ, რომ 10-ის მთელი ხარისხების სიმრავლე {10, 100, 1000, 10,000, ...} თვლადი უსასრულო სიმრავლეა.
3. აჩვენეთ, რომ ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა.

4. ვთქვათ, ქვემოთ მოცემული დაშვებები ჭეშმარიტია:

   (i) ინგლისური წინადადებების ჩასაწერად საკმარისია სასრული ალფაბეტი, რომელიც შედგება 26 ასოსგან, პუნქტუაციის ნიშნებისაგან და ცარიელი ადგილისაგან.

   (ii) ყოველი წინადადება არის (i)-ში მოცემული ალფაბეტის სასრული ჯაჭვი.

   (iii) ინგლისური წინადადებებისთვის არ არსებობს სიგრძის ზედა ზღვარი. ე.ი. ნებისმიერი წინადადებისათვის შეიძლება აიგოს უფრო გრძელი წინადადება მასზე სხვა წინადადების მიერთებით.

როგორია ამ შემთხვევაში ყველა ინგლისური წინადადების სიმრავლის კარდინალური რიცხვი? - პასუხი დაასაბუთეთ.

5. სასტუმროს მეპატრონეს აქვს სასტუმრო, რომლის ოთახების რაოდენობა არის თვლადი უსასრულობა; მათი ნომრებია 1, 2, 3, 4, 5. ... . შაბათს ღამით სასტუმროში აღარ იყო თავისუფალი ოთახი, მაგრამ მოვიდა ჯო დოუ და დაბინავება მოითხოვა. სასტუმროს თავაზიანმა მეპატრონემ გამოიყენა თავისი შიდა ტელეფონი და თითოეულ სტუმარს თხოვა, რომ თუ მისი ოთახის ნომერი იყო n, გადასულიყო ოთახში ნომრით $n+1$. ამგვარად, ჯო დოუს შეხვდა ოთახი 1. მაგრამ, კვირას ყველამ კიდევ ერთი ღამით დარჩენა გადაწყვიტა. ამასობაში მოვიდა ფეხბურთის გუნდი მოთამაშეთა უსასრულო თვლადი რაოდენობით და ყოველი წევრისთვის თითო ოთახი მოითხოვა. როგორ განათავსებს მათ სასტუმროს თავაზიანი მფლობელი?

6. წარმოვიდგინოთ, რომ დედამიწა მოთავსებულია გიგანტურ კუზე, ეს კუ კი ორ სხვა გიგანტურ კუზეა მოკალათებული, ის ორი კუ - სამ კუზე და ასე ‘დაუსრულებლად’ (ანუ არ არსებობს კუთა ყველაზე ქვედა ფენა).[1]

(ა) ვთქვათ, ყოველი კუ არის რომელიმე მონოთეისტური სექტის ღვთაება (ყოველ სექტაზე - თითო კუ). როგორია ყველა ასეთი სექტების სიმრავლის კარდინალური რიცხვი?

(ბ) წარმოვიდგინოთ, რომ ყველა ამ კუთა სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე არის რომელიმე სექტის ღვთაება (ათეისტურის, მონოთეისტურის, პოლითეისტურის; ეს უკანასკნელი მოიცავს ღვთაებათა როგორც სასრულ, ისე უსასრულო რაოდენობას). როგორია ყველა ასეთი სექტების სიმრავლის კარდინალური რიცხვი? (გაითვალისწინეთ, რომ ორ განსხვავებულ სექტას, მიუხედავად იმისა, რომ ისინი არ ეთაყვანებიან კუთა ზუსტად ერთსა და იმავე სიმრავლეს, შეიძლება რამდენიმე საერთო კუ ჰყავდეს ღვთაებად.)

7. კარდინალური რიცხვები ქმნიან თავის საკუთარ გამოთვლით სისტემას, რომელსაც აქვს თავისი **კარდინალური არითმეტიკა**. ამ სავარჯიშოში მოცემულია ამ სისტემის ძირითადი ცნებები. ვთქვათ, A და B არის არათანამკვეთი სიმრავლეები, სასრული ან უსასრულო, და $a=|A|$ და $b=|B|$. ახლა განვსაზღვროთ კარდინალური მიმატება (აღინიშნება $\oplus$) და კარდინალური გამრავლება (აღინიშნება $\otimes$):

---

[1] ამ ამოცანას საფუძვლად უდევს ლეგენდარული ამბავი, რომელიც მოთხრობილია ჯ. რ. როსის ასევე ლეგენდარული, მაგრამ ამავე დროს სრულიად რეალური სადოქტორო დისერტაციის შესავალში **(Constraints on Variables in Syntax; by J. R. Ross, MIT 1967)**. რამდენადაც ამ დისერტაციის მხოლოდ ნაწილებია გამოქვეყნებული, ჩვენ ამ ანეკდოტს მოგაწვდით ისე, როგორც ეს თავად როსისგან მოგვისმენია: უილიამ ჯეიმსი კითხულობდა ლექციას კოსმოლოგიასა და მზის სისტემის სტრუქტურაზე. ლექციის შემდეგ მასთან პატარა ხანდაზმული ქალბატონი მიდის და ეუბნება: „მისტერ ჯეიმს, თქვენი თეორია იმის შესახებ, რომ მზე მზის სისტემის ცენტრია და რომ დედამიწა არის ბურთი, რომელიც მის გარშემო ბრუნავს, ბევრისთვის საკმაოდ დამაჯერებლად ჟღერს, მაგრამ მცდარია. მე უკეთესი თეორია მაქვს“. „რომელი თეორია, მადამ?“ თავაზიანად დაინტერესდა ჯეიმსი. „ამ თეორიის თანახმად, ჩვენ იმ დედამიწის ქერქზე ვცხოვრობთ, რომელიც გიგანტური კუს ბაქანზეა მოთავსებული“. ჯეიმსმა არ მოისურვა ამ პატარა აბსურდული თეორიის გაცამტვერება თავის მეცნიერულ არგუმენტთა მთელი არსენალის გამოყენებით და გადაწყვიტა თავაზიანად მიეთითებინა ოპონენტისთვის მისი პოზიციის სუსტ მხარეებზე. „თუ თქვენი თეორია სიმართლეს შეესაბამება, მადამ, ის კუ რაღაზე დგას?“ იკითხა მან. „ძალიან ჭკვიანი კაცი ხართ, მისტერ ჯეიმს, და ეს ძალიან კარგი შეკითხვაა“, უთხრა პატარა ხანდაზმულმა ქალბატონმა, „მაგრამ მე მაქვს პასუხი. აი ისიც: პირველი კუ დგას მეორე, გაცილებით მასზე დიდი კუს ბაქანზე, რომელიც დგას ზუსტად მის ქვეშ“. „კი მაგრამ, ეს მეორე კუ რაღაზე დგას?“ დაინტერესდა ჯეიმსი. ამაზე კი პატარა ხანდაზმულმა ქალბატონმა რიხით მიუგო: „არაფერი გამოგივათ, მისტერ ჯეიმს, — კუთა რიგს დასასრული არ აქვს“.

$$a \oplus b = |(A \cup B)|$$

$$a \otimes b = |(A \times B)|$$

როცა ორივე A და B სიმრავლე სასრულია, კარდინალური მიმატება და გამრავლება იგივე შედეგს იძლევა, რასაც შესაბამისი არითმეტიკული ოპერაციები მთელ რიცხვებზე. მაგრამ, როცა ერთ-ერთი მათგანი უსასრულოა ეს ოპერაციები აღარ ემთხვევა ნაცნობ არითმეტიკულ ოპერაციებს. იპოვეთ ისეთი A და B სიმრავლეების მაგალითები, რომელთათვისაც ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობები:

(ა) $\aleph_0 \oplus 1 = \aleph_0$

(ბ) $\aleph_0 \otimes 2 = \aleph_0$

(გ) $\aleph_0 \oplus \aleph_0 = \aleph_0$

(დ) $\aleph_0 \otimes \aleph_0 = \aleph_0$

არის თუ არა ოპერაციები $\oplus$ და $\otimes$ კომუტაციური და ასოციაციური?

8. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $\aleph_0$ არის უმცირესი უსასრულო კარდინალური რიცხვი. განვიხილოთ ამ მტკიცების შემდეგი დამაბნეველი კონტრმაგალითი. ავირჩიოთ ისეთი x კარდინალური რიცხვი, რომ $2^x = \aleph_0$. x არ შეიძლება იყოს სასრული, რადგან 2-ის სასრულ რიცხვზე ახარისხებით, მივიღებთ სასრულ რიცხვს; მაგრამ x არც $\aleph_0$-ის ტოლი შეიძლება იყოს, რადგან კანტორის თეორემის თანახმად $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. აქედან გამომდინარე, x არის $\aleph_0$-ზე მცირე უსასრულო კარდინალური რიცხვი. - რა შეცდომაა ამ მსჯელობაში?

ნაწილი B
ლოგიკა და ფორმალური სისტემები

თავი 5
ლოგიკისა და ფორმალური სისტემების საასფუძვლო ცნებები

5.1 ფორმალური სისტემები და მოდელები

ფორმალიზაცია და აქსიომატიზაცია მნიშვნელოვანია მეცნიერული თეორიების დაფუძნების სულ უფრო მზარდი მოთხოვნებიდან გამომდინარე. ევკლიდემ დააფუძნა გეომეტრია იმის ჩვენებით, რომ სასაყრდენე ჭეშმარიტებებად მიჩნეული და, შესაბამისად, აქსიომებად ანუ ძირეულ დებულებებად წოდებული მცირე ოდენობის ფაქტებიდან შესაძლებელია ლოგიკურად გამოვიყვანოთ გეომეტრიული ფიგურების უკვე კარგად ცნობილი თვისებების ამსახველი ჭეშმარიტი გამონათქვამების საკმარისად დიდი ნაწილი. ნიუტონმა კი, იმის ჩვენებით, რომ სამი ძირეული დებულების საფუძველზე შესაძლებელია აიხსნას პლანეტებისა და საგანთა მოძრაობის უკვე ცნობილი კანონები, დააფუძნა მექანიკა. ორივე შემთხვევაში პირველსაწყისი დაშვებები მიჩნეული იყო ჭეშმარიტ დებულებებად. ევკლიდეს სისტემაში ისინი განიხილებოდა ,,თვითცხად'', ნიუტონის სისტემაში კი - ,,ცდისეულად დადასტურებულ'' ჭეშმარიტებებად. როგორც პირველ, ისე მეორე შემთხვევაში ეს თეორიული სისტემები დაკავშირებული იყო გარკვეულ ობიექტებთან. ევკლიდესთან ეს ობიექტები იყო წერტილები და წრფეები, ნიუტონის შემთხვევაში კი, საქმე გვქონდა უშუალოდ ფიზიკურ ობიექტებთან.

არაევკლიდური გეომეტრიის ,,აღმოჩენის'' ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი იყო ის, რომ გასაგები გახდა თეორიული სისტემების ფორმალური ანუ სინტაქსური და ინტერპრეტაციული ანუ შინაარსული ასპექტების ურთიერთგანცალკავების როგორც შესაძლებლობა, ისე საჭიროება.

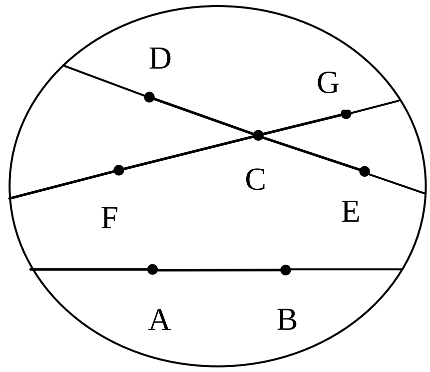
ევკლიდეს აქსიომებს შორის არის ,,პარალელობის პოსტულატად'' წოდებული ერთი ცნობილი დებულება, რომელიც შემდეგნაირად ყალიბდება.

პარალელობის პოსტულატი: ნებისმიერ L წრფეზე არა მდებარე ნებისმიერ P წერტილზე გაივლება L წრფის პარალელური (ე.ი. არაგადამკვეთი) ერთი, და მხოლოდ ერთი L′ წრფე.

იმის გამო, რომ ეს პოსტულატი 'ნაკლებ თვითცხადად' მიიჩნეოდა, განხორციელდა მისი დანარჩენებისაგან გამოყვანის მრავალი მცდელობა. თუმცა, ყველა ეს მცდელობა წარუმატებლად დასრულდა. ნ. ლობაჩევსკიმ და ჯ. ბოლუამ XIX საუკუნის დასაწყისში ერთმანეთისაგან სრულიად დამოუკიდებლად კიდევ ერთხელ ცადეს პარალელობის პოსტულატის დამტკიცება საწინაღმდეგოს დაშვების გზით, რომელიც ჩვენ უკვე განვიხილეთ 3.3 პარაგრაფში მიმართებებისათვის დამატების თვისების მტკიცებისას. მათ კვლევა დაიწყეს დაშვებით, რომ P წერტილზე შეიძლება გავლებულ იქნეს L წრფის პარალელური (ე.ი. არაგადამკვეთი) ერთზე მეტი წრფე, მაგრამ ნაცვლად იმისა, რომ მიეღოთ ნავარაუდევი წინააღმდეგობა, მათ ფაქტიურად პირველად ააგეს პირველი არაევკლიდურად წოდებული გეომეტრია. მათ მიერ შემოთავაზებული აქსიომათა სისტემა აღმოჩნდა არწინააღმდეგობრივი ანუ თავსებადი (ამ ცნებებს ჩვენ განვიხილავთ 8 თავში). მოგვიანებით რიმანმა ააგო კიდევ ერთი არაევკლიდური გეომეტრია, რომელშიც პარალელობის პოსტულატი ჩანაცვლებული იყო პოსტულატით, რომლის მიხედვით L წრფის გარეთ მდებარე P წერტილზე საერთოდ შეუძლებელი იყო L წრფის პარალელური წრფის გავლება. ანუ, ამ პოსტულატის მიხედვით ნებისმიერი ორი განსხვავებული წრფე აუცილებლად კვეთდნენ ერთმანეთს. ამ შემთხვევაშიც არანაირი წინააღმდეგობა არ წარმოიქმნა. ეს აღმოჩენები არანაირად არ უარყოფდნენ ევკლიდეს გეომეტრიას. თუმცა. მათ საზოგადოდ განაპირობეს ფუნდამენტური ცვლილებები აქსიომებთან დამოკიდებულებაში. ადრე აქსიომები განიხილებოდა როგორც აბსოლუტური ჭეშმარიტების გამომცნობი და აღმწერი საშუალებები, მაგრამ რიმანის, ლობაჩევსკის და ბოლუას შემდეგ დაიწყო მათი არააბსოლუტურ, არამედ შეთანხმებით ხასიათის შინაარსებად გადააზრება. ამასთან, ამ აქსიომებიდან ლოგიკური გამოყვანებით მიღებულ დებულებებს განიხილავდნენ როგორც უკვე არსებული შეთანხმებების საფუძველზე გარკვეულად გამოთვლადი მნიშვნელობების მქონე გამონათქვამებს. ამგვარად, ჩვენ აღარ ვაყენებთ კითხვას არის თუ არა რომელიმე ერთი გარკვეული კონკრეტული აქსიომა ჭეშმარიტი მთლიანი, აბსოლუტური აზრით. ამის ნაცვლად ვამბობთ, რომ იგი, ისევე როგორც დანარჩენი სხვა, შეიძლება იყოს, ან

არ იყოს ასეთი. - სხვაგვარი მიდგომით აზრი არ ექნებოდა აქსიომათა გარკვეული ერთობლიობის სხვადასხვა შესაძლო მოდელების ძიებას.

ამ მიდგომებით ევკლიდეს გეომეტრია მისთვის დამახასიათებელი ჩვეულებრივი ტერმინოლოგიით უნდა გავიაზროთ ევკლიდის აქსიომატიზაციის ერთ წინასწარნაგულისხმევ კერძო მოდელად, რომელიც წარმოადგენს წერტილების, წრფეებისა და იმ ფიგურების აბსტრაგირებულ ერთობლიობას, რომლებიც ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით იგებიან. ამგვარად, იმისათვის, რომ იგი გავიაზროთ ფორმალური სისტემის სახით, ჯერ უნდა შევუსაბამოთ სიტყვებს 'წერტილი' და 'წრფე' პირველსაწყისი აღნიშვნები, ვთქვათ ისეთები. როგორებიცაა 'p' და 'L'. შემდგომ ამისა, ისეთი ტერმინებისა და ცნებების განსაზღვრებებში როგორებიცაა 'პარალელურობა', 'სამკუთხედი' და ა.შ. სიტყვები 'წერტილი' და 'წრფე' თანდათანობითი უნდა ჩავანაცვლოთ ამ აღნიშვნებით, რაც ამ ცნებების 'წერტილისა' და 'წრფის' პირველსაწყისი ცნებებით განსაზღვრას ნიშნავს. ამის შემდეგ, თუ სიბრტყეზე ავიღებთ რაიმე ფიქსირებულ წრეწირს და 'p' აღნიშვნას (ე.ი. 'წერტილს') გავიაზრებთ როგორც 'ამ წრეწრის შიდა წერტილი', ხოლო 'L' აღნიშვნას (ე.ი. 'წრფეს') როგორც 'ამ წრეწირის ღია ბოლოებიანი ქორდა' ('წრეწირის ღია ბოლოებიანი ქორდა' არის წრეწირის შიგნით მდებარე სწორი ხაზი, რომელიც რაგინდ უახლოვდება წრეწირს, მაგრამ არ ეხება მას), მაშინ ვნახავთ, რომ მოცემულ წერტილზე შესაძლებელია მოცემული წრფის ერთზე მეტი პარალელური ანუ არაგადამკვეთი წრფის გავლება (ნახ.5.1).



ნახაზი 5-1

მართლაც, თუ გამოვალთ AB წრფიდან და C წერტილიდან, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ, მაგალითად, DCE და FCG წრფეები, რომელთაგან თითოეული AB წრფის პარალელურია, რამდენადაც, როგორც არ უნდა გავაგრძელოთ, ანუ რაც არ უნდა ახლოს მივიყვანოთ ეს წრფეები წრის საზღვრებთან, ისინი არასდროს არ გადაკვეთენ AB წრფეს. აქედან გამომდინარე, ეს ინტერპრეტაცია არ აკმაყოფილებს ევკლიდეს აქსიომატიკას და, ამდენად, იგი მის მოდელს არ წარმოადგენს. ეს ინტერპრეტაცია არის მოდელი ბოლუა-ლობაჩევსკის არაევკლიდური გეომეტრიისა. ხშირად, ჩვენ სწორედ მოდელის აგების მეშვეობით ვამტკიცებთ ხოლმე ამა თუ იმ აქსიომათა სისტემის თავსებადობას ('თავსებადობა' და 'აქვს მოდელი' ცნებების ურთიერთკავშირი განიხილება 8 თავში (ქვენაწილი 2)). ნებისმიერი სისტემა ან/და სტრუქტურა რომელშიც ევკლიდეს ყველა აქსიომა არის ჭეშმარიტი იწოდება ევკლიდეს აქსიომათა სისტემის მოდელად. სიბრტყის გეომეტრია არის ევკლიდეს სისტემის **სტანდარტული** ანუ **ნაგულისხმევი** მოდელი, რადგან უპირველესად სწორედ ის ჰქონდა ,,აზრად'' ევკლიდეს, როდესაც ანვითარებდა მისეულ აქსიომატურ თეორიას.

ზოგადი ლოგიკური თვალსაზრისებით კვანტური მექანიკის განვითარება ნიუტონის ფიზიკურ სისტემასთან მიმართებაში ზემოგანხილულის ანალოგიური მოვლენაა. დღესაც ჭეშმარიტად ითვლება ყველა ის კანონი, რომელიც ნიუტონმა გამოიყვანა მის მიერვე შერჩეული სამი ძირითადი პრინციპის საფუძველზე. მაგრამ, ახლა მიიჩნევა, რომ ეს კანონები სამართლიანია გარკვეულად გამარტივებულ, მაკროსკოპულ სამყაროში. ნამდვილად არსებული ფიზიკური სამყარო დღეს აღარ განიხილება ნიუტონის ფიზიკური სისტემის მოდელად.

ზემოაღწერილ ფიზიკურ და გეომეტრიულ შემთხვევებში ჯერ აიგო კონკრეტული მოდელები, მათი ფორმალიზება გაკეთდა მოგვიანებით. ეს გზა ერთ-ერთი მიღებული მეთოდია სხვადასხვა ემპირიკული და მათემატიკური ხასიათის კვლევების შემთხვევაში, თუმცა იგი არ არის მეცნიერული ძიებების დღეს გამოყენებადი ერთადერთი მეთოდი. დადასტურდა, რომ მომგებიანია ფორმალური სისტემების აბსტრაქტული შესწავლა, რამდენადაც, როგორც აღმოჩნდა, მთელ რიგ განსხვავებულ სისტემებს აქვთ თვისობრივად ურთიერთმსგავსი სტრუქტურები, რაც მათი ფორმალიზებისას მსგავსი მიდგომების გამოყენებისკენ გვიბიძგებს. ფორმალური სისტემის აბსტრაქტული შესწავლა იძლევა შედეგებს, რომლებიც საზოგადოდ ძალისმიერია ფორმალური სისტემის ნებისმიერ შესაძლო მოდელში. გარდა ამისა, თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ გარკვეული სისტემა მისი ზოგადი ფორმალური სტრუქტურით ეკვივალენტურია რაიმე სხვა კარგად ნაცნობი სისტემისა, მაშინ ჩვენ საშუალება გვეძლევა უკვე ნაცნობ სისტემაში მიღებული ცოდნა გადავიტანოთ ამ ახალ, ჯერ კიდევ შეუსწავლელ სისტემაში.

საზოგადოდ, ნებისმიერი ფორმალური სისტემა შედგება:

(i) ძირითადი ცნებების რაიმე არაცარიელი სიმრავლისაგან;

(ii) აქსიომებისაგან ანუ, ძირითადი ცნებების შესახებ ჩამოყალიბებული და ჭეშმარიტად მიჩნეული დებულებებისაგან;

(iii) საშუალებებისაგან, რომელთა მიხედვით აქსიომებზე დაყრდნობილებს გამოგვყავს ახალი ჭეშმარიტი დებულებები. ესენია:

(ა) ან გამოყვანის ცხადად აღწერილი რეკურსული წესები;

(ბ) ან იმ ენის ლოგიკა, რომლითაც აქსიომებია ჩამოყალიბებული. - როგორც წესი ეს არის პრედიკატთა ლოგიკა;

(გ) ან არ არის გამოყვანის არანაირი ცხადად მონიშნული წესები და, შესაბამისად, დასაშვებია ნებისმიერი რამის გამოყვანა ,,რაც კი ლოგიკურად გამოიყვანება'' აქსიომებიდან.

სინტაქსურად უფრო მკაცრი ფორმალური სისტემები (ერთ-ერთ ასეთს ჩვენ გავეცნობით მერვე თავში) როგორც წესი სარგებლობენ გამოყვანის (iiiა) სახის საშუალებებით.

სხვადასხვა სამეცნიერო თეორიებისა და მათემატიკის სხვადასხვა მიმართულებების ფორმალიზებისას, როგორც წესი, ცხადად ანიშნებენ ან, უკიდურეს შემთხვევაში, ნაგულისხმეობით თანხმდებიან იმ სასაფუძვლო ლოგიკისა და გამოყვანის იმ სასაფუძვლო ფორმების თაობაზე, რომლებითაც მათ მსჯელობებისას უნდა ისარგებლონ. ამასთან, მართებული მსჯელობებისა და გამოყვანებისთვის საზოგადოდ დამახასიათებელი ფორმები

ლოგიკის ძირითადი შესასწავლი ობიექტებია. - ამ წიგნის ამ ნაკვეთის უმეტესი ნაწილი სწორედ ამ საკითხების ზოგად განხილვას ეძღვნება. ამგვარად, ჩვენ ვიყენებთ ლოგიკას ანუ ლოგიკურ ენას რათა ვიმსჯელოთ ისეთ სისტემებზე, როგორებიცაა სიმრავლეთა თეორია, გეომეტრია, ფიზიკა. ენა, რომლითაც ჩვენ ვმსჯელობთ სხვა სისტემებზე, **მეტა-ენად**, ხოლო ენა, რომლითაც სისტემაში ვმსჯელობთ სისტემის ობიექტებზე, **ობიექტურ-ენად** იწოდება. გასაგებია, რომ განსხვავება ამ ორი ტიპის ენებს შორის პირობითია. ასე მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ სიმრავლეთა თეორიის ენა, რომელიც ამ თეორიაში ობიექტურ-ენად განიხილება, როგორც მეტა-ენა და მისი მეშვეობით რომელიმე ფიზიკურ სისტემაზე ვიმსჯელოთ. სხვადასხვა ბუნებრივი ენები ქმნიან ენათა იმ ერთადერთ საკმარისად მდიდარ კლასს, რომელთაც ახასიათებთ რა მათივე მეტა-ენის სრულად მიერთებულობა, საკუთარ თავში არ განარჩევენ და ერთმანეთისაგან არ გამოყოფენ მეტა-ენასა და ობიექტურ-ენას. - ჩვენ ინგლისურზე ინგლისურად ვსაუბრობთ. თუმცა, ლინგვისტიკაში, აგრეთვე განვითარებულია სპეციალური ენა, რათა ვისაუბროთ კონკრეტული წინადადებების კონკრეტულ გრამატიკულ სტრუქტურებზე და კონკრეტული სიტყვების კონკრეტულ გრამატიკულ თუ არაგრამატიკულ მნიშვნელობებზე.

ამ წიგნის მერვე თავში, ჩვენ დავუბრუნდებით ფორმალურ სისტემებთან, მათ აქსიომატიზაციებთან და მოდელებთან დაკავშირებულ საკითხებს, სადაც დავეყრდნობით უკვე მაშინ საკმარისი მოცულობით დაზუსტებულ ზოგად ლოგიკურ ცოდნას და განვიხილავთ რამდენიმე საინტერესო მაგალითს. გარდა ამისა, ვნახავთ, თუ როგორ კეთდება თავად ლოგიკური სისტემის აქსიომატიზაცია. მანამდე კი, შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ, ნებისმიერი ლოგიკური თეორიის აქსიომატიზირებული ვარიანტი უნდა შედგებოდეს:

(i) ენობრივი გამოსახულებების განმსაზღვრელი სინტაქსისაგან;

(ii) აქსიომათა სისტემისაგან, რომელიც ამავე თეორიის ენობრივი საშუალებებით მოიცემა;

(iii) გამოყვანის წესების ცხადად მინიშნებული სიმრავლისაგან, რომელთა მეშვეობით უკვე დამტკიცებულ თეორემებსა და აქსიომებზე დაყრდნობით გამოიყვანება (მტკიცდება) ახალი თეორემები.

5.2 ბუნებრივი ენები და ფორმალური ენები

ის ენები, რომელზედაც ვმეტყველებთ და რომლითაც ჩვეულებრივ ვურთიერთობთ ხოლმე ერთმანეთთან არიან ენები, რომელთაც ჩვენ **ბუნებრივ ენებს** ვუწოდებთ. ბუნებრივი ენები არიან ბავშვობაში პირველ ენად შეძენილი (გამომუშავებული) ენები, ანუ ის ენები, რომლითაც ვსარგებლობთ სრულიად ნებისმიერი საურთიერთობო მიზნის შემთხვევაში. მეორე მხრივ, ფორმალური ენები, როგორც წესი, შექმნილია (აგებულია) ადამიანების მიერ გარკვეული პრაქტიკული მიზნების გათვალისწინებით. მაგრამ, მიუხედავად იმისა, რომ ეს ენები არიან ხელოვნურად შექმნილი ენები, გამოყენებისას მათ შეიძლება განიცადონ გარკვეული გაფართოებითი, ევოლუციური ხასიათის ცვლილებები. ფორმალური ენის ერთ-ერთი მაგალითია სიმრავლეთა თეორიის ენა, რომელსაც თქვენ უკვე გაეცანით ამ წიგნის A ნაწილში. ფორმალური ენების მაგალითებია აგრეთვე ლოგიკური ენა, რომელსაც გავეცნობით ამ ნაწილის მეექვსე და მეშვიდე თავებში, ჩვეულებრივი არითმეტიკის ენა, პროგრამული ენები, როგორებიცაა პასკალი, ფორტრანი, პროლოგი, ლისპი და ყველა მათი შესაძლო 'დიალექტები'. გარდა ამისა, არის კიდევ გარკვეული შეთანხმებითი შინაარსის მქონე პირობით აღნიშვნათა

ისეთი სისტემები, რომლებიც ასევე შეიძლება იწოდებოდნენ 'ენად'. მაგალითად, ასეთებია: მუსიკალური სანოტო სისტემა, საგზაო შუქნიშანთა სისტემა, მორზეს კოდირება და ა.შ.. მიუხედავ ამისა, მათ ჯერ-ჯერობით ჩვენი განხილვის საგანთა არის გარეთ დავტოვებთ. ლინგვისტების და განსაკუთრებით კი სემანტიკოსების ერთ-ერთი ყველაზე უფრო მეტად მნიშვნელოვანი მიზანი არის ისეთი ფორმალური ენის მოძიება, რომელიც სრულად წარმოაჩენს ბუნებრივი ენების სიღრმისეულ არსს. კერძოდ, ბუნებრივი ენების შინაარსული მხარის აღწერა-დახასიათება არის ძირითადი მიზანი ნებისმიერი გრამატიკის სემანტიკური შემადგენლისა, მიუხედავად იმისა, ის არის ფორმალური თუ ბუნებრივი ენის გრამატიკა. ისევე როგორც ნებისმიერი სხვა სახის მეცნიერული კვლევა, სემანტიკური პრობლემების კვლევაც ორიენტირებულია პრობლემის სრული გადაჭრისკენ თანდათანობით მსვლელობაზე და, შესაბამისად, იგი მიზნობრივად ირჩევს შინაარსის პრობლემის მხოლოდ გარკვეულ ნაწილებს და ამ ნაწილების მხოლოდ გარკვეულ შემადგენლებს და ფორმალურ ენებს იყენებს როგორც საშუალებას ამ არჩეული საკითხების საანალიზოდ. ლოგიკა მათემატიკის დაფუძნების პრობლემატიკის ის განშტოებაა, რომლის ფარგლებშიც განვითარდა და ჩამოყალიბდა მთელი რიგი განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანი ფორმალური ენები და თეორიები. ამ თეორიებს შორისაა პირველი რიგის ლოგიკაც, რომელიც ამ ნაწილში შემოიტანება და რომელიც დღეს ერთ-ერთი ყველაზე უფრო მეტად ცნობილი და ყველაზე უფრო ხშირად გამოყენებადი თეორია. უკვე აღინიშნა, რომ ლოგიკური ენა შეიძლება გამოყენებულ იქნეს როგორც მეტა-ენა. ასეთ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე, როდესაც მსჯელობა მიდის სიმრავლეთა თეორიის ობიექტებზე და, საზოგადოდ, სიმრავლეთა თეორიაზე, როგორც ობიექტურ-თეორიაზე. აღსანიშნავია, რომ ლოგიკური ენა შეიძლება ასევე გამოყენებულ იქნეს სხვა ნებისმიერ ობიექტურ თეორიაშიც აქსიომებიდან თეორემების გამომყვანი მსჯელობების ფორმალიზაციის მიზნით. ამ წიგნის ერთ-ერთი მიზანი არის საფუძვლების განვითარება ლოგიკის და ფორმალური ენების ისეთ ბუნებრივ ენებში გამოყენებისათვის, როგორიც ინგლისურია. წიგნის D ნაწილი ეძღვნება ამგვარ გამოყენებებს და, გარდა ამისა, რიგ აქტუალურ საკითხებს ბუნებრივი ენების სემანტიკაში. თუმცა, მანამდე, ჩვენ იძულებულნი ვართ შევისწავლოთ ლოგიკა და ისიც, თუ როგორ გამოვიყენოთ იგი. თუმცა, ისიც ცხადია, რომ ლოგიკის შესწავლას უკავშირდება არა მხოლოდ ზემოაღნიშნული, არამედ სხვა მნიშვნელოვანი გამოყენებებიც როგორც ლინგვისტურ, ისე არალინგვისტურ სფეროებში.

5.3 სინტაქსი და სემანტიკა

ბუნებრივ თუ ფორმალურ ენობრივ სისტემებში განსხვავება **სინტაქსისა** და **სემანტიკას** შორის დაახლოებით ისეთივეა, როგორი განსხვავებებიც არის თეორიული სისტემის ისეთ შემადგენლებს შორის როგორებიც არიან, ერთი მხრივ, ძირითადი ცნებები, ძირითადი დებულებები (აქსიომები), გამოყვანისა თუ გადაწერის წესები, და თეორემები და, მეორე მხრივ, ფორმალური სისტემის მოდელები და ინტერპრეტაციები. თუმცა, ფორმისა და შინაარსის განცალკევება, რომელიც ანტიკური ხანის პრობლემად ითვლება, დღესაც ქმნის გარკვეულ სიღრმისეულ სირთულეებს. ენობრივ სისტემებში ზოგჯერ ვერ ხერხდება გაივლოს მკაფიო გამყოფი ხაზი სემანტიკურ და სიტაქსურ საკითხებს შორის. როგორც ჩანს მათ გააჩნიათ ბევრი ისეთი თვისება, რომლებიც ერთდროულად უკავშირდებიან როგორც სინტაქსურ, ისე სემანტიკურ საკითხებს. მიუხედავად ამისა, არსებობს საერთო შეთანხმება, რომლის მიხედვითაც ცხადად განირჩევა ერთმანეთისაგან სინტაქსური და სემანტიკური შემადგენლები. ასე მაგალითად, აქსიომების, გამოყვანებისა და გადაწერის ფორმალური წესების საფუძველზე მათემატიკურად მკაცრი დამტკიცებების აგება სინტაქსურ პრობლემატიკად ითვლება, მაშინ როდესაც გარკვეული აქსიომათა სისტემის არაწინააღმდეგობრიობის (თავსებადობის) მტკიცება იმის ჩვენებით, რომ ამ აქსიომათა სისტემას აქვს მოდელი სემანტიკური ხასიათის

პრობლემატიკად არის მიჩნეული. სინტაქსურ ასპექტებად მიიჩნევა ის ფორმირებულობის, წარმოქმნის, მტკიცების და სხვა ცნებები, რომლებიც განისაზღვრებიან გამოსახულებებთან მიკავშირებული ტერმინებით. სემანტიკურ ასპექტებად მიიჩნევა ჭეშმარიტების, გამოყვანის და სხვა ისეთი ცნებების ისეთი თვისებები, რომლებიც გააჩნიათ გამოსახულებებს და რომლებიც დაკავშირებულნი არიან მოდელებთან და ინტერპრეტაციებთან და, ამავდროულად, არ არიან დაკავშირებულნი ერთმანეთთან, როგორც გამოსახულებებთან.

ფორმალური სისტემების შესწავლისას მკაფიოდ დადასტურდა ანალიზისა და მტკიცებების როგორც სინტაქსური, ისე სემანტიკური მეთოდების ღირებულება და მნიშვნელობა. ამ ორიდან ვერცერთზე ვერ ვიტყვით, რომ ის უფრო არსებითია, ან უფრო კანონიერი. როდესაც ვფიქრობთ რაიმე კონკრეტული კითხვის პასუხზე, ან იმაზე, ხასიათდება თუ არა მოცემული ფორმალური სისტემა ამა თუ იმ კონკრეტული თვისებით, ირკვევა, რომ, გარკვეულ შემთხვევებში, მათგან თითოეული შეიძლება იყოს უფრო პირდაპირიც და ხელსაყრელიც, ვიდრე მეორე. ლოგიკის მეტათეორიის მრავალი მნიშვნელოვანი შედეგი უკავშირდება სინტაქსისა და სემანტიკის ურთიერთმიმართებებს. აღსანიშნავია, რომ ისეთი სამეცნიერო დისციპლინა, როგორიცაა მოდელების თეორია, მკაფიოდ არის დაკავშირებული სემანტიკური საშუალებების გამოყენებასთან ლოგიკასა და მათემატიკაში.

პროგრამა, რომელიც შეისწავლის სისტემებს მხოლოდ სინტაქსურად ყოველგვარი ცხადი თუ არაცხადი მცდელობის გარეშე განიხილოს მათი შინაარსული შემადგენლებიც, იწოდება ფორმალისტური კვლევების პროგრამად, რომელიც მათემატიკის დაფუძნების სფეროში ცნობილია ჰილბერტის პროგრამად, ხოლო გენერაციულ გრამატიკაში სინტაქსის დამოუკიდებელი შესწავლის ჩომსკის პროგრამად. ეს უკანასკნელი დღეს უკვე წინა პროგრამის ერთგვარ სრულ გაფართოებად ფასდება. თანამედროვე გენერაციული სინტაქსი ფორმალური ენებისა და ავტომატების მათემატიკური თეორიის ერთ-ერთი განშტოებაა, რაც ზემოთ გაკეთებული სავარაუდო შეფასების პირველ სინტაქსურ ინიციატივად უნდა ჩაითვალოს, რამდენადაც მას საქმე აქვს მხოლოდ ტექსტთა გადამწერ და სიმბოლოთა დამმუშავებელ სისტემებთან. სემანტიკა, ,,ფორმალური სემანტიკის'' თანამედროვე ტრადიციული ჩარჩოებით განშტოვდა ლოგიკასა და მოდელების თეორიაში და, შესაბამისად ამისა, მან ბევრი რამ აიღო იმ მეთოდებისაგან, რომლებიც ლოგიკოსების მიერ ლოგიკისა და ფორმალური ენების თეორიის ფარგლებში უკვე დამუშავებული იყო. ირონიას იწვევს ის, რომ ტერმინი ,,ფორმალური სემანტიკა'' იქცა სტანდარტულ სახელად სემანტიკისადმი იმ მოდელურ-თეორიული მიდგომისა, რომელიც, როგორც უკვე აღინიშნა, ნამდვილად არ წარმოადგენს ფორმალისტურს ზემოთ აღნიშნული მკაცრი აზრით.

ლოგიკის გარეთ ტერმინი **სემანტიკა** ხშირად ბევრად უფრო ფართო შინაარსით გაიგება, კერძოდ კი, როგორც ნებისმიერი რამ, რაც გარკვეულად დაკავშირებულია მნიშვნელობასთან. გარდა ამისა, ლინგვისტიკაში არის ამ ტერმინის გამოყენების მრავალი სრულიად განსხვავებული არე, რომელთა გათვალისწინებით დღესაც მიმდინარეობს დისკუსიები, თუ როგორ უნდა განისაზღვროს მისი თეორიული, სუფთა მეცნიერული ჩარჩოები. ერთი თვალსაზრისით ორაზროვნების პრობლემები ცალსახად მიეკუთვნება ბუნებრივი ენებისათვის დამახასიათებელ სემანტიკურ პრობლემატიკას. ამასთან, უკვე ცხადია, რომ ერთმანეთისგან უნდა განირჩეს ე.წ ,,სინტაქსური'' და ,,სემანტიკური'' ორაზროვნებები. მომდევნო თავში ჩვენ დავეყრდნობით ამ ტერმინის ლოგიკისთვის დამახასიათებელ და ბევრად უფრო მკაფიოდ ჩამოყალიბებულ გამოყენებას, რომლის მიხედვითაც **სემანტიკა** შეისწავლის ფორმალურ სისტემებსა და მათ ინტერპრეტაციებს შორის ურთიერთმიმართებებს.

5.4 გამონათქვამთა ლოგიკისა და პრედიკატული ლოგიკის შესახებ

მეექვსე და მეშვიდე თავში ჩვენ შევისწავლით ორ ლოგიკურ სისტემას: **გამონათქვამთა ლოგიკას,** რომელსაც ზოგჯერ **პროპოზიციულ აღრიცხვას**, ზოგჯერ კი **გამონათქვამთა აღრიცხვასაც** უწოდებენ და **პრედიკატულ ლოგიკას,** რომელიც **პირველი რიგის პრედიკატთა აღრიცხვადაც** იწოდება. თითოეული მათგანი განხილული იქნება როგორც საკუთარი სიტყვარის ანუ ალფაბეტის მქონე ფორმალური ენა, საკუთარი სინტაქსური და სემანტიკური წესებით. თუმცა, ჩვენ ვნახავთ, რომ ამ ენების სინტაქსური და სემანტიკური წესები ბევრად უფრო მარტივია ნებისმიერი ბუნებრივი ენის სინტაქსურ და სემანტიკურ წესებზე. ეს სიმარტივე მათი უპირატესობაა, რაც, რა თქმა უნდა, განპირობებულია იმით, რომ მათი კონსტრუირებისას გამიზნული იყო თავიდან აგვეშორებინა ორაზროვნება და სხვა ბუნებრივი ენებისათვის დამახასიათებელი სირთულეები. მაგალითად, ამ ლოგიკური ენების წინადადებები არიან მხოლოდ დეკლარაციული და, შესაბამისად ამისა, ამ ენებში არ განიხილება ინტეროგაციული, იმპერატიული, პერფორმაციული და სხვა ბუნებრივი ენებიდან კარგად ცნობილი ტიპის წინადადებები. გარდა ამისა, ამ ლოგიკურ ენებში რთული წინადადებების ჩამოსაყალიბებლად წინადადებების ერთმანეთთან შემაერთებელი საშუალებები ძლიერ შეზღუდულია. თქვენ ამ ენებში ნახავთ უხეშ ანალოგებს ბუნებრივი ენიდან თქვენთვის ნაცნობ წინადადებათა ისეთი ლოგიკური მაკავშირებლებისა როგორებიცაა **და, ან, არ, თუ ... მაშინ,** და **მაშინ, და მხოლოდ მაშინ,** თუმცა თქვენ აქ ვერ ნახავთ ვერც უხეშ ანალოგებს ენაში არსებული ისეთი კავშირებისა, როგორებიცაა **რადგან**, **სანამ**, **თუმცა, მაგრამ** და სხვა კიდევ მრავალი ენობრივი კავშირი. პრედიკატთა ლოგიკაში თქვენ ნახავთ აგრეთვე ბუნებრივი ენის ზოგიერთი ისეთი განმსაზღვრელების მეწყვილეებს როგორებიცაა **ზოგიერთი, ყველა, არცერთი, თითოეული, ყოველი,** მაგრამ ვერ ნახავთ მეწყვილეებს ისეთებისა როგორებიცაა **უმეტესობა, ბევრი, ცოტაოდენი, რამოდენიმე, ნახევარი** და ა. შ.. ლოგიკა, როგორც სამეცნიერო დისციპლინა, შეისწავლის აზროვნებას, როგორც ფიზიოლოგიაში არსებულს და არა როგორც ფიზიოლოგიურ პროცესს, რომელიც ფსიქოლოგიის შესწავლის საგანია. ამასთან, ლოგიკა შეისწავლის აზროვნებას იმ მიზნით, რომ გამოარჩიოს მისი **მართებული** და **ჭეშმარიტი** ფორმები მისივე **არამართებული** და **არაჭეშმარიტი** ფორმებისაგან. მაგალითად, ჩვენ ინტუიციურად ვხვდებით, რომ მსჯელობა (5-1) მართებულია, რამდენადაც დასკვნა ანუ სწორი ხაზის ქვემოთ განთავსებული წინადადება არის გარდაუვალი შედეგი ხაზის ზემოთ განთავსებული წინაპირობებისა. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ჩვენ შევთანხმდებით (5-1) მსჯელობის წინაპირობების ჭეშმარიტებაში, მაშინ, ლოგიკურად, ჩვენ ვერანაირად ვერ უარვყოფთ დასკვნის სამართლიანობას.

(5-1) **ყველა ადამიანი მოკვდავია (არის მოკვდავი)**
სოკრატე ადამიანია (არის ადამიანი)

ამგვარად, სოკრატე მოკვდავია (არის მოკვდავი)

ამის საპირისპიროდ, ადვილად დავასკვნით, რომ (5-2) მსჯელობა არამართებულია:

(5-2) **ყველა კატა ძუძუმწოვარაა (არის ძუძუმწოვარა)**
ყველა ძაღლი ძუძუმწოვარაა (არის ძუძუმწოვარა)

ამგვარად, ყველა კატა ძაღლია (არის ძაღლი)

ეს იმიტომ, რომ (5-2) დასაბუთებაში (მსჯელობაში) კიდევაც თუ დავუშვებთ წინაპირობების ჭეშმარიტებას, ჩვენ მაინც შევძლებთ შედეგის ანუ დასკვნის უარყოფას.

ნებისმიერი ფორმალური ლოგიკური სისტემა ჩაფიქრებულია ისეთ სისტემურ აღრიცხვად, რომელიც ეფუძნება ჩვენს რომელიმე ზემოაღნიშნულგვარ ინტუიციურ დასკვნას. განხილული მაგალითების შემთხვევაში ეს ფორმალური ლოგიკური სისტემა პრედიკატთა ლოგიკაა. საზოგადოდ, ამგვარი გამოყენებებისას ლოგიკური ენა გვემსახურება როგორც ბუნებრივი ენის ერთგვარი გამარტივებული მოდელი. იგი აგებულია ისე, რომ წარმოდგენილი მსჯელობების სამართლიანობის გამოთვლა შესაძლებელი გახდეს მარტივი და დასაბუთებული მიდგომებით. ნებისმიერი ენობრივი მსჯელობის მართებულობის საკითხი მარტივად შეიძლება შემოწმდეს, თუ ჯერ გავაკეთებთ მის თარგმანს ლოგიკურ ენაში და თან დავასაბუთებთ ამ თარგმანის სამართლიანობას. ასე მაგალითად, (5-1) მსჯელობა პრედიკატთა ლოგიკის ენაში შეიძლება ითარგმნოს როგორც (5-3). მეშვიდე თავში ვნახავთ, რომ ეს სამართლიანი თარგმანია.

$$
\begin{array}{ll}
(5\text{-}3) & (\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)) \\
 & H(s) \\
\hline
\therefore & M(s)
\end{array}
$$

ცხადია, რომ ამგვარი მიდგომის წარმატება დამოკიდებულია თარგმანის სიზუსტეზე. – მხედველობაში გვაქვს ლოგიკური ენების ისეთი ძირითადი თვისობრივი მახასიათებელი, როგორიცაა ჭეშმარიტობა და მცდარობა.

ერთ-ერთი გამართლება ზემოაღწერილი გზით მსჯელობების დამუშავებისა ის არის, რომ ბუნებრივ ენაში გარეგნულად განსხვავებული მსჯელობები ხშირად დასაბუთებათა ანუ მსჯელობათა ერთი და იგივე ფორმებს იძლევიან. ასე მაგალითად, ჩვენ ვნახავთ, რომ (5-1) დასაბუთებიდან შეგვიძლია ვაწარმოოთ ასევე მართებული, მაგრამ მისგან განსხვავებული დასაბუთება მასში საკუთარი და საზოგადო სახელების სისტემური ჩანაცვლებით:

(5-4) **ყველა კურდღელი მღრნელია (არის მღრნელი)**
პეტერი კურდღელია (არის კურდღელი)

ამგვარად, პეტერი მღრნელია (არის მღრნელი)

ცხადია, რომ სამართლიანობა (5-1) და (5-4) დასაბუთებებისა არ არის დამოკიდებული მათში არსებული ისეთი სიტყვების მნიშვნელობებზე როგორებიცაა **ადამიანი, სოკრატე, კურდღელი, პეტერი, მოკვდავი, მღრნელი,** არამედ არის შედეგი იმ ზოგადი ლოგიკური სქემისა, რომლის მიხედვითაც ეს სიტყვები არიან განლაგებულნი. ჩვენ აგრეთვე ვნახავთ, რომ სიტყვა **ყველა** შემადგენელი ნაწილია ამ სქემისა, რაც დასტურდება იმით, რომ თუ ჩავანაცვლებთ მას სიტყვით **ზოგიერთი** მივიღებთ მცდარ დასაბუთებას:

(5-5) **ზოგიერთი ადამიანი მოკვდავია (არის მოკვდავი)**
სოკრატე ადამიანია (არის ადამიანი)

ამგვარად, სოკრატე მოკვდავია (არის მოკვდავი)

შევნიშნოთ, რომ (5-5) დასაბუთების დასკვნა, მიუხედავად იმისა, რომ იგი ჭეშმარიტებაა, ლოგიკურად არ გამომდინარეობს წინაპირობებიდან. ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (5-1) და (5-4) დასაბუთებები არიან კერძო შემთხვევები (5-6) ლოგიკური სქემის მქონე ჭეშმარიტი ანუ მართებული დასაბუთებისა.

(5-6) **ყველა Xი Yია (არის Yი)**
aი Xია (არის Xი)

ამგვარად, aი Yია (არის Yი)

ანალოგიურად, (5-2) არის კერძო მაგალითი დასაბუთების შემდეგი არამართებული სქემისა:

(5-7) **ყველა Xი Yია (არის Yი)**
ყველა Zი Yია (არის Yი)

ამგვარად, ყველა Xი Zია (არის Zი)

ამგვარად, ნებისმიერი ლოგიკური ენა ისეა აგებული, რომ უზრუნველყოფილი იქნეს როგორც თარგმნის, ისე დასაბუთების მცდარობისა თუ ჭეშმარიტობის გამომთვლელი მარტივი, ეფექტური გზები. პრედიკატთა ლოგიკა, როგორც უკვე ვნახეთ, ამუშავებს ზემოგანხილული სახის სქემებს, მაშინ როდესაც გამონათქვამთა ლოგიკაში ასეთი სქემები ვერ მუშავდება, რადგანაც იგი აგებულია მხოლოდ დასაბუთებათა ისეთი სქემების დასამუშავებლად, რომელთა სამართლიანობა დამოკიდებულია ისეთ კავშირებზე, როგორებიცაა **და, ან** და **თუ ... მაშინ** და არ არის დამოკიდებული ისეთ სიტყვებზე როგორებიცაა **ყველა და ზოგიერთი.**

თავი 6
გამონათქვამთა ლოგიკა

6.1 სინტაქსი

გამონათქვამთა ლოგიკის სინტაქსი ძალიან მარტივია. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მისი ძირითადი სიტყვარი შეიცავს p,q,r,s, ... სიმბოლოებითა და მათი ინდექსირებული ცალებით წარმოდგენილ ატომალურ ანუ განუყოფელ გამონათქვამთა უსასრულო სიმრავლეს. ამასთან:

განსაზღვრება 6.1

1. ნებისმიერი ატომალური გამონათქვამი არის წინადადება ანუ წესებით აგებული ფორმულა (წაფი), მოკლედ, ფორმულა.
2. ნებისმიერი ფორმულა, რომელსაც წინ უზის სიმბოლო ~ (ნეგაცია ანუ უარყოფა), არის აგრეთვე ფორმულა ანუ გამონათქვამი.
3. ნებისმიერი ორი (არა აუცილებლად განსხვავებული) ფორმულისაგან იგება ახალი ფორმულა ანუ გამონათქვამი მათ შორის & (კონიუნქციის ანუ და-კავშირის), $\vee$ (დიზიუნქციის ანუ ან-კავშირის), $\rightarrow$ (კონდიციურობის ანუ გამომდინარეობის), $\leftrightarrow$ (ბიკონდიციურობის ანუ ორმხრივგამომდინარეობის ანუ იგივურობის) აღმნიშვნელი სიმბოლოს ჩაწერითა და მიღებული გამოსახულების ფრჩხილებში ჩასმით.

ქვემოთ მოყვანილია გამონათქვამთა ლოგიკის ფორმულების რამდენიმე მაგალითი. ეს მაგალითები აგებულია ზემოთ განსაზღვრული წესების გამოყენებით:

(6-1) p
q′
(p ∨ q)
~ (p′↔ p′)
~ r
~ ~ r
((((p & q) ∨ q′) → r) ↔ s)

შემდეგი გამოსახულებები არ არიან გამონათქვამთა ლოგიკის ფორმულები:

(6-2) pq
∨p
~∨pq
p ∨ q **(აკლია გარე ფრჩხილები!)**
~ (p) **(ატომალური ფორმულები არ ჩაისმებიან ფრჩხილებში!)**
(~ p) **(უარყოფით აგებული ფორმულები არ ჩაისმებიან ფრჩხილებში!)**

შენიშვნა: კითხვადობის გამარტივების მიზნით, ზოგჯერ, გარე ფრჩხილებს გამოვტოვებთ ხოლმე. ანუ, ზოგჯერ, (p∨(q&r)) გამოსახულების ნაცვლად ვისარგებლებთ p∨(q&r) გამოსახულებით და მას (p∨(q&r)) ფორმულის შემოკლებულ (ანუ არასრულ) ფორმალურ სახედ ჩავთვლით.

ლოგიკური ენები და თეორიები, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, იგება ბუნებრივი ენებისათვის დამახასიათებელი ზოგადი ლოგიკური კონსტრუქციების რაც შეიძლება მარტივი და ადეკვატური ასახვისათვის. ჩვენს შემთხვევაში, ლოგიკური კავშირები &, ∨, →, ↔ გათვალისწინებულნი არიან ინგლისური ენის იმ **და (and)**, **ან (or)**, **თუ ... ,მაშინ (if ... then)** და **მაშინ, და მხოლოდ მაშინ (if and only if)** კავშირების მეწყვილეებად, რომლებიც ბუნებრივ ენებში დეკლარაციული ანუ შეტყობინებითი ანუ თხრობითი წინადადებების დასაკავშირებლად გამოიყენებიან. მაგალითად, წინადადებაში **ჯონი ეწევა და მერი ხვრინავს (John smokes and Mary snores)** ასეთი არის სიტყვა **და (and)**. თხრობითი წინადადებების იმ ნაწილებს, რომლებიც არ შეიცავენ ისეთ წინადადებრივ ოპერატორებს როგორებიცაა **და**, **ან, თუ ... ,მაშინ, მაშინ, და მხოლოდ მაშინ** და **არ** სიტყვები, გამონათქვამთა ლოგიკაში ატომალური ანუ განუყოფელი ანუ მარტივი ფორმულები ეთანადებიან. გამონათქვამთა ლოგიკის შემდეგი ~, &, ∨, →, ↔ სიმბოლოებიდან უარყოფის ოპერატორი ერთადგილიანი ლოგიკური ოპერატორია. დანარჩენები, როგორც ორადგილიანი ოპერატორები, გამონათქვამთა ლოგიკაში ლოგიკურ კავშირებად იწოდებიან. მათი სამოქმედო ანუ საოპერატორო ადგილიანობის ასეთი გაგება განპირობებულია იმით, რომ უარყოფის ოპერატორი მხოლოდ ერთ ფორმულაზე ოპერირებით იძლევა ახალ ფორმულას, მაშინ როდესაც დანარჩენები ახალ ფორმულას ორი ფორმულის დაკავშირებით და მათზე ერთდროული ოპერირებით იძლევიან. ინგლისურ ენაში უარყოფის ოპერატორის ერთ-ერთი ბუნებრივ ენობრივი მეწყვილე არის **არ (not)** კავშირი წინადადებაში **ჯონს ნებავს არ წასვლა (John will not leave)**. თუმცა, ინგლისურ ენაში, ფრაზა **ეს არ არის ის შემთხვევა, როცა (it is not the case that)** მიიჩნევა ლოგიკური უარყოფის ოპერატორის უფრო ზუსტ ფორმალურ მეწყვილედ. მაგალითისათვის განვიხილოთ წინადადება **ეს არ არის ის შემთხვევა, როცა ჯონს ნებავს წასვლა (it is not the case that John will leave),** რომელიც აზრობრივად გამორიცხავს **ჯონს ნებავს წასვლა (John will leave)** წინადადებით მოცემულ შინაარსულ ვითარებას და, შესაბამისად, იგი მის ლოგიკურ უარყოფას წარმოადგენს. შევნიშნოთ, რომ ის, რაც გამონათქვამთა ლოგიკაში ,,მარტივ'' დეკლარაციულ ანუ თხრობით წინადადებად განიხილება, სინამდვილეში შეიძლება სინტაქსურად საკმაოდ რთული წინადადებაც იყოს. ასე მაგალითად, წინადადება **ჯონის განუწყვეტელი წევა მერის მიაჩნდა მისი გაუთავებელი ხველების მიზეზად** არ შეიცავს არცერთ ჩვენს მიერ ზემოთ მონიშნულ წინადადებრივ მაკავშირებელს და, შესაბამისად, იგი, მიუხედავად მისი რთული სინტაქსური კონსტრუქციისა, გამონათქვამთა ლოგიკაში მარტივ ანუ განუყოფელ ანუ ატომალურ წინადადებად გაიგება.

რამდენიმე სიტყვა ტერმინოლოგიაზე: ვთანხმდებით, რომ ინგლისური ენის ისეთი წინადადებები, როგორიცაა, ვთქვათ, **ჯონი ეწევა (John smokes),** გამოხატავს გამონათქვამს და, ამჯერად, იგნორირებას ვუკეთებთ ისეთ პრაგმატულ საკითხებს, როგორებიცაა მეტყველი პირი და კონტექსტი. ამასთან, დებულების უფრო ზოგადი ცნების თავიდან არიდების მიზნით ვისარგებლებთ ცნებით გამონათქვამი და მას უფრო ბუნებრივი შინაარსით გავიაზრებთ, რადგანაც წინა ტერმინი დაგვჭირდება ხოლმე ბუნებრივი ცნებებისაგან განსხვავებული და მათემატიკურად დაზუსტებული შინაარსების გამოსახატავად. სინონიმური წინადადებები, მაგალითად, **პარიზი არის საფრანგეთის დედაქალაქი (Paris is the capital of France)** და **საფრანგეთის დედაქალაქი პარიზია (France's capital is Paris)** ჩვენთვის ერთი და იგივე წინადადებებია, მაშინ როდესაც არაერთაზროვან წინადადებას იმდენივე წინადადების გამომხატველად მივიჩნევთ რამდენ განსხვავებულ აზრსაც იგი გამოხატავს. ამგვარი ინგლისური წინადადების მაგალითია **Visiting relatives can be annoying.**

ამოცანა: მოიფიქრეთ არაერთაზროვან წინადადებათა მაგალითები ქართულისათვის.

6.2. სემანტიკა: ჭეშმარიტული მნიშვნელობები და ჭეშმარიტული ცხრილები

გამონათქვამთა ლოგიკის სემანტიკა ისევე მარტივია, როგორც მისი სინტაქსი. იგულისხმება, რომ ნებისმიერ ატომალურ გამონათქვამს მიენიჭება 1 (**ჭეშმარიტი**) და 0 (**მცდარი**) ჭეშმარიტული მნიშვნელობებიდან ერთ-ერთი. ამგვარად, გამონათქვამთა ლოგიკა ორმნიშვნელობიანი ლოგიკაა. მათემატიკაში საზოგადოდ ორ მნიშვნელობიან ლოგიკაზე უფრო მეტ მნიშვნელობებიანი ლოგიკური სისტემებიც შეისწავლება, მაგრამ მათ ჩვენ ამჯერად აქ არ შევეხებით. აღნიშნულთან დაკავშირებით შეგიძლიათ იხილოთ ამ წიგნის BII დამატება. გამონათქვამთა ლოგიკის ნებისმიერი შედგენილი ანუ არაგანუყოფელი ანუ არაატომალური ფორმულა აგრეთვე შეისაბამებს ერთ, და მხოლოდ ერთ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, რომელიც განისაზღვრება (1) სინტაქსურად მისი შემადგენელი ატომალური ანუ განუყოფელი გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობებით, და (2) მისი (ანუ ამ შედგენილი ფორმულის) სინტაქსური სტრუქტურით, რაც ამ ფორმულის ლოგიკური ოპერატორებითა და მათი ურთიერთგანლაგებით მოიცემა. მაგალითად, (p&q) ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა განისაზღვრება p და q ფორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობებითა და & ლოგიკური კავშირის **ჭეშმარიტულობის ფუნქციით,** რაც, თავის მხრივ, & ლოგიკური კავშირის **ჭეშმარიტულობის ცხრილით** ისაზღვრება. ეს ცხრილი გვიჩვენებს, თუ როგორ შეიძლება იქნეს გამოთვლილი (p&q) სახის ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა, როდესაც ცნობილია მისი უშუალო სინტაქსური შემადგენლების (ანუ p და q ფორმულების) ჭეშმარიტული მნიშვნელობები. ჩვენ ქვემოთ გავაშუქებთ ზემოგანხილული ლოგიკური ოპერატორების განმსაზღვრელ ჭეშმარიტულ ცხრილებს და, ამასთან, გავაკეთებთ მცირეოდენ შენიშვნებს ამ ლოგიკური ოპერატორებისა და მათი ინგლისური მეწყვილეების შესადარებლად. გავითვალისწინოთ, რომ P, Q, და ა.შ. სიმბოლოები გამოიყენება სრულიად ნებისმიერი (ე.ი. როგორც განუყოფელი, ისე შედგენილი) ფორმულების აღსანიშნავად.

6.2.1 უარყოფა

უარყოფა საპირისპიროთი ცვლის იმ გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, რომელსაც იგი უერთდება. ნებისმიერი P ფორმულისათვის, თუ P არის ჭეშმარიტი, მაშინ ~P არის მცდარი და, პირიქით, თუ P არის მცდარი, მაშინ ~P არის ჭეშმარიტი. ეს ყველაფერი შეჯამებულია ჭეშმარიტულობის ცხრილში 6-1 ნახაზზე.

P	~P
1	0
0	1

ცხრილი 6-1: უარყოფის ჭეშმარიტულობის ცხრილი

ცხადია, რომ ლოგიკური უარყოფა არის გარკვეულად გამარტივებული სახე ბუნებრივი ენების წინადადებათა უარმყოფელი ნაწილაკისა. ქართულში, ისევე როგორც ინგლისურში, წინადადებათა უარყოფა ხშირად კეთდება ზმნურ ფრაზასთან **არ (not)** ნაწილაკის მიერთებით. ასე მაგალითად, **ჯონი არის აქ (John is here)** და **ჯონი არ არის აქ (John is not here)**. ინგლისურში უარყოფას ზოგჯერ აკეთებენ do ნაწილაკის სხვადასხვა ფორმების გამოყენებითაც. მაგალითად, **ჯონი ეწევა (John smokes**) და **ჯონი არ ეწევა** (**John does not smoke**). ნებისმიერ შემთხვევაში, შინაარსული თვალსაზრისებით, ამგვარი მოქმედებების შედეგია ის, რომ ვღებულობთ თავიდან აღებული წინადადების საპირისპირო ჭეშმარიტული მნიშვნელობის მქონე წინადადებას. თუმცა, ზოგჯერ, უარმყოფელი **არ** (**not)** ნაწილაკი არ იძლევა ლოგიკურად გამომრიცხავი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის მქონე წინადადებას. მაგალითად: **ჯონი უნდა წავიდეს (John must leave)** და **ჯონი უნდა არ წავიდეს (John must not leave)**. ეს ის შემთხვევებია, როცა ბუნებრივ ენობრივი უარყოფა და ლოგიკური

უარყოფა ერთმანეთს არ შეესაბამებიან. უფრო მეტი სიზუსტით ლოგიკური უარყოფის ფუნქციონირებას ბუნებრივ ენაში შეესაბამება საპირისპირო გარემოებრივი შინაარსის განმსაზღვრელი ფრაზა - **ეს არ არის ის შემთხვევა, როცა (it is not the case that).** ამ მიდგომებით ვღებულობთ, რომ **ეს არ არის ის შემთხვევა, როცა ჯონი უნდა წავიდეს (it is not the case that John must leave)** ფრაზა არის **ჯონი უნდა წავიდეს (John must leave)** ფრაზის ლოგიკური უარყოფა, რაც ამ ფრაზებით მოცემული ვითარებების საპირისპირობას ანუ მათი შინაარსების სრულ ურთიერთ გამომრიცხავობას ნიშნავს.

რედაქტორის შენიშვნა: ჩვენ ინგლისური წინადადება **John must not leave** ვთარგმნეთ არა ტრადიციული, არამედ, ვუწოდოთ ასე, პირდაპირი სიტყვა-სიტყვითი თარგმანით როგორც **ჯონი უნდა არ წავიდეს.** ეს გავაკეთეთ, რათა მკითხველისათვის გასაგები ყოფილიყო ავტორების მიერ შემოთავაზებული პრობლემის არსი, რომელიც არსებითად განპირობებულია ინგლისური ენის მარტივი წინადადებების სემანტიკური, სინტაქსური და მორფოლოგიური თავისებურებებით, რასაც, თავის მხრივ, ინგლისური ენის სიტყვებით მოწოდებული შინაარსების ქართულისაგან განსხვავებული ფორმალურ-ლოგიკური ურთიერთმიმართებები განაპირობებს. - ამით იხსნება ის, რომ ქართულისათვის იგივე მოვლენა არაპრობლემატურია. ქართულში წინადადებები **ჯონი უნდა წავიდეს** და **ჯონი არ უნდა წავიდეს** არიან დაპირისპირებული ანუ ლოგიკურად ურთიერთ გამომრიცხავი შინაარსის წინადადებები, მაშინ როდესაც წინადადებები **ჯონი უნდა წავიდეს** და **ჯონი უნდა არ წავიდეს,** ისევე როგორც მათი ინგლისური მეწყვილეები, ასეთები არ არიან. - ეს ფაქტი კიდევ ერთხელ ადასტურებს ქართული ენისა და ფრეგესეული პრედიკატული მათემატიკური ენის ერთტიპობრიობას, რასაც ჩვენ პირველად ოთხი წლის წინ გავუსვით ხაზი. — აქვე ჩანს მიზეზები იმისა, რაც ქართული ენის ერთ-ერთი ფუნდამენტური მახასიათებელია და რაც ქართულ მარტივ წინადადებაში ე.წ. ორმაგი უარყოფის დაშვებულობაა. - ე.წ. ორმაგი უარყოფა იმიტომ, რომ მათგან მხოლოდ ერთია პრედიკატული უარყოფა. ასეთ წინადადებებში არსებული მეორე უარყოფა ცხადია არ ასრულებს პრედიკატული უარყოფის ფუნქციას, რაც, რა თქმა უნდა, ლოგიკური სიჭარბე იქნებოდა. ასე მაგალითად, წინადადება **ჯონს ნებავს წასვლა (John will leave) არ** ნაწილაკთან ერთად ქართულში შემდეგ ოთხ ვარიანტად იშლება: ორი **არ** ნაწილაკიანი - **ჯონს არ ნებავს არ წასვლა**, ერთი **არ** ნაწილაკიანი - **ჯონს არ ნებავს წასვლა** და **ჯონს ნებავს არ წასვლა,** არცერთი **არ** ნაწილაკიანი - **ჯონს ნებავს წასვლა**. თუ დავაკვირდებით ორ **არ** ნაწილაკიან წინადადებას **ჯონს არ ნებავს არ წასვლა**, გასაგები გახდება, რომ ამ წინადადების პირველი **არ** ნაწილაკი აკეთებს პრედიკატულ უარყოფას, მაშინ როდესაც მეორე არ ნაწილაკი უარყოფს არა პრედიკატულ შინაარსს, არამედ იმ შინაარსს, რომელზედაც ამ პრედიკატით ვმსჯელობთ. - ეს მეტად მნიშვნელოვანი შენიშვნაა. თარგმნისას აქ მოკლედ მოხაზულ სიღრმისეულ განსხვავებათა არ გათვალისწინება ხშირად განაპირობებს ფაქტობრივად დამახინჯებული თარგმანების გაკეთებას. არადა, დღესაც, ქართული ენისა და უცხო ენების ურთიერთ მიმართებების სწავლება მიმდინარეობს ამ ლოგიკური სიღრმეების გაუთვალისწინებლად, რისი უპირველესი მიზეზი არის ის, რომ ზემოაღნიშნული ლოგიკური თვალსაზრისებით ქართული ენა დღემდე არც კი შეისწავლებოდა. და ბოლოს, რატომ ირჩევს ქართული ინგლისურისგან განსხვავებით პრიორიტეტულად პრედიკატულ უარყოფებს და რატომ იკავებს თავს ინგლისური ენა ასეთი პრედიკატული უარყოფებისაგან? - ეს ის უმნიშვნელოვანესი კითხვებია, რომლებზედაც მათემატიკურად დასაბუთებული პასუხების მოძიებაში თავად მათემატიკური ენა და ამ მათემატიკური ენისათვის დამახასიათებელი მათემატიკური მიდგომები გვეხმარება. — „ლოგიკისა და ენის გაერთიანებული ქართული ჯგუფი" უკვე წლებია ფუნდამენტურად იკვლევს ქართული ენის ზოგად ლოგიკურ თავისებურებებს და, მათ შორის, ამ საკითხებსაც.

6.2.2 კონიუნქცია ანუ და-კავშირი

თუ ბუნებრივი ენის ორ შეტყობინებით ანუ თხრობით წინადადებას შევაერთებთ **და (and)** კავშირით, ცხადია, მივიღებთ უფრო დიდ წინადადებას, რომელიც ჭეშმარიტია, თუ

შეერთებული წინადადებებიდან ორივე ჭეშმარიტია და მცდარია, თუ შეერთებული წინადადებებიდან ან ერთ-ერთი, ან ორივე მცდარია. მაგალითად, თუ **ჯონი ეწევა (John smokes)** და **ჯეინი ხვრინავს** (Jane snores) წინადადებებიდან ორივე ჭეშმარიტია, მაშინ ჭეშმარიტია ასევე წინადადება **ჯონი ეწევა და ჯეინი ხვრინავს (John smokes and Jane snores**), ხოლო თუ ამ წინადადების შემადგენელი ზემოაღნიშნული წინადადებებიდან ან ერთი, ან ორივე მცდარია, მაშინ მცდარია აგრეთვე მათი **და** დაკავშირებით მიღებული წინადადებაც. აღნიშნულის შესაბამისად იგება & ლოგიკური კავშირის ჭეშმარიტულობის ცხრილი:

P	Q	(P & Q)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ცხრილი 6-2: და-კავშირის (კონიუნქციის) ჭეშმარიტულობის ცხრილი

შევნიშნოთ, რომ P და Q არიან ცვლადები, რომლებითაც აღინიშნება სრულიად ნებისმიერი ფორმულები და რომ ცხრილის ოთხი რიგი შეესაბამება ამ ცვლადებისათვის ჭეშმარიტული მნიშვნელობების მინიჭების ოთხ განსხვავებულ შესაძლებლობას.

როგორც მოსალოდნელი იყო, არსებობს მაგალითები, რომლებშიც & არ ენაცვლება ბუნებრივი ენის **და (and)** კავშირს. **და** კავშირს ზოგჯერ ენაში დროითი ელფერიც დაკრავს, რაც, თავის მხრივ, სრულიად იგნორირებულია & ლოგიკური კავშირის შემთხვევაში. ასე მაგალითად, **ჯონმა მიიღო შხაპი და ჩაიცვა (John took a Shower and he got dressed)** და **ჯონმა ჩაიცვა და შხაპი მიიღო (John got dressed and he took a Shower)** წინადადებებში **და** კავშირი ამ წინადადებებითვე მოცემულ მოვლენათა შორის გარკვეულ დროით რიგითობაზეც გვკარნახობს, რაც ზემოგანხილული წინადადებებით ნაგულისხმევი შინაარსების განსხვავებულობის ერთადერთი მიზეზია**.** გამონათქვამთა ლოგიკაში p&q და q&p ფორმულებს ყოველთვის ერთი და იგივე ჭეშმარიტული მნიშვნელობები აქვთ. უფრო მეტიც, გამონათქვამთა ლოგიკაში p&p ფორმულა ისეთ ფორმულად გაიგება, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ემთხვევა p ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, მაშინ როდესაც ბუნებრივ ენებში ასეთი გაორმაგებული კონსტრუქციებით ან საერთოდ არ ვსარგებლობთ, ანდა ვსარგებლობთ განსაკუთრებული და დამატებითი გარემოებების ტექსტში შინაარსული გატარების მიზეზებითა და/ან მიზნებით. მაგალითად, წინადადებაში **ჯონი ეწევა და ეწევა (John smokes and John smokes**) **და** ლოგიკურ კავშირად არ გაიგება.

ბუნებრივი ენიდან გამონათქვამთა ლოგიკის ენაში თარგმნისას, ხშირად, **და (and**) კავშირისგან განსხვავებული ენობრივი კავშირებიც & ლოგიკური კავშირით ითარგმნებიან. მაგალითად, წინადადება **ჯონი ეწევა, თუმცაღა მერი ხვრინავს (John smokes but Mary snores)** გამონათქვამთა ლოგიკაში შეიძლება ითარგმნოს (p&q) სახის წინადადებად, სადაც, ცხადია, & ლოგიკური კავშირი არ იძლევა არც მოულოდნელობის და არც, ვთქვათ, გაკვირვებულობის თაობაზე სათარგმნი წინადადებით გამოხატულ შინაარსს. დაახლოებით ასეთივეგვარი ვითარება შეიძლება შეიქმნას ისეთ ენობრივ კავშირებთანაც, როგორებიცაა **რამდენადაც (however), თუმცა (although**), **მაგრამ (but**), **მიუხედავად იმისა, რომ (despite the fact that),** და ა. შ..

ბუნებრივ ენებში, ვთქვათ ისეთებში, როგორებიცაა ქართული და ინგლისური **და (and)** კავშირით გარდა წინადადებებისა შესაძლებელია დავაკავშიროთ სახელური და ზმნური ფრაზები. მაგალითად, **ჯონი და მერი (John and Mary), ეწევიან და სვამენ (smokes and drinks).** შევნიშნოთ, რომ ამ ენობრივი კავშირების ამგვარ ენობრივ ოპერირებას გამონათქვამთა ლოგიკის ენაში არაფერი არ შეესაბამება. უფრო მეტიც, გამონათქვამთა ლოგიკაში ჩვენ სრული იგნორირება გავუკეთეთ წინადადებათა შინაგან სტრუქტურას. აღსანიშნავია, რომ, ზოგჯერ, წინადადებები, რომლებიც შეიცავენ ზემოაღწერილი სახის ფრაზულ **და-მაკავშირებლებს** შესაძლებელია განხილულ იქნენ როგორც ელიფსისური ფორმები შესაბამისი **და-კავშირიანი** წინადადებებისა. ასე მაგალითად, წინადადება **ჯონი და მერი ეწევა (John and Mary smoke)** შესაძლებელია განხილულ იქნეს როგორც შემოკლებული ფორმა წინადადებისა **ჯონი ეწევა და მერი ეწევა (John smokes and Mary smokes)** და, აქედან გამომდინარე, იგი გამონათქვამთა ლოგიკაში შეიძლება ითარგმნოს (p&q) სახის ფორმულით. თუმცა, ყველა ფრაზული **და-დაკავშირება** არ დაიყვანება **და-კავშირით** აგებული წინადადების ელიფსისურ წარმოდგენამდე, რაშიც მარტივად ვრწმუნდებით შემდეგი წინადადებების საფუძველზე: **ჯონი და მერი შეხვდნენ ერთმანეთს ნიუ-ორკში (John and Mary met in New York), მერიმ შეურია წითელი და ლურჯი საღებავი (Mary mixed red and blue paint).**

6.2.3 დიზიუნქცია ანუ ან-კავშირი

ლოგიკური **ან-კავშირი** შემდეგი ჭეშმარიტულობის ცხრილით განისაზღვრება:

P	Q	(P ∨ Q)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ცხრილი 6-3: ან-კავშირის (დიზიუნქციის)
ჭეშმარიტულობის ცხრილი

ამგვარად, ორი გამონათქვამის დიზიუნქცია ჭეშმარიტია, თუ ერთი მაინც მათგანი ჭეშმარიტია და მცდარია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ორივე მათგანი მცდარია. ამ ლოგიკური კავშირის უხეში ენობრივი შესაბამისია **ან (or)** კავშირი ისეთ წინადადებაში, როგორიცაა მაგალითად **ჯონი ეწევა ან ჯეინი ხვრინავს (John smokes or Jane snores)**. ასე განსაზღვრული ∨ ლოგიკური კავშირი იწოდება ინკლუზიურ დიზიუნქციათ, რომელიც მაშინაც ჭეშმარიტია, როცა მისი ორივე დიზიუნქტი ჭეშმარიტია, მაშინ როდესაც ბუნებრივ ენობრივი **ან (or)** კავშირი უფრო მეტად **ექსკლუზიურად** ფუნქციონირებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ **ან (or)** ენობრივი კავშირით მიღებული წინადადების ჭეშმარიტების შემთხვევაში გამოირიცხება ამ წინადადების ორივე შემადგენლის ერთდროული ჭეშმარიტება. მაგალითად: **თქვენ შეგიძლიათ მიირთვათ სუპი ან (თქვენ) შეგიძლიათ მიირთვათ სალათა, მაგრამ არა ორივე ერთად (You may have soup or You may have salad, but not both).** თუმცა, ბუნებრივ ენებში, საზოგადოდ, ექსკლუზიურია თუ ინკლუზიური **ან** კავშირი, თუ იგი ორაზროვანია და მისი ექსკლუზიური და ინკლუზიური ფუნქციონირება კონტექსტურ და სხვა პრაგმატიკულ ფაქტორებზეა დამოკიდებული, ეს ჯერ კიდევ საკამათო და არაცხადი ფაქტია. ლათინური **vel** და **aut** ხშირად მოჰყავთ ხოლმე ბუნებრივ ენაში ინკლუზიური, შესაბამისად, ექსკლუზიური დიზიუნქციის განმსაზღვრელი ენობრივი საშუალებების მაგალითებად, თუმცა,

აქაც არ არის ყველაფერი ცხადი და ნათელი. ნებისმიერ შემთხვევაში, ∨ ლოგიკური კავშირი არაორაზროვნად ინკლუზიურია, რაზეც ცხადად მეტყველებს მისი ცხრილის პირველი რიგი. ჩვენს გამონათქვამთა ლოგიკაში ექსკლუზიური დიზიუნქციისათვის არ არსებობს სტანდარტული აღნიშვნა, თუმცა ასეთი რომ ყოფილიყო, გასაგებია, რომ მისი ცხრილი იქნებოდა ზუსტად იგივენაირი, როგორიც არის 6-3 ცხრილი, ოღონდ მნიშვნელობათა სვეტის პირველ სტრიქონში არ იქნებოდა 1 და მის ნაცვლად იქნებოდა 0.

ბუნებრივ ენებში ფრაზული დიზიუნქციის (ანუ ფრაზული **ან** კავშირის) შესახებ შეიძლება გაკეთდეს იმის ანალოგიური შენიშვნები, რაც უკვე გაკეთდა ფრაზულ კონიუქციაზე. მაგალითად, წინადადება **(ერთ-ერთი მაინც) ჯონი ან მერი ეწევა** (**(Either) John or Mary smokes)** შეიძლება განვიხილოთ როგორც **ჯონი ეწევა ან მერი ეწევა** (**John smokes or Mary smokes)** წინადადების ელიფსისი და, ამგვარად, იგი გამონათქვამთა ლოგიკაში შეიძლება ითარგმნოს ($p \vee q$) სახის ფორმულით. ინგლისურ ენაში პრობლემატურად ითვლება შემდეგი სახის წინადადება **A doctor or a dantist can write prescriptions** (რომლის პირდაპირი თარგმანია **ექიმს ან დანტისტს შეუძლია გამოწეროს რეცეპტი),** სადაც ე.წ. ნაგულისხმევი ინეტრპრეტაციით რეცეპტის გამოწერა შეუძლია ორივეს, ექიმსაც და დანტისტსაც. ანუ, აქ ის, რომ ეს (ე.ი. რეცეპტის გამოწერა) ან მხოლოდ ერთს შეუძლია, ან მხოლოდ მეორეს, ლოგიკურ შესაძლებლობათა შორის არ იგულისხმება. ამგვარად, ამგვარ შემთხვევებში თარგმანი ($p \vee q$) სახის ფორმულის ნაცვლად იძლევა ($p \& q$) სახის ფორმულას.

> **რედაქტორის შენიშვნა:** ქართულში **ან-კავშირის** (ისევე როგორც **და-კავშირის)** როგორც სახელური ფრაზების მაკავშირებლის ლოგიკური ფუნქციონირების სრულად ამხსნელ-ამსახველი კანონების მოძიება ჯერ კიდევ ღია, შეუსწავლელი საკითხია. უფრო მეტიც, ინგლისური ენობრივი სისტემისაგან განსხვავებით აქ ჩვენ მხოლოდ პირველი საფეხურის კითხვებზე გვაქვს პასუხები. თუმცა, ჩვენეული პრედიკატული, ლოგიკურ-ლინგვისტური მიდგომებით ზემოგანხილული პრობლემა ამომწურავად იხსნება: ამ მიდგომებით ქართულში **სახელურ ანუ სამსჯელო ფრაზათა ან-მაკავშირებელი** მათემატიზირდება სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციად. ასე მაგალითად, წინადადებაში **დაუძახა ექიმს ან დანტისტს**, ის, ვისაც დაუძახეს, არის {ექიმი}∪{დანტისტი} სიმრავლის წევრი (ელემენტი). ამასთან, **დაუძახა** მსჯელი სიტყვის პრედიკატული, ლოგიკურ-სემანტიკური თავისებურებიდან გამომდინარე იგი ზემოგანხილულ წინადადებაში მსჯელობს {ექიმი}∪{დანტისტი} სიმრავლის ერთ, რომელიღაც კონსტანტურ ელემენტზე, რაც უკვე არაპრედიკატულ გამონათქვამთა ლოგიკაში თარგმნისას **ექსკლუზიურ ან-მაკავშირებელს** ითხოვს. იგივე მიდგომებით, წინადადებაში **ექიმს ან დანტისტს შეუძლია გამოწეროს რეცეპტი,** ის, ვისაც შეუძლია გამოწეროს რეცეპტი, ისევე როგორც ეს იყო წინა წინადადებაში, არის {ექიმი}∪{დანტისტი} სიმრავლის ელემენტი. თუმცა, ახლა უკვე, **შეუძლია** მსჯელი სიტყვის პრედიკატული, ლოგიკურ-სემანტიკური თავისებურებიდან გამომდინარე იგი წინადადებაში მსჯელობს {ექიმი}∪{დანტისტი} სიმრავლის არა ერთ, რომელიღაც კონსტანტურ ელემენტზე, არამედ ამ სიმრავლეზე განსაზღვრულ ცვლადურ მოცემულობაზე (ანუ ცვლადზე), რაც უკვე არაპრედიკატულ გამონათქვამთა ლოგიკაში თარგმნისას ცხადია **და-მაკავშირებელს** ითხოვს.

6.2.4 გამომდინარეობა

შედგენილი კავშირი **თუ ... ,მაშინ (if ... then)** ბუნებრივ ენებში გამოიყენება მრავალნაირად და იგი მრავალჯერ გამხდარა სიღრმისეული დისკუსიების საგანი. →, რომელიც გამონათქვამთა ლოგიკაში ამ შედგენილი ენობრივი კავშირის უხეში შესაბამისია, ინარჩუნებს მისი მრავალი განსხვავებული ენობრივი თვისებებიდან მხოლოდ ერთ არსებითად მნიშვნელოვან თვისებას, რომლის მიხედვითაც, **თუ ... ,მაშინ** კავშირით აგებული წინადადება მცდარია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მისი **თუ-შემადგენელი** (ე.ი. წინაპირობა) ჭეშმარიტია, ხოლო

მაშინ-შემადგენელი (ე.ი. დასკვნა) მცდარია. მაგალითად, წინადადება **თუ მერი წვეულებაზეა, მაშინ ჯონიც წვეულებაზეა** **(if Mary is at the party, then John is at the party (too))** ცხადია მცდარია, თუ მერი მართლა არის წვეულებაზე და, ამავდროულად, ჯონი არ არის წვეულებაზე. ეს ყველაფერი ასახულია → ლოგიკური კავშირის ცხრილის მეორე რიგში:

P	Q	(P → Q)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ცხრილი 6.4: გამომდინარეობის ჭეშმარიტულობის ცხრილი

ამგვარად, როგორც ეს ცხრილიდანაც ჩანს, ზემოაღწერილ შემთხვევისაგან განსხვავებულ ყველა სხვა შემთხვევაში (p→q) ჭეშმარიტია, რაც, სწორედ, არის ის, რაზეც გამომდინარეობასთან დაკავშირებით ყველაზე უფრო ხშირად კამათობენ. როდესაც ისმის კითხვა **თუ მერი წვეულებაზეა, მაშინ ჯონიც წვეულებაზეა** **(if Mary is at the party, then John is at the party (too))** წინადადების ჭეშმარიტული მნიშვნელობის თაობაზე, იმ შემთხვევაში, როდესაც **მერი არ არის წვეულებაზე** **(Mary is not at the party)** ჩვენ შეიძლება დავიბნეთ კიდეც, და გადავიხაროთ უფრო იქითკენ, რომ წინადადებას ამ შემთხვევაში არ გააჩნია რაიმე ცალსახად გამოკვეთილი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა, ან კიდევ იქითკენ, რომ ამგვარი შემთხვევის დროს წინადადების ჭეშმარიტული მნიშვნელობის თაობაზე კითხვის დასმაც კი უაზრობაა. იმ შემთხვევაშიც კი, როცა ორივენი, მერიც და ჯონიც არიან წვეულებაზე, ხშირად მაინც გვიჭირს იმის თქმა, რომ წინადადება ჭეშმარიტია, რადგან ამ წინადადების ნამდვილი ჭეშმარიტული შინაარსის გასააზრებლად ჩვენ გვჭირდება რაღაც, მანამდე არსებული ლოგიკური ანუ მიზეზობრივი კავშირის დანახვა წინადადების წინაპირობასა და მისსავე დასკვნას შორის. ამგვარად, როგორც ჩანს, ეს ის შემთხვევაა, როდესაც ლოგიკური და ბუნებრივ ენობრივი კავშირები ძლიერ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. - თქვენ როგორ განსჯიდით ჩვენს იმ არჩევანს, რომ ასეთ შემთხვევებშიც წინადადება ჭეშმარიტ წინადადებად შეფასდეს?

ჩვენი პასუხი ეყრდნობა ორ ძირითად თვალსაზრისს: (1) გამონათქვამთა ლოგიკაში თუ გამონათქვამი არ არის ჭეშმარიტი, მაშინ ის მცდარი უნდა იყოს. (2) გამომდინარეობის ასეთი გაგება იძლევა საშუალებას მათემატიკაში სამართლიანი და არასამართლიანი დასაბუთებების ანალიზისა და ამდენად, იგი მათემატიკისათვის ტრადიციულ დატვირთვას ატარებს, თუმცა ეს ყველაფერი, არ შეიძლება ითქვას, რომ სრულიად თავისუფალია უხერხული შემადგენლებისაგან.

რედაქტორის შენიშვნა: აქ გამოთქმული ზოგადი ენობრივ ლოგიკური თვალსაზრისი დღეს უკვე აღარ განიხილება ამგვარ პრობლემატურ კონტექსტში. საქმე იმაშია, რომ ფრაზა **თუ მერი წვეულებაზეა**, ცხადია, არც იმას ნიშნავს, რომ **მერი წვეულებაზეა** და არც იმას, რომ **მერი არ არის წვეულებაზე**. უფრო მეტიც, შეიძლება ითქვას, რომ ამ ფრაზას არც კი აინტერესებს **მერი არის** თუ **არ არის წვეულებაზე** არამედ, იგი იმ პირობით **თუ მერი წვეულებაზეა** გარკვეული შეტყობინების მოსაცემადაა განწყობილი, რაც განხილული მაგალითის შემთხვევაში არის ის, რომ მაშინ, თურმე, **ჯონიც წვეულებაზეა.** ამგვარად, ასეთი შეტყობინება მხოლოდ იმ შემთხვევაში შეიძლება ჩაითვალოს მცდარ შეტყობინებად, თუ შეტყობინების წინასაპირობო ანუ სათუო მონაცემი მართლდება და, ამავდროულად, ამავე სათუოობით შეტყობინებული არ მართლდება. — განვიხილოთ უფრო კონკრეტულად: ავტორები შემდეგნაირად მსჯელობენ - როდესაც ისმის კითხვა **თუ მერი წვეულებაზეა, მაშინ ჯონიც წვეულებაზეა** წინადადების

ჭეშმარიტული მნიშვნელობის თაობაზე, იმ შემთხვევაში, როდესაც **მერი არ არის წვეულებაზე** ჩვენ შეიძლება დავიბნეთ კიდეც, და გადავიხაროთ უფრო იქითკენ, რომ წინადადებას ამ შემთხვევაში არ გააჩნია რაიმე ცალსახად გამოკვეთილი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა, ან კიდევ იქითკენ, რომ ამგვარი შემთხვევის დროს წინადადების ჭეშმარიტული მნიშვნელობის თაობაზე კითხვის დასმაც კი უაზრობაა. – ასეთი მსჯელობა, დაბნეული და ენის ლოგიკურ წესრიგში გაუთვითცნობიერებელი ადამიანისაგან მისაღებიცაა, გასაგებიც და მოსალოდნელიც, მაგრამ თუ ჩვენ დავეყრდნობით ენის ლოგიკურ კანონებს (ჩვენს შემთხვევაში, თუ დავეყრდნობით ქართული ენის ლოგიკურ კანონმდებლობას), მაშინ იმან, რომ **მერი არ არის წვეულებაზე,** რა თქმა უნდა ხელი არ უნდა შეგვიშალოს **თუ მერი წვეულებაზეა, მაშინ ჯონიც წვეულებაზეა** წინადადების ჭეშმარიტული მნიშვნელობის გარკვევაში, რადგან თუ **ჯონის** შესახებ ვიცით ის, რომ **თუ მერი წვეულებაზეა, მაშინ ჯონიც წვეულებაზეა,** ე.ი. **ჯონის** შესახებ ვიცით ის, რომ **ან მერი წვეულებაზეა და, მაშინ, ეს ჯონიც არის ამ წვეულებაზე, ანდა მერი არ არის წვეულებაზე და, მაშინ, ეს ჯონი ამ წვეულებაზე ან არის, ან არა,** რაც, თავის მხრივ, იმ შემთხვევაში, როცა **მერი არ არის წვეულებაზე** ჭეშმარიტია, რადგან **ეს ჯონი ამ წვეულებაზე ან არის, ან არა** წინადადება ქართული ენის ლოგიკის კანონებიდან გამომდინარე ჭეშმარიტია საზოგადოდ. – ანუ, ჩვენ ვთვლით, რომ თუ ვინმე წინადადებას **თუ მერი წვეულებაზეა, მაშინ ჯონიც წვეულებაზეა**, გამომდინარე იქიდან, რომ ვერ ფლობს ენის ლოგიკის კანონებს, გაიაზრებს წინადადებად **მერი წვეულებაზეა და ჯონიც წვეულებაზეა,** მაშინ, ცხადია, ის ვინმე, როცა გაიგებს, რომ **მერი არ არის წვეულებაზე,** უკეთეს შემთხვევაში დაიბნევა, უარეს შემთხვევაში კი ჩათვლის, რომ ის მოატყუეს, როდესაც უთხრეს, რომ **თუ მერი წვეულებაზეა, მაშინ ჯონიც წვეულებაზეაო! –** ამგვარად, **თუ ... ,მაშინ** კავშირთან და გამომდინარეობასთან დაკავშირებით ზემოაღნიშნული უხერხულობები განპირობებულია არა ენაში და ამ ენის ლოგიკაში არსებული ბუნდოვანებებით, არამედ იმ ბუნდოვანებით, რაც შეიძლება ამ ენისა და ამ ენის ლოგიკის არასრულად და არასიღრმისეულად მცოდნე რომელიმე ერთეულში იყოს უკვე აღნიშნულთა გამო!

ამოცანა: გააკეთეთ ზემოგამოთქმული ავტორისეული თვალსაზრისის კრიტიკული ანალიზი იმ შემთხვევისათვის, როცა ორივენი, მერიც და ჯონიც, წვეულებაზე არიან.

6.2.5 იგივურობა

იგივურობის ჭეშმარიტულობის ცხრილი მოცემულია 6.5 ნახაზზე

P	Q	(P ↔ Q)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ცხრილი 6. 5: იგივურობის ჭეშმარიტულობის ცხრილი

ბუნებრივი ენის შემდეგი გამოსახულებები: **მაშინ, და მხოლოდ მაშინ (if and only if), იმ, და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა (just in case that), აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ (is a necessary and sufficient condition for),** და არა მარტო ისინი, გამონათქვამთა ლოგიკაში ლოგიკური იგივურობის კავშირით ითარგმნებიან. ზოგჯერ, ის, თუ ბუნებრივი ენის ესა თუ ის გამოსახულება გამომდინარეობად უნდა ითარგმნოს თუ იგივურობად, არ არის ადვილი გასარკვევი. ასე მაგალითად, წინადადება **თუ მანქანა გავაკეთე, ხვალ წავალ (I will leave tomorrow if I get the car fixed)** შეიძლება იქნეს გაგებული ისე

თითქოსდა **მანქანის გაკეთება** არის საკმარისი პირობა **ხვალ წასვლისა**, ანუ ხვალ შეიძლება სხვა შემთხვევაშიც წავიდე და ისედაც, თითქოსდა, **მანქანის გაკეთება** არის **ხვალ წასვლის** არა მარტო საკმარისი, არამედ აუცილებელი პირობაც. ანუ, ხვალ, თუ მანქანა არ იქნება გაკეთებული, არ წავალ. ეს უკანასკნელი ინტერპრეტაცია აზრდება მაშინ, როცა კავშირი გაიგება **მაშინ, და მხოლოდ მაშინ** შინაარსით: **ხვალ წავალ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, თუ მანქანა გავაკეთე (I will leave tomorrow if and only if I get the car fixed).** მათემატიკაში ამ კავშირს ხშირად ამოკლებენ **მმმ (iff)** გამოსახულებით. მათემატიკური ცნებების ფორმალური, მათემატიკურად მკაცრი განსაზღვრებები ხშირად ითხოვენ ამ კავშირს. ასე მაგალითად.

(6-3) Xი იწოდება Yად (ანუ არის Yი) მმმ, თუ (როცა) Xს აქვს P თვისება.

ამ განსაზღვრებაში **თუ ... ,მაშინ** კავშირის გამოყენება **მაშინ, და მხოლოდ მაშინ** კავშირის ნაცვლად იძლევა შესაძლებლობას იმისა, რომ Xი იწოდებოდეს Yად მაშინაც, როცა მას არა აქვს P თვისება. **მაშინ, და მხოლოდ მაშინ** კავშირით კი, Xი ისაზღვრება Yად მხოლოდ მაშინ, როცა მას აქვს ეს P თვისება.

ჭეშმარიტულობის ცხრილები იძლევა ნებისმიერი რთული (ანუ შედგენილი) გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის გამოთვლის ზოგად და სისტემურ საშუალებებს. ამასთან, ნებისმიერ ფორმულას ბუნებრივად ეთანადება ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ისეთი ცხრილი, რომლის სტრიქონების რაოდენობა ტოლია ფორმულაში შემავალი ატომალური გამონათქვამების ყველა შესაძლო ჭეშმარიტული შეფასებების რაოდენობისა. საზოგადოდ, ცხრილი შესდგება 2^n სტრიქონისაგან, თუ ფორმულა შეიცავს n ცალ განსხვავებულ ატომალურ გამონათქვამს. ნებისმიერი ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის გამოთვლის სტანდარტული მეთოდი ითვალისწინებს ფორმულის ჯერ უფრო ღრმად ჩადებული ნაწილების მნიშვნელობების გამოთვლის საფუძველზე მათი მომცველი ნაწილების ჭეშმარიტული მნიშვნელობების გამოთვლას. ამგვარად, იმისათვის, რომ ავაგოთ $((p\&q)\rightarrow\sim(p\vee r))$ გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილი შეგვიძლია მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

(I) ავაგოთ სვეტები p, q და r ატომალური გამონათქვამებისათვის;
(II) ავაგოთ სვეტები $(p\&q)$ და $(p\vee r)$ გამონათქვამებისათვის;
(III) ავაგოთ სვეტი $\sim(p\vee r)$ გამონათქვამისათვის, რომელიც მიიღება $(p\vee r)$ გამონათქვამის მნიშვნელობათა სვეტის ინვერსირებით;
(IV) ავაგოთ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა სვეტი მთელი გამონათქვამისათვის $(p\&q)$ და $\sim(p\vee r)$ გამონათქვამების ჭეშმარიტულ მნიშნელობათა სვეტებისა და გამომდინარეობის ცხრილის მეშვეობით.

მთელი ეს აღწერილი პროცესი თვალნათლივ გამოხატულია შემდეგი ცხრილით:

p	q	r	(p & q)	(p ∨ r)	~(p ∨ r)	((p & q) → ~(p ∨ r))
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1

0	0	0	0	0	1	1

ცხრილი 6-6: ((p & q) → ~ (p ∨ r))
გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი

ცხადია, რომ ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილის აგება მით უფრო რთულდება, რაც მეტია გამოსათვლელ გამონათქვამში მონაწილე ატომალურ გამონათქვამთა რაოდენობა. თუმცა, თეორიულად შესაძლებელია ნებისმიერი გამონათქვამის სრული ჭეშმარიტული ცხრილის აგება.

6.3 იგივურად ჭეშმარიტობა, იგივურად მცდარობა და არაერთიგივურობა

გამონათქვამები შეგვიძლია დავახასიათოთ მათივე ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილების მეშვეობით. გამონათქვამი იწოდება **იგივურად ჭეშმარიტად (ზოგად მართებულად, ლოგიკურად ჭეშმარიტად),** თუ მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილის ბოლო სვეტი შედგება მხოლოდ 1-ებისაგან, ანუ თუ გამონათქვამი ჭეშმარიტია, მიუხედავად იმისა, თუ ჭეშმარიტულად როგორ არის შეფასებული მისი შემადგენელი ატომალური გამონათქვამები. ასეთ შემთხვევებში გამონათქვამის ჭეშმარიტობის ძირითადი მიზეზი არის მისი შემადგენელი კავშირებისა და მასში შემავალი ატომალური გამონათქვამების ურთიერთ განლაგება (კონსტრუქცია). გამონათქვამი იწოდება **იგივურად მცდარად (წინააღმდეგობრივად)** თუ მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილის ბოლო სვეტი შედგება მხოლოდ 0-ებისაგან, ანუ თუ გამონათქვამი მცდარია, მიუხედავად იმისა, თუ ჭეშმარიტულად როგორ არის შეფასებული მისი შემადგენელი ატომალური გამონათქვამები. ყველა დანარჩენი გამონათქვამი, ანუ ყველა ის გამონათქვამი, რომელთა ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილის ბოლო სვეტი შეიცავს როგორც 0-ებს, ისე 1-ებს, იწოდება ორმხრივშესრულებადად (**არაერთიგივურად**). ასეთი ფორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობა (ანუ მათი ჭეშმარიტება ან მცდარობა) დამოკიდებულია მათი შემადგენელი ატომალური გამონათქვამების ჭეშმარიტულ შეფასებებზე.

ქვემოთ განიხილება თითოეული ზემოთ უკვე აღწერილი სახის ფორმულის რამდენიმე მაგალითი:

- იგივურად ჭეშმარიტები არიან: (p∨~p), (p→p), (p→(q→p)), ~(p&~p)
- იგივურად მცდარები არიან: ~(p∨~p), (p&~p), ~((p∨q)↔(q∨p))
- არაერთიგივურები არიან: p, (p∨p), ((p∨q)→q), ((p→q)→p)

ქვემოთ, საჩვენებლად, მოყვანილია (p∨~p) და (p&~p) გამონათქვამების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილები:

p	~p	(p∨~p)
1	0	1
0	1	1

ცხრილი 6-7: (p∨ ~p) იგივურად ჭეშმარიტი ფორმულის ცხრილი

p	~p	(p&~p)
1	0	0

0	1	0

ცხრილი 6-8: (p&~p) იგივურად
მცდარი ფორმულის
ცხრილი

ზოგადმართებული ანუ იგივურად ჭეშმარიტი და წინააღმდეგობრივი ანუ იგივურად მცდარი გამონათქვამების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი თვისება არის ის, რომ ამ გამონათქვამების შემადგენელი ნებისმიერი ატომალური გამონათქვამის ჩანაცვლება სხვა ნებისმიერი გამონათქვამით არ ცვლის მათ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ ჩვენ (p∨~p) ზოგადმართებულ ფორმულაში p გამონათქვამს ჩავანაცვლებთ (q→r) ფორმულით მივიღებთ ((q→r)→~(q→r)) ფორმულას, რომელიც, როგორც ამას 6-9 ცხრილიც ადასტურებს, ისევ ზოგადმართებული გამონათქვამია. საზოგადოდ, (p∨~p) გამონათქვამში p განუყოფელი ფორმულის ნაცვლად ნებისმიერი Q ფორმულის ჩასმით (ე.ი. p ფორმულის Q ფორმულით ჩანაცვლებით) ვღებულობთ (Q∨~Q) სახის ფორმულას. ამასთან, ცხადია, რომ Q ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ცხრილის ნებისმიერ სტრიქონში არის ამავე სტრიქონში ~Q ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის შებრუნებული. აქედან გამომდინარე, (Q∨~Q) ფორმულის ცხრილის მნიშვნელობათა სვეტის ნებისმიერ სტრიქონში არის ჭეშმარიტის აღმნიშვნელი სიმბოლო 1. რამდენადაც აღნიშნულ მსჯელობაში Q შეიძლება იყოს აბსოლუტურად ნებისმიერი ფორმულა, ჩვენ ვრწმუნდებით, რომ (Q∨~Q) სახის ფორმულა ზოგადმართებულია მისი ფორმის ანუ კონსტრუქციის გამო, რაც ფორმულაში ატომალური გამონათქვამებისა და ლოგიკური კავშირების ურთიერთგანლაგებას გულისხმობს, და არა ამ ფორმულის რომელიმე შემადგენელი ატომალური გამონათქვამის მიზეზით. იგივე ტიპის მსჯელობით კეთდება იგივე დასკვნა წინააღმდეგობრივი გამონათქვამებისათვის.

q	r	(q → r)	~(q → r)	((q → r) ∨~(q → r))
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

6-9 ცხრილი: ცხრილი რომელიც გვიჩვენებს ((q → r)∨~(q → r))
გამონათქვამის ზოგადმართებულებას

ხშირად ძალიან მნიშვნელოვანი ხდება ვიცოდეთ ესა თუ ის ფორმულა იგივურად ჭეშმარიტია თუ არა, და რადგანაც ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილების სიდიდის გამო რიგ შემთხვევებში მათი აგება მოუხერხებელია, ხშირად სარგებლობენ ხოლმე ე.წ. ,,სწრაფად უარმყოფელი‘‘ ტესტით, რომელიც სისტემურად ეძებს ცხრილის ისეთ სტრიქონებს, რომელთა დამასრულებელი უჯრა (ანუ მნიშვნელობათა სვეტში განთავსებული უჯრა) ივსება მცდარი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის აღმნიშვნელი 0 სიმბოლოთი. ამასთან, თუ ასეთი სისტემური ძებნის შედეგად ამგვარი სტრიქონი არ დაიძებნა, მაშინ ჩვენ დასაბუთებულად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ტესტური კვლევის ქვეშ მყოფი გამონათქვამი ზოგადმართებულია. აღნიშნული ტესტი არის კერძო შემთხვევა წინააღმდეგობამდე მიყვანის წესად წოდებული გამოყვანის უფრო ზოგადი მეთოდისა. ამ მიდგომით, ჩვენ ვუშვებთ, რომ არსებობს სტრიქონი, რომელშიც დამასრულებელ მნიშვნელობად ზის 0 და ამ დაშვებიდან გამომდინარე მსჯელობას ,,მივყვებით უკან‘‘ (ე.ი. **უკუემსჯელობთ**) ასეთი შესაძლო სტრიქონის რეალური აგების მიზნით, ამასთან, ბუნებრივია, უკუმსჯელობისას ვითვალისწინებთ იმას, რომ სტრიქონში არ უნდა ჩაგვიჯდეს ფორმულის შემადგენელი ატომალური გამონათქვამების წინააღმდეგობრივი (ანუ ერთმანეთის

გამომრიცხავი) ჭეშმარიტული შეფასებები. გავაკეთოთ აღნიშნული პროცედურის ილუსტრირება ერთ მარტივ მაგალითზე: $(p\to(q\to p))$. დავუშვათ, რომ მის ცხრილში არის სტრიქონი, რომელიც სრულდება მნიშვნელობით 0. პროცედურის შესაბამისად, ჩვენ, აღნიშნულ დამასრულებელ მნიშვნელობას ქვეშმიწერის წესით პირდაპირ ვუერთებთ გამონათქვამის მთავარ ლოგიკურ კავშირს, ანუ იმ ლოგიკურ კავშირს, რომელიც უკანასკნელი ოპერირების წესით საბოლოოდ აყალიბებს გამონათქვამს.

$$\begin{array}{ccccccc} (& p & \to & (q & \to & p) &) \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

შემდგომ ამისა, უკუმსჯელობით, უკვე გაკეთებული დაშვებისა და გამომდინარეობის იმ თვისების საფუძველზე, რომ იგი მცდარია მხოლოდ მაშინ, როცა პირობა არის 1 (ჭეშმარიტი) და დასკვნა კი 0 (მცდარი), ვღებულობთ გამონათქვამის მთავარი ოპერატორის (ჩვენს შემთხვევაში გამომდინარეობის მარცხნიდან პირველი ოპერატორის) ოპერანდების ჭეშმარიტულ შეფასებებს, რაც სქემატურად შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\begin{array}{ccccccc} (& p & \to & (q & \to & p) &) \\ & 1 & 0 & & 0 & & \end{array}$$

ახლა, გვაქვს რა უკვე p ატომის ჭეშმარიტული შეფასება 1 მნიშვნელობით, ვსვამთ მას დასკვნაში არსებული p ატომის შემოსვლის ნაცვლად (ამის უფლება გვაქვს, რადგანაც ერთი სტრიქონის გასწვრივ ატომის ჭეშმარიტული შეფასება საერთოა გამონათქვამში ამ ატომის ნებისმიერი შემოსვლისათვის):

$$\begin{array}{ccccccc} (& p & \to & (q & \to & p) &) \\ & 1 & 0 & & 0 & 1 & \end{array}$$

ახლა უკვე, თუ დავაკვირდებით გამომდინარეობის ცხრილს ადვილად დავასკვნით, რომ ჩვენ ვიმყოფებით წინააღმდეგობრივ ანუ ურთიერთ გამომრიცხავ ჭეშმარიტულ შეფასებაში, რადგან, ერთი მხრივ, $(q\to p)$ უნდა იყოს მცდარი (ე.ი. 0) და, მეორე მხრივ კი, p უნდა იყოს ჭეშმარიტი (ე.ი. 1), რაც წინააღმდეგობრივია, რადგან გამომდინარეობა მხოლოდ მაშინ შეიძლება იყოს მცდარი, როცა p მცდარია. ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ჩვენი დაშვება იმის თაობაზედ, რომ გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილში არსებობს სტრიქონი, რომელიც მცდარი ჭეშმარიტული მნიშვნელობით სრულდება, თავად არის მცდარი. ამგვარად, დასაბუთდა, რომ განსახილველი ფორმულის ცხრილის ყველა სტრიქონი თავდება ჭეშმარიტული მნიშვნელობით 1, რაც ნიშნავს იმას, რომ $(p\to(q\to p))$ არის ზოგადმართებული.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი $((p\to q)\to p)$, რომელიც ძლიერ გავს უკვე განხილულ მაგალითს, მაგრამ იგი მისგან განსხვავებით არაერთიგივურია.

ნაბიჯი 1. $$\begin{array}{ccccccc} ((& p & \to & q) & \to & p &) \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

ნაბიჯი 2. $$\begin{array}{ccccccc} ((& p & \to & q) & \to & p &) \\ & & 1 & & 0 & 0 & \end{array}$$

ნაბიჯი 3. $$\begin{array}{ccccccc} ((& p & \to & q) & \to & p &) \\ & 0 & 1 & & 0 & 0 & \end{array}$$

რადგან (p→q) გამომდინარეობა უნდა იყოს ჭეშმარიტი და რადგანაც p ატომის მცდარობის შემთხვევაში ეს შესაძლებელია q ატომის ორივე შესაძლო ჭეშმარიტული შეფასებისათვის, ვღებულობთ შემდეგს:

ნაბიჯი 4. ((p→ q) → p)
0 1 0 0 0

ნაბიჯი 4′. ((p→ q) → p)
0 1 1 0 0

ამგვარად, 4 და 4′ ბიჯებით მივიღეთ, რომ q შეიძლება იყოს როგორც 1, ისე 0, რითაც პროცედურა დასრულდა წინაალმდეგობრივ ჭეშმარიტულ შეფასებაში ანუ წინაალმდეგობაში შესვლის გარეშე. ეს იმას ნიშნავს, რომ გამონათქვამი ((p→q)→p) არ არის იგივურად ჭეშმარიტი, ანუ, საზოგადოდ, ამგვარი გამონათქვამი შეიძლება იყოს როგორც იგივურად მცდარი, ისე არაერთიგივური, მაგრამ, ჩვენს შემთხვევაში, აღარ არის საჭირო მისი არაწინაალმდეგობრიობის უარსაყოფად გამამარტივებელი ტესტით სარგებლობა, რადგან იმის გათვალისწინებით, რომ პროცესის შედეგად განისაზღვრა ყველა ის შესაძლო ჭეშმარიტული შეფასება, რომელთათვისაც ფორმულა მცდარდება, ფაქტიურად, უკვე ფორმულის მთელი ცხრილია აგებული. ამგვარად, ცხადია, რომ პროცესით ჯერ არ განსაზღვრული ჭეშმარიტული შეფასებებისათვის ფორმულა ჭეშმარიტ მნიშვნელობას ღებულობს.

შევნიშნოთ, რომ ეს მეთოდი ყოველთვის არ იძლევა დროის მოგების საშუალებას, კერძოდ კი მაშინ, როდესაც გამონათქვამი მცდარ მნიშვნელობას ღებულობს მრავალ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ჭეშმარიტულ შეფასებაში.

6.4 ლოგიკური იგივურობა, ლოგიკური შედეგი და კანონები

თუ იგივურობის ლოგიკური კავშირით, როგორც მთავარი ოპერატორით, აგებული გამონათქვამი არის იგივურად ჭეშმარიტი, მაშინ, ვამბობთ, რომ იგივურობის ამ კავშირით დაკავშირებული გამონათქვამები **ლოგიკურად იგივური** გამონათქვამებია. მაგალითად, ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა 6-10 ცხრილი გვიჩვენებს, რომ ~(p∨q) და (~p&~q) ფორმულები არიან ლოგიკურად იგივურნი, რადგანაც (~(p∨q)↔(~p&~q)) იგივურად ჭეშმარიტია.

p	q	(p ∨ q)	~(p ∨ q)	~p	~q	(~p&~q)	(~(p ∨ q)↔ (~p&~q))
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

6-10 ცხრილი: (~(p∨ q) ↔ (~p & ~q)) გამონათქვამის
ზოგადმართებულობის დამადასტურებელი
ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი

გამონათქვამთა ლოგიკური იგივურობა შეიძლება განისაზღვროს აგრეთვე იმის საფუძველზე, რომ ეს გამონათქვამები ღებულობენ ერთი და იგივე ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებს მათში შემავალი ატომალური გამონათქვამების ნებისმიერი შესაძლო ჭეშმარიტული შეფასებისათვის (დამნიშვნელებისათვის). დააკვირდით მეოთხე და მეშვიდე სვეტებს 6-10 ცხრილში. ცხადია, რომ თუ ფორმულები აკმაყოფილებენ ზემოშემოთავაზებული განსაზღვრებით მოცემულ პირობებს, მაშინ მათი იგივურობის ლოგიკური კავშირით დაკავშირების შედეგად მიღებული ფორმულა იქნება იგივურად ჭეშმარიტი.

ლოგიკურად იგივური გამონათქვამები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ მკაცრი და დაფუძნებული მსჯელობათა წარმოებისას, რადგანაც ისინი თავისუფლად ენაცვლებიან ერთმანეთს, თანაც ისე, რომ არანაირ ზეგავლენას არ ახდენენ მათი შემცველი გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობაზე. მაგალითად, თუ $(p\vee q)$ გამონათქვამში p გამონათქვამს ჩავანაცვლებთ მისი იგივური $(p\&p)$ გამონათქვამით მივიღებთ $(p\vee q)$ გამონათქვამის იგივურ $(p\&p)\vee q$ გამონათქვამს, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა p და q ატომების ნებისმიერ დამნიშვნელებაში ემთხვევა იგივე დამნიშვნელებაში თავდაპირველი ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. ამგვარად, ლოგიკურად იგივური გამოსახულებების ურთიერთჩანაცვლება ყოველთვის ინარჩუნებს ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, ანუ, ინარჩუნებს როგორც მცდარობას, ისე ჭეშმარიტებას. ის, რომ ნებისმიერად აღებული P და Q გამონათქვამები ლოგიკურად იგივურები არიან შემდეგნაირად აღინიშნება $P\Leftrightarrow Q$. შევნიშნოთ, რომ ეს „ორმაგი ისარი" არის არა გამონათქვამების მაკავშირებელი ახალი ლოგიკური კავშირის აღმნიშვნელი სიმბოლო, არამედ პირობით შეთანხმებული აღნიშვნა იმისა, რომ $(P\leftrightarrow Q)$ ფორმულა იგივურად ჭეშმარიტია.

თუ გამომდინარეობით აგებული გამონათქვამი ზოგადმართებულია, მაშინ ვამბობთ, რომ ამ გამომდინარეობის დასკვნა არის **ლოგიკური შედეგი** ამავე გამომდინარეობის წინაპირობისა ან, რაც იგივეა, რომ წინაპირობის ჭეშმარიტება **ლოგიკურად იწვევს** დასკვნის ჭეშმარიტებას.

6-11 ცხრილით განიხილება მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ q არის $((p\rightarrow q)\&p)$ ფორმულის ლოგიკური შედეგი.

p	q	(p→q)	((p→q) & p)	(((p→q) & p)→q)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

6-11 ცხრილი: ცხრილი გვიჩვენებს, რომ q არის
$((p\rightarrow q)\ \&\ p)$ გამონათქვამის ლოგიკური შედეგი

ფორმულა, რომელიც პირველსაწყისი ფორმულის ლოგიკური შედეგია, ისევე როგორც ამ პირველსაწყისი ფორმულის ლოგიკურად იგივური ფორმულა, ინახავს ჭეშმარიტებას, თუმცა ლოგიკურად იგივური ფორმულისაგან განსხვავებით ფორმულის ლოგიკური შედეგი ვერ ინარჩუნებს საწყისი ფორმულის მცდარობას. ეს განპირობებულია იმით, რომ მთლიანი გამომდინარეობის იგივურად ჭეშმარიტება მისი წინაპირობის ჭეშმარიტების შემთხვევაში ცალსახად განაპირობებს მისივე დასკვნის ჭეშმარიტებას (იხ. 6-11 ცხრილის 1-2 სტრიქონები), მაშინ როდესაც ამ გამომდინარეობის წინაპირობის მცდარობის შემთხვევაში გამომდინარეობის დასკვნა, მიუხედავად იმისა, რომ მთლიანი გამომდინარეობა ჭეშმარიტია, შეიძლება იყოს მცდარიც და ჭეშმარიტიც (იხ. 6-11 ცხრილის 3-4 სტრიქონები). შემდეგ თავში ჩვენ ვნახავთ, რომ ლოგიკური შედეგის მიმართება მნიშვნელოვანი მიმართებაა, რამდენადაც სწორედ ის არის მართებული გამოყვანების ანუ მართებული მსჯელობების ამგები ერთ-ერთი ძირითადი საშუალება. ჩვენ ვწერთ $P\Rightarrow Q$ გამოსახულებას იმის მისანიშნებლად, რომ P არის Q გამონათქვამის ლოგიკური შედეგი.

საზოგადოდ, თუ ცნობილია, რომ $P\Rightarrow Q$ და თუ რაიმე გამონათქვამში P გამონათქვამს, როგორც მის ნაწილს, ჩავანაცვლებთ Q გამონათქვამით, ჩვენ არ გვეძლევა საშუალება დავასკვნათ, რომ ასეთი ჩანაცვლებით ნარჩუნდება ჭეშმარიტება. მაგალითად, ცნობილია, რომ $((p\&{\sim}p)\Rightarrow p)$ (ამ ფაქტის სამართლიანობას მკითხველი ადვილად გადაამოწმებს ცხრილის მეშვეობით), მიუხედავად ამისა, ჩვენ არ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $((p\&{\sim}p)\rightarrow q)\Rightarrow(p\rightarrow q)$, ანუ $(p\&{\sim}p)\rightarrow q)$ ჭეშმარიტ გამონათქვამში $(p\&{\sim}p)$ ნაწილის ნაცვლად მისი ლოგიკური შედეგის

ანუ p გამონათქვამის ჩანაცვლება არ იძლევა ჭეშმარიტ გამონათქვამს. მართლაც, იმ შემთხვევაში, როცა p არის ჭეშმარიტი და q არის მცდარი $(p\&\sim p) \rightarrow q$ ჭეშმარიტია, ხოლო $(p \rightarrow q)$ კი მცდარი. ამგვარად, ჩვენი შენიშვნა, რომ ლოგიკური შედეგი ინახავს ჭეშმარიტებას, ითვალისწინებს მხოლოდ მთლიანი გამონათქვამის ჩანაცვლებას მისი ლოგიკური შედეგით და არა რომელიმე გამონათქვამში მისი რომელიმე ნაწილის ჩანაცვლებას ამ ნაწილის რომელიმე ლოგიკური შედეგით. ეს არის ის ძირითადი განსხვავება ლოგიკური შედეგობის და ლოგიკური იგივურობის მიმართებებს შორის, რაზედაც ზემოთ უკვე გვქონდა ხაზგასმა და სადაც ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ნებისმიერი ფორმულის ნებისმიერი ქვეფორმულის (ე.ი მისი ნაწილი ფორმულის) ჩანაცვლება მისი იგივური ფორმულით არ ცვლის მთლიანი ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას ამ ფორმულების შემადგენელი განუყოფელი ფორმულების არცერთი დამნიშვნელებისათვის.

ზოგადი ლოგიკური და მათემატიკური თვალსაზრისებით მოსახერხებელია ლოგიკური იგივურობების გარკვეული მცირე რიცხვის გამოყოფა იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს ყველა დანარჩენის მათგან გამოყვანა. ასეთი, ყველაზე უფრო ხშირად გამოყენებადი კანონები მათ დასახელებებთან ერთად მოიცემა 6-12 ცხრილით. აქ ზოგიერთი კანონი გამოყვანადია დანარჩენებისაგან და ამ თვალსაზრისით ეს ცხრილი სიჭარბესაც კი განიცდის, რაც გამართლებულია იმით, რომ მიუხედავად ამისა, იგი მოსახერხებელია ზემომოხაზული მიზნებისათვის. გამომდინარე იქიდან, რომ ამ და შემდეგ თავში ამ კანონებს მრავალჯერ დავეყრდნობით, სასურველია მათი როგორც გააზრება, ისე დამახსოვრება. ჩვენ ვიყენებთ T, შესაბამისად, F სიმბოლოს ნებისმიერად აღებული იგივურად ჭეშმარიტი, შესაბამისად, მცდარი გამონათქვამის აღსანიშნავად, ხოლო P, Q და R სიმბოლოებით სრულიად ნებისმიერ (ანუ როგორც განუყოფელ, ისე შედგენილ) ფორმულებს აღვნიშნავთ.

გამონათქვამთა ლოგიკის კანონები

1. იდემპოტენტობის კანონები

(ა) $(P \vee P) \Leftrightarrow P$

(ბ) $(P \& P) \Leftrightarrow P$

2. ასოციაციურობის კანონები

(ა) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

(ბ) $(P \& Q) \& R \Leftrightarrow P \& (Q\&R)$

3 კომუტაციურობის კანონები

(ა) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$

(ბ) $(P \& Q) \Leftrightarrow (Q \& P)$

4. დისტრიბუციულობის კანონები

(ა) $P \vee (Q \& R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \& (P \vee R)$

(ბ) $P \& (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \& Q) \vee (P\&R)$

5. იდენტურობის კანონები

(ა) $(P \vee F) \Leftrightarrow P$

(ბ) $(P \vee T) \Leftrightarrow T$

(გ) $(P \& F) \Leftrightarrow F$

(დ) $(P \& T) \Leftrightarrow P$

6. დამატების (სისრულის) კანონები

(ა) $(P \vee \sim P) \Leftrightarrow T$

(ბ) $\sim\sim P \Leftrightarrow P$

(აგრეთვე იწოდება ორმაგი უარყოფის კანონად)

(გ) $(P \& \sim P) \Leftrightarrow F$

7. დე მორგანის კანონები

(ა) $\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow (\sim Q \& \sim P)$

(ბ) $\sim (P \& Q) \Leftrightarrow (\sim Q \vee \sim P)$

8. გამომდინარეობის კანონები

(ა) $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q)$

(ბ) $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$

(აგრეთვე იწოდება კონტრპოზიციის კანონად)

(გ) $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \sim(P \& \sim Q)$

9. ორმხრივგამომდინარეობის (ანუ იგივურობის კავშირის) კანონები

(ა) $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$ (ბ) $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim P \& \sim Q) \vee (Q \& P)$

ცხრილი 6-12

ამ იგივურობების სამართლიანობაში ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ ჩვენს მიერ უკვე განხილული ცხრილური მეთოდით. მაგალითისათვის ავიღოთ 8(ა) იგივურობა და განვიხილოთ მისი ერთ-ერთი კერძო მაგალითი $(p\rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$. გასაგებია, რომ თუ ეს გამონათქვამები მართლა იგივური გამონათქვამებია, მაშინ $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ გამონათქვამი იგივურად ჭეშმარიტი უნდა იყოს, რაც ადვილად მოწმდება 6-13 ცხრილით. ახლა, თუ გავიხსენებთ ჩვენს მიერ უკვე გაკეთებულ შენიშვნას იმის თაობაზედ, რომ ფორმის არ მრღვევი ჩასმა ინარჩუნებს ზოგადმართებულებას შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\sim P\vee Q)$ გამონათქვამი ზოგადმართებულია, რაც უკვე ადასტურებს გამომდინარეობის კანონების 8(ა) კერძო შემთხვევას.

p	q	$(p\rightarrow q)$	$\sim p$	$(\sim p\vee q)$	$((p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q))$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

ცხრილი 6-13

რამდენადაც ლოგიკურად იგივური გამონათქვამების ურთიერთჩანაცვლებით არ იცვლება გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა, ჩვენ საშუალება გვეძლევა გამოვიყენოთ ეს კანონები გამონათქვამების გარდასაქმნელად მათივე იგივური, მაგრამ უფრო მარტივი ფორმის მქონე გამონათქვამებად. ამ სახის პროცედურის საჩვენებლად განვიხილოთ ერთი მარტივი მაგალითი. კერძოდ, ვაჩვენოთ, რომ ამ წესებით $(p\rightarrow(\sim q\vee p))$ გამონათქვამი დაიყვანება T გამონათქვამზე, ანუ, ვაჩვენოთ, რომ იგი იგივურად ჭეშმარიტია. გამოყვანის თითოეულ ბიჯზე გამოყენებულ კანონს ჩვენ მივანიშნებთ სტრიქონის მარჯვენა ბოლოში.

(6-4)
1. $(p\rightarrow(\sim q \vee p))$
2. $(\sim p\vee (\sim q \vee p))$ **გამომდინარეობის კანონი**
3. $((\sim q\vee p) \vee \sim p)$ **კომუტაციურობის კანონი**
4. $(\sim q\vee (p \vee \sim p))$ **ასოციაციურობის კანონი**
5. $(\sim q\vee T)$ **დამატების კანონი**
6. T **იდენტურობის კანონი**

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, იგივურით შეიძლება ჩავანაცვლოთ ნებისმიერი ფორმულის ნებისმიერი ქვეფორმულა. ამასთან, ყოველთვის, ასეთი ჩანაცვლების შედეგად მიღებული ახალი ფორმულა თავდაპირველი ფორმულის იგივურია. მაგალითად, $p\&(\sim q\vee r)$ არის $p\&(q\rightarrow r)$ ფორმულის ლოგიკურად იგივური ფორმულა. ამასთან, იგი მიიღება პირველსაწყის ფორმულაში $(\sim q\vee r)$ ქვეფორმულის ჩანაცვლებით მისივე იგივური $(q\rightarrow r)$ ფორმულით. რამდენადაც, იგივურ ფორმულებს აქვთ ერთი და იგივე ჭეშმარიტული მნიშვნელობები მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილის ნებისმიერ სტრიქონში, მათ, როგორც ნაწილებს დიდი ფორმულისა, ერთი და იგივე წვლილი შეაქვთ ამ დიდი ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ფორმირებაში. ამგვარად, გასაგებია, რომ ასეთი ჩანაცვლებით დიდი ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა არ იცვლება. ამ წესს ზოგჯერ ჩასმის წესადაც იხსენიებენ.

ჩასმის წესი მოქმედებს ფორმულაში მისი ქვეფორმულების ჩანაცვლების გზით, ე.ი. იგი მოქმედებს მხოლოდ მთლიანი ფორმულის სინტაქსურ ანუ ფორმალურ შემადგენლებზე. ამ წესს მიუხედავად იმისა, რომ p&q და q&p ფორმულები იგივური ფორმულებია, არ შეუძლია p&(q→r) ფორმულა გარდაქმნას q&(p→r) ფორმულად, რადგან p&q და q&p ფორმულებიდან არცერთი არ არის p&(q→r) ფორმულის სინტაქსური შემადგენელი (ანუ ქვეფორმულა).

შემდეგ გამოყვანაში, მეოთხე ხაზზე, ჩასმის წესის გამოყენება მონიშნულია „ქვე" ჩანაწერით. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ ბიჯით დამატების კანონი გამოიყენება არა მთლიან ფორმულაზე, არამედ მის ერთ, რომელიღაც ქვეფორმულაზე. გამოყვანა არ ისახავს მიზნად თავიდან აღებული ფორმულის გამარტივებას, არამედ იგი გვიჩვენებს თუ როგორ შეიძლება ერთ ფორმულაზე დაყრდნობილებმა გამოვიყვანოთ სხვა, ახალი ამ ფორმულის ლოგიკურად იგივური ფორმულა. აქ P და Q ნებისმიერი ფორმულებია.

(6-5) 1. $P \rightarrow Q$
2. $\sim P \vee Q$ **გამომდინარეობის წესი**
3. $Q \vee \sim P$ **კომუტაციურობის წესი**
4. $\sim\sim Q \vee \sim P$ **დამატების (ქვე) წესი**
5. $\sim Q \rightarrow \sim P$ **გამომდინარეობის წესი**

შევნიშნოთ, რომ თითქმის იგივე გამოყვანა გვაძლევს p→q ფორმულის იგივურ ~q→~p ფორმულას. მაგრამ, რადგანაც ცნობილია, რომ იგივურობა არ იკარგება ფორმულის ზოგადი ფორმის შემნარჩუნებელი ჩასმით, ჩვენ შეგვიძლია იგივე გამოვიყვანოთ ანუ მივიღოთ ამ ზოგადი გამოყვანის სქემის უბრალო დაკონკრეტებითაც.

6.5 ბუნებრივი გამოყვანები

ჩვენ უკვე ვნახეთ თუ როგორ უერთდებიან გამონათქვამები ერთმანეთს სინტაქსურად, როგორ განისაზღვრება ლოგიკური კავშირების შინაარსი მათი ჭეშმარიტული ცხრილების მეშვეობით, როგორ ხერხდება ამ ცხრილების დახმარებით რთული ანუ შედგენილი გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობების გამოთვლა, და ისიც, თუ როგორ კეთდება გამონათქვამების იგივური გარდაქმნები (გადაწერები) ცნობილი ლოგიკური კანონების საფუძველზე. ამგვარად, ჩვენ უკვე მზადა ვართ მართებული მსჯელობების ანუ გამოყვანების ნიმუშების განხილვისა და ანალიზისათვის.

ნებისმიერი **გამოყვანის (დასაბუთების, მტკიცების) წესი** შედგება (1) რაღაც რაოდენობის გამონათქვამებისაგან, რომლებსაც წესის **წინაპირობებს** ანუ წესის **პირობით დებულებებს** უწოდებენ და რომლებიც, თუნდაც მხოლოდ გამოყვანის ამ წესში მათი პირობითობის გამო, მიჩნეულნი არიან ჭეშმარიტ გამონათქვამებად და (2) გამონათქვამისაგან, რომელსაც **გამოყვანის წესის დასკვნა** ეწოდება, და რომლის ჭეშმარიტებაც ითვლება, რომ აუცილებლობის წესით უკავშირდება ზემოხსენებული წინაპირობების ჭეშმარიტებას. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ მართებული მსჯელობების დამახასიათებელი ზოგადი ფორმები და, კერძოდ, ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ **მართებული გამოყვანის (ანუ დასაბუთების ანუ მტკიცების) წესების** ის მცირე ოდენობა, რომლებსაც ახასიათებთ ე.წ. ჭეშმარიტების შენარჩუნების თვისება. ყურადღება მიაქციეთ იმასაც, რომ ამ წესებს, როგორც წესი, არ ახასიათებთ მცდარობის შენარჩუნების თვისება. გამოყვანის წესს ეწოდება **მართებული** მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არ არსებობს მსჯელობის ამ წესის შემადგენელი განუყოფელი გამონათქვამების ისეთი ჭეშმარიტული შეფასება (დამნიშვნელება), რომელშიც გამოყვანის წესის ყველა წინაპირობა ჭეშმარიტია, შედეგი კი – მცდარი; ასეთი დამნიშვნელების

არსებობის შემთხვევაში მსჯელობას და, შესაბამისად, ასეთი მსჯელობის მომცემ ასეთ წესს **არამართებულს** უწოდებენ.

მართებული მსჯელობის (გამოყვანის, დასაბუთების, მტკიცების) ცნება მრავალნაირად ისაზღვრება, მაგრამ ყველა ეს განსაზღვრა ურთიერთ იგივურია და ყველა მათგანში მოითხოვება $((P_1\&P_2\& \ldots \&P_n)\rightarrow Q)$ სახის გამონათქვამის იგივურად ჭეშმარიტობა, სადაც $P_1,P_2,\ldots,P_n$ გამონათქვამები გაგებულია მსჯელობის წინაპირობებად, Q კი - დასკვნად. მართებულ მსჯელობაზე (გამოყვანაზე, დასაბუთებაზე, მტკიცებაზე) ამგვარი ზოგადი ხედვა განპირობებულია მართებული გამოყვანის წესის ზემომოყვანილი განსაზღვრითა და იმით, რომ, როგორც უკვე ვნახეთ, გამომდინარეობა ზოგადმართებულია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი წინაპირობების ჭეშმარიტების შემთხვევაში გამოირიცხება დასკვნის მცდარობა. მართებული მსჯელობისა და იგივურად ჭეშმარიტობის ცნებათა ურთიერთ მიმართებები სხვადასხვა მართებული მსჯელობების ასაგებად წინა თავში განხილული კანონების გამოყენების საშუალებას იძლევა. კერძოდ, თუ ნებისმიერი მართებული მსჯელობის შემადგენელ განუყოფელ გამონათქვამებს ჩავანაცვლებთ ახალი გამონათქვამებით და თუ ამასთან ისე, რომ ამ ჩანაცვლებებით არ ირღვევა ამ მართებული მსჯელობის ზოგადი ფორმა, მაშინ ჩასმების შედეგად მიღებული ახალი მსჯელობა აგრეთვე მართებული მსჯელობა იქნება.

განვიხილოთ ბუნებრივ ენობრივი მსჯელობის ანუ გამოყვანის ერთი მაგალითი, რომლის მართებულობაში თითოეული ჩვენგანი დარწმუნდება მარტივი ინტუიციური განსჯით. ჩვენ ვიყენებთ $\therefore$ გამოსახულებას დასკვნის აღსანიშნავად. იგი იკითხება როგორც 'აქედან გამომდინარე', ზოგჯერ კი, მოკლედ, როგორც 'ამგვარად'.

(6-6) **თუ ჯონს უყვარს მერი, მაშინ მერი არის ბედნიერი**
ჯონს უყვარს მერი

$\therefore$ **მერი არის ბედნიერი**

თუ ამ დასაბუთებას შემდეგი შეთანხმებების საფუძველზე გადავთარგმნით ფორმალურ ენაზე:

p - ჯონს უყვარს მერი

q - მერი არის ბედნიერი

მივიღებთ:

(6-7) $p \rightarrow q$
p

$\therefore$ q

ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა (6-11) ცხრილი გვიჩვენებს ამ დასაბუთების მართებულობას. კერძოდ, გვიჩვენებს, რომ q არის $((p\rightarrow q)\&p)$ გამონათქვამის ლოგიკური შედეგი. ზოგადმართებული ფორმულის ფორმის შემნარჩუნებელი ჩასმის წესის თანახმად, ჩვენ

შეგვიძლია აგრეთვე დავასკვნათ, რომ $(((P \to Q) \& P) \to Q)$ ზოგადმართებულია P და Q მეტაფორმულების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის.

(6-8)
$$\begin{array}{l} P \to Q \\ P \\ \hline \therefore\ Q \end{array}$$

ამგვარად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (6-8) არის მართებული მსჯელობის (ე.ი. გამოყვანის, დასაბუთების, მტკიცების) ერთ-ერთი განზოგადებული ფორმა. მსჯელობის ამ ფორმას ანუ სქემას ტრადიციულად **მოდუს-პონენსის** წესს უწოდებენ. ქვემოთ განიხილება ამ წესის გამოყენების კიდევ ერთი, უფრო რთული კერძო ნიმუში:

(6-9)
$$\begin{array}{l} (\sim(r \vee s) \to t) \to (r \& t) \\ (\sim(r \vee s) \to t) \\ \hline \therefore\ (r \& t) \end{array}$$

ქვემოთ განიხილება მაგალითი არამართებული დასაბუთებისა:

(6-10)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა (6-14) ცხრილი გვიჩვენებს, რომ $(((p \to q) \& q) \to p)$ გამომდინარეობა არ არის იგივურად ჭეშმარიტი. მართლაც, როგორც ცხრილიდან ჩანს, წინაპირობების ჭეშმარიტების შემთხვევაშიც შესაძლებელია, რომ დასკვნა იყოს მცდარი. კერძოდ, ეს ხდება მაშინ, როცა p არის მცდარი, q კი ჭეშმარიტი.

p	q	(p → q)	((p → q) & q)	(((p → q) & q) →p)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

ცხრილი 6-14: $(((p \to q) \& q) \to p)$ გამომდინარეობის ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილი

განვიხილოთ კიდევ ერთი არამართებული ბუნებრივ ენობრივი მსჯელობის მაგალითი, რომლის ფორმალური თარგმანი შეიძლება (6-10) სქემის მსგავსი სქემის სახით ჩაიწეროს.

(6-11) **თუ ჯონს უყვარს მერი, მაშინ მერი არის ბედნიერი**

მერი არის ბედნიერი

∴ **ჯონს უყვარს მერი**

ამ შემთხვევაში ადვილად ჩანს, რომ გამოყვანის წინაპირობების ჭეშმარიტებიდან არ გამომდინარეობს დასკვნის ჭეშმარიტება. არსებობს უფრო რთული და უფრო დამაბნეველი არამართებული ბუნებრივ ენობრივი მსჯელობები და ასეთ შემთხვევებში არ არის გამორიცხული, რომ ვინმემ ასეთი არამართებული ბუნებრივ ენობრივი მსჯელობა შეცდომით მართებულად მიიჩნიოს. **მსჯელობის (გამოყვანის, დასაბუთების, მტკიცების)** ასეთ შეცდომაში შემყვან ფორმებს **მსჯელობის (გამოყვანის, დასაბუთების, მტკიცების) მაცდურ ფორმებს** უწოდებენ. ცნობილია დასაბუთების ასეთი მაცდური ფორმების ორი კლასიკური მაგალითი. მათგან ერთს **დასაბუთებული დასკვნის მაცდურ ფორმას უწოდებენ**, ხოლო მეორე **უარყოფილი წინაპირობის მაცდურ ფორმად იწოდება**. პირველი ჩვენ უკვე განვიხილეთ (6-10) სქემის სახით. მეორე მაცდურ დასაბუთებას $p \rightarrow q$ და $\sim p$ წინაპირობებიდან, დასკვნად არასწორად ანუ არამართებულად გამოჰყავს $\sim q$.

მიუხედავად იმისა, რომ ნებისმიერი მსჯელობის ზოგადი სქემის მართებულობა შეიძლება დავადგინოთ ამ მსჯელობასთან მიკავშირებული ჭეშმარიტულობის ცხრილის მეშვეობით, ამის გაკეთება ხშირად მოუხერხებელია. კერძოდ კი, ეს მოუხერხებელია მაშინ, როცა მსჯელობა განუყოფელი გამონათქვამების დიდ ოდენობას შეიცავს. ასე მაგალითად, იმ მსჯელობის მართებულობის დასასაბუთებლად, რომელიც შეიცავს ხუთ განუყოფელ გამონათქვამს, საჭირო ხდება 2^5 სტრიქონიანი ანუ 32 ხაზიანი ცხრილის აგება.

დასაბუთებათა მართებულობის დასაბუთების ერთ-ერთი ალტერნატიული გზა არის დასაბუთების დაშლა შემადგენელ მარტივ დასაბუთებათა მიმდევრობად და, ამის მერე, დასაბუთება იმისა, რომ დიდი მსჯელობის შემადგენელი თითოეული ეს მარტივი მსჯელობა მართებულია. მაგალითისათვის განვიხილოთ (6-12) დასაბუთების მართებულობის დასაბუთება.

(6-12) $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \& s)))$

p

q

$\therefore\ (r \& s)$

(6-12) მსჯელობის მართებულობა ჩვენ შეგვიძლია დავასაბუთოთ იმის ჩვენებით, რომ მისი დასკვნა გამომდინარეობს მისი წინაპირობებიდან დასაბუთების მოდუს-პონენსის წესის ორი თანამიმდევრული გამოყენებით. კერძოდ კი ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია (6-13) ფორმულათა მიმდევრობით:

(6-13) 1. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \& s)))$
2. p
3. q
4. $(q \rightarrow (r \& s))$ **1 და 2 სტრიქონებიდან მოდუს-პონენსის წესით**

5. (r & s) 3 და 4 სტრიქონებიდან მოდუს-პონენსის წესით

მარტივი მართებული დასაბუთების ანუ გამოყვანის ანუ მსჯელობის ზოგადი ფორმები, რომლებიც შეიძლება გამოვიყენოთ დაახლოებით ისევე, როგორც ზემომოყვანილ მაგალითში **მოდუს-პონენსის** სახელით ცნობილი წესის ზოგადი ფორმა გამოიყენება, **დასაბუთების ანუ გამოყვანის ანუ მსჯელობის წესებად** იწოდებიან.

(6-15) ცხრილში განხილულია შვიდი განსხვავებული გამოყვანის წესი და, შესაბამისად, მათი შვიდი განსხვავებული ზოგადი ფორმა, თუმცა ეს ფორმები სრულიად საკმარისი იქნება ამ წიგნის ამ ნაწილში განხილული დასაბუთებების მართებულობის დასასაბუთებლად. ლოგიკური იგივურობების ცხრილის მსგავსად, რომელიც ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ, ეს ცხრილიც გარკვეულ სიჭარბეს განიცდის. კერძოდ, აქ განხილული ზოგიერთი წესი შესაძლებელია გამოყვანილი იქნეს დანარჩენებისაგან უკვე ნახსენები ლოგიკური იგივურობების გამოყენებით. მკითხველს ვურჩევთ, რომ გასავარჯიშებლად შეეცადოს თითოეული აქ არსებული გამოყვანის წესის სამართლიანობის დამტკიცებას ე.წ. ცხრილური მეთოდით.

გამოყვანის წესები

დასახელება	**ორმა**	**მაგალითი**
მოდუს- პონენსი (M.P.)	$P \rightarrow Q$ P $\therefore\ Q$	თუ ჯონს უყვარს მერი, მაშინ მერი არის ბედნიერი ჯონს უყვარს მერი ∴ მერი არის ბედნიერი
მოდუს- ტოლენსი (M.T.)	$P \rightarrow Q$ $\sim Q$ $\therefore\ \sim P$	თუ ჯონს უყვარს მერი, მაშინ მერი არის ბედნიერი მერი არ არის ბედნიერი ∴ ჯონს არ უყვარს მერი
ჰიპოტეტური სილოგიზმი (H.S.)	$P \rightarrow Q$ $Q \rightarrow R$ $\therefore\ P \rightarrow R$	თუ ფრედი ცხოვრობს პარიზში, მაშინ ფრედი ცხოვრობს საფრანგეთში თუ ფრედი ცხოვრობს საფრანგეთში, მაშინ ფრედი ცხოვრობს ევროპაში ∴ თუ ფრედი ცხოვრობს პარიზში, მაშინ ფრედი ცხოვრობს ევროპაში
დიზუნქციური სილოგიზმი (D.S.)	$P \vee Q$ $\sim P$ $\therefore\ Q$	ფრედი ცხოვრობს პარიზში ან ფრედი ცხოვრობს ლონდონში ფრედი არ ცხოვრობს პარიზში ∴ ფრედი ცხოვრობს ლონდონში
&-გამარტივება (Simp)	$P \,\&\, Q$ $\therefore\ Q$	ვარდები არის წითელი და იები არის ლურჯი ∴ ვარდები არის წითელი
კონიუნქცირება &-დაკავშირება (Conj)	P Q $\therefore\ P \,\&\, Q$	ვარდები არის წითელი იები არის ლურჯი ∴ ვარდები არის წითელი და იები არის ლურჯი

∨-გაფართოება დამატება (Add)	$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	$\dfrac{\text{ვარდები წითელია}}{\therefore \text{ ვარდები წითელია ან სიგარეტი ჯანმრთელობისთვის საზიანოა}}$

6-15 ცხრილი: გამოყვანის ზოგადი წესები
გამონათქვამთა ლოგიკისათვის

ქვემოთ განხილულია გამოყვანები, რომლებშიც გამოყენებულია ზემოაღწერილი გამოყვანის წესები. ხაზები გადანომრილია მათზე მოხერხებულად მინიშნების მიზნით. ამასთან, გარდა წინაპირობათა მომცემი ხაზებისა, თითოეულ ხაზს მიწერილი აქვს იმ ხაზის ნომერი და იმ გამოყვანის წესის სახელი, რომლითაც იგი მიიღება მონიშნულ ხაზებზე განთავსებული გამონათქვამებიდან.

(6-14)

1.	$p \rightarrow q$	
2.	$p \vee s$	
3.	$q \rightarrow r$	
4.	$s \rightarrow t$	
5.	$\sim r$	
6.	$\sim q$	**3, 5 M.T.**
7.	$\sim p$	**1, 6 M.T**
8.	s	**2, 7 D.S.**
9	t	**4, 8 M.P.**

ფორმულათა (6-14) მიმდევრობა იწოდება t გამონათქვამის **დამტკიცებად** 1-5 სტრიქონებით მოცემული წინაპირობების საფუძველზე. ცხადია, რომ იგივე წინაპირობები ლოგიკურად იწვევენ 6, 7 და 8 სტრიქონებით მოცემულ გამონათქვამებსაც და, შესაბამისად, ეს გამონათქვამებიც დამტკიცებულად შეიძლება ჩაითვალოს ჩანაწერთა ამ (6-14) მიმდევრობით. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია შევწყვიტოთ პროცესი ნებისმიერ მათგანთან და ვთქვათ, რომ ეს არის ~q, ~p, შესაბამისად s გამონათქვამის დამტკიცება, რაც, ცხადია, დამოკიდებულია მხოლოდ იმაზე, თუ რომელი მათგანის დამტკიცება გვაქვს ჩაფიქრებული პირველსაწყისად. შევნიშნოთ, რომ როცა მოცემულია წინაპირობები და ნავარაუდევი დასამტკიცებელი დასკვნა, ზოგჯერ, მარტივად არ ჩანს ის გზა, რომლითაც ამ დასკვნის დამტკიცება მიიღება, რომელიც, რიგ შემთხვევებში, შეიძლება საერთოდაც არ არსებობდეს. მეორე მხრივ, როდესაც, ფორმულათა (6-14) მიმდევრობის მსგავსად, უკვე მოცემულია გარკვეული სახის მტკიცებითი სქემა, ჩვენ ამ მტკიცებითი სქემის თითოეული ხაზიდან სქემის თითოეულ ახალ ხაზზე გადასვლის მართებულობის გადამოწმებით მარტივად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ იმაში, მართლა არის თუ არა იგი მართებული მტკიცება ანუ დამტკიცება. საზოგადოდ, ლოგიკა იძლევა მტკიცებათა გადამამოწმებელ მეთოდებს და არა ახალ, ჯერ მიუგნებელ მტკიცებათა აღმომჩენ მეთოდებს[1]. ჭეშმარიტებაა ის, რომ გამონათქვამთა ლოგიკაში ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია გავარკვიოთ მოცემული წინაპირობებიდან მოცემული დასკვნის გამოყვანადობადობის ანუ დამტკიცებადობის საკითხი (ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ავაგოთ ამოცანის შესაბამისი გამომდინარეობის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი), მაგრამ უფრო რთული

[1] **რედაქტორის შენიშვნა:** დღეს უკვე თანამედროვე მათემატიკურ ლოგიკაში შეისწავლება როგორც მტკიცებების გადამამოწმებელი მეთოდები, ისე ახალი, ჯერ მიუგნებელი მტკიცებების აღმომჩენი მეთოდები.

სისტემებისათვის, მაგალითად ისეთისათვის, როგორიცაა შემდეგ თავში განხილული ლოგიკური სისტემა, ასეთი სრული და ზოგადი ამომხსნელი მეთოდი არ არსებობს.

ქვემოთ განიხილება ერთი მცირედ განსხვავებული სახის მტკიცება, რომლის სირთულე მდგომარეობს იმაში, რომ წინაპირობები არ არიან მოცემული იმ სტანდარტული ფორმით, რომლებზედაც გამოყვანის წესები უშუალოდ ოპერირებენ.

(6-15) $(p \rightarrow (q \wedge r))$ და $\sim r$ წინაპირობების საფუძველზე დავამტკიცოთ $(p \rightarrow q)$.

1. $(p \rightarrow (q \vee r))$	
2. $\sim r$	
3. $\sim p \vee (q \vee r)$	**1 გამომდინარეობის წესი**
4. $(\sim p \vee q) \vee r)$	**3 ასოციაციურობის წესი**
5. $r \vee (\sim p \vee q)$	**4 კომუტაციურობის წესი**
6. $\sim p \vee q$	**2.5 D.S.**
7. $p \rightarrow q$	**6 გამომდინარეობის წესი**

პირველი წინაპირობის გარდაქმნით გამომდინარეობის, ასოციაციურობის და კომუტაციურობის კანონების გამოყენებით ჩვენ დიზიუნქციური სილოგიზმის (D.S.) წესის გამოყენების საშუალება მოგვეცა, რომელიც ამ დამტკიცებაში ერთადერთი გამოყვანის წესია. გავიხსენოთ, რომ გამონათქვამში ლოგიკურად იგივურების ურთიერთ ჩანაცვლება ინარჩუნებს ამ გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, რაც საბოლოო ჯამში ჭეშმარიტების შენარჩუნებასაც ნიშნავს. აქედან გამომდინარე, მტკიცებისას, როცა ამ დამტკიცების რომელიმე გამონათქვამს ვცვლით მისი ლოგიკურად ეკვივალენტური გამონათქვამით, ჩვენ არ გვეკარგება ჭეშმარიტება.

შემდეგი მტკიცება იყენებს იგივურით ჩანაცვლების წესს ახალი, ლოგიკურად იგივური გამონათქვამების საწარმოებლად:

(6-16)	1. $\sim (p \rightarrow \sim q)$	
	2. $\sim r$	
	3. $\sim (\sim (p \,\&\, \sim \sim q))$	**გამომდინარეობა(ქვე)**
	4. $(p \,\&\, \sim \sim q)$	**დამატება**
	5. $(p \,\&\, q)$	**დამატება(ქვე)**
	6. $((p \,\&\, q) \,\&\, \sim r)$	**2,5 კონიუნქცირება**
	7. $(p \,\&\, (q \,\&\, \sim r))$	**6 ასოციაციურობა**
	8. $(p \,\&\, \sim \sim (q \,\&\, \sim r))$	**7 დამატება(ქვე)**
	9. $(p \,\&\, \sim (q \rightarrow r))$	**8 გამომდინარეობა(ქვე)**

აქედან მოყოლებული ჩვენ პირდაპირ აღარ მივანიშნებთ ჩასმის წესის გამოყენებაზე, არამედ აღვნიშნავთ ხოლმე მხოლოდ იმ ლოგიკურ იგივურობებს, რომლებითაც მტკიცებისას ვსარგებლობთ.

6.5.1 პირობითი დამტკიცება

მტკიცებები, რომელთა დასკვნაც შეიცავს გამომდინარეობას, როგორც მთავარ კავშირს, მოსახერხებელია დამტკიცდეს ე.წ. **პირობითი დამტკიცების** მეთოდით. დავუშვათ, რომ მსჯელობა შედგება $P_1, P_2, \ldots, P_n$ წინაპირობებისა და $Q \rightarrow R$ დასკვნისაგან. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ მსჯელობის წინაპირობებს **დამხმარე ანუ პირობით წინაპირობად**

ვამატებთ მსჯელობის დასკვნის Q წინაპირობას და, მერე, ვცდილობთ Q დამხმარე ანუ პირობითი წინაპირობისა და პირველსაწყისი $P_1, P_2, \ldots, P_n$ წინაპირობების გამოყენებით R დასკვნის გამოყვანას. პირობითი დამტკიცება მთავრდება დამხმარე წინაპირობისა და ამ დამხმარე წინაპირობის გამოყენებით მიღებული შუალედური დასკვნების გადახაზვითა და მსჯელობის დამასრულებელ დასკვნად Q→R ფორმულის გამოცხადებით (დაწერით). ამ მეთოდის მართებულობა ეფუძნება იმ ფაქტს (ამ ფაქტის მართებულობა თქვენ თვითონ შეამოწმოთ) რომ,

$$((P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \ldots \,\&\, P_n) \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

გამონათქვამი არის შემდეგი გამონათქვამის ლოგიკურად იგივური გამონათქვამი (აქ P_1 , P_2 ,…, P_n ,Q და R ნებისმიერი გამონათქვამებია.)

$$((P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \ldots \,\&\, P_n \,\&\, Q) \rightarrow R).$$

მაგალითისათვის, ჩვენ ავაგებთ (6-15) დამტკიცების პირობითი დამტკიცების ერთ-ერთ ვერსიას.
(6-17) $(p \rightarrow (q \vee r))$ და $\sim r$ წინაპირობებიდან გამომდინარე დავამტკიცოთ $(p \rightarrow q)$.

1.	$(p \rightarrow (q \vee r))$	
2.	$\sim r$	
3.	p	**დამხმარე წინაპირობა**
4.	$q \vee r$	**1, 3 M.P.**
5.	$r \vee q$	**4 კომუტაციურობის**
6.	q	**2, 5 D.S.**
7.	$p \rightarrow q$	**3-6 პირობითი დამტკიცება**

პირობითი დამტკიცების ჩაწერისას ვერტიკალური ხაზის მეშვეობით ვკეთებთ ზოლს, რომელიც გვინიშნავს პირობითი დამტკიცების იმ ნაწილს, სადაც ჩვენ მუშაობა გვიწევს დამხმარე წინაპირობასთან ერთად. პირობითი დამტკიცება, მტკიცების პროცესის დასრულებამდე, ე.წ. პირობითი დამტკიცების წესის გამოყენებისთანავე აუქმებს დამხმარე წინაპირობას. გაუქმების შემდეგ, ცხადია, იკრძალება იმ სტრიქონებით სარგებლობა, რომლებიც იყენებდნენ უკვე გაუქმებულ დამხმარე წინაპირობას.

მომდევნო მაგალითი გვიჩვენებს თუ როგორ შეიძლება სხვადასხვა პირობითი დამტკიცებების ერთმანეთში ჩალაგება:

(6-18): დავამტკიცოთ, რომ $(p \rightarrow (q \& r))$ გამონათქვამიდან გამომდინარეობს $((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$ გამონათქვამი.

1.	$(p \rightarrow (q \,\&\, r))$	
2.	$q \rightarrow s$	**დამხმარე წინაპირობა**
3.	p	**დამხმარე წინაპირობა**
4.	$q \,\&\, r$	**1, 3. M. P.**
5.	q	**4 & გამარტივების წესი**
6.	s	**2, 5 M.P.**
7.	$p \rightarrow s$	**3-6 პირობითი დამტკიცება**

8. $((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$ **2-7 პირობითი დამტკიცება**

პირობითი მტკიცებისას შედარებით უფრო შეზღუდულია მტკიცების უფრო ღრმად ჩალაგებული (ჩადებული) პირობითი ნაწილი. ერთი დონიდან გამოსვლას და, შემდეგ, უფრო მაღალ დონეზე გადასვლას ყოველთვის წინ უსწრებს გამომდინარეობის ფორმირება, რომლის წინაპირობა არის გამოსასვლელი დონის განმსაზღვრელი დამხმარე წინაპირობა და რომლის დასკვნაც არის ფორმულა, რომელიც ამავე დონის უკანასკნელი ბიჯით ანუ დონიდან გამომყვანი ბიჯის წინა ბიჯით იქნა მიღებული (იხ. მაგალითად, (6-18) დამტკიცების 7 ხაზი). პირობითი მტკიცების დაბალი (ღრმა) დონის სტრიქონის გამოყენება უფრო მაღალი (ნაკლებ ღრმა) დონის სტრიქონში აკრძალულია (მაგალითად, მე-5 სტრიქონიდან q გამონათქვამის გამოყენება დაუშვებელია მას შემდეგ რაც დავტოვეთ მისი დონე და მე-7 სტრიქონით უფრო მაღალ დონეზე გადავედით). ამასთან, შევნიშნოთ, რომ მაღალი დონის შემადგენლის გამოყენება შედარებით დაბალი დონის დასკვნის გამოსაყვანად არ არის აკრძალული (მაგალითად, სტრიქონი 1 გამოყენებულია უფრო დაბალი დონის მე-4 სტრიქონის მისაღებად).

დამხმარე წინაპირობებად შეიძლება გამოყენებული იქნეს სრულიად ნებისმიერი სახის გამონათქვამი. მთავარია ისინი წაადგნენ მტკიცების ინტერესებს. მაგალითად, (6-18) დამტკიცებაში ჩვენ დამხმარე წინაპირობად არ გამოგვიყენებია s გამონათქვამი, თუმცა იგი მე-2 ხაზით მოცემული დამხმარე წინაპირობის სრულიად კანონიერი ფორმალური ნაწილია.

6.5.2 არაპირდაპირი დამტკიცება

გამოყვანები, რომლებიც ზემოთ იქნა განხილული, იწოდებიან პირდაპირ დამტკიცებებად: დასკვნა გამოყვანის წესების რამდენიმეჯერადი გამოყენების შედეგად პირდაპირი სახით მიიღება მტკიცების უკანასკნელ ხაზში. **არაპირდაპირი დამტკიცებისას** ნაგულისხმევი დასამტკიცებელი დასკვნის უარყოფა, ანუ ამ დასკვნის ნეგაცია, განიხილება დამხმარე წინაპირობად, რის შემდგომაც უკვე პირდაპირი მტკიცება მიმდინარეობს წინააღმდეგობის გამოყვანის მიზნით. იმ დაშვებიდან გამომდინარე, რომ ყველა წინაპირობა ჭეშმარიტია, წინააღმდეგობის წარმოქმნის შემთხვევაში ვასკვნით, რომ ნეგაციური ფორმის დამხმარე (დამატებითი) წინაპირობა მცდარია, რაც მისი პოზიტიური ფორმის ანუ დასამტკიცებელი გამონათქვამის ჭეშმარიტებას ნიშნავს. მტკიცების ამ არაპირდაპირ მეთოდს **მტკიცების წინააღმდეგობამდე მიყვანის მეთოდს** უწოდებენ. ზოგჯერ მას **საწინააღმდეგოს დაშვების გზით მტკიცების მეთოდსაც (ხერხსაც)** უწოდებენ. ამგვარად, ჩვენ ახლა უკვე გვაქვს იმის უფლება, რომ ეს მეთოდი განვიხილოთ როგორც ერთ-ერთი გამოყვანის წესი. იგი პირობითი დამტკიცების გარკვეული ფორმაა, რამდენადაც იგი იყენებს დამხმარე წინაპირობას, მაგრამ ეს დამხმარე წინაპირობა არ აირჩევა ნებისმიერად. უფრო მეტიც, იგი აუცილებლად უნდა იყოს უარყოფა დასამტკიცებელი გამონათქვამისა. ამასთან, ეს გამონათქვამი აუცილებელი არ არის გამომდინარეობის ფორმის იყოს, და, საზოგადოდ, არც ის გამოირიცხება, რომ იგი ატომალური ფორმულა იყოს. ქვემოთ განიხილება **წინააღმდეგობამდე მიყვანის მეთოდით მტკიცების** ერთი მაგალითი:

(6-19) დავამტკიცოთ p ფორმულა $p \vee q$, $q \rightarrow r$ და $\sim r$ წინაპირობებზე დაყრდნობით:

1. $p \vee q$
2. $q \rightarrow r$
3. $\sim r$
4. | $\sim p$ **დამხმარე წინაპირობა**
5. | q **1, 4 D.S.**
6. | r **2, 5 M.P.**

7.   r & ~ r   **3, 6 Conj**.
8. p   **4-7 არაპირდაპირი დამტკიცება**

სტრიქონი 7 აშკარა წინააღმდეგობაა და, აქედან, არაპირდაპირი დამტკიცების წესით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მე-4 სტრიქონის დამხმარე წინაპირობა მცდარია.

შემდეგნაირი მიდგომით ეს არაპირდაპირი დამტკიცება შეიძლება განვიხილოთ როგორც შემდეგი პირობითი დამტკიცების კერძო შემთხვევა: მსჯელობას დავამატეთ რა ~p ფორმულა დამხმარე წინაპირობად ზემომოყვანილი მტკიცებით გამოვიყვანეთ (r&~r). რის შემდგომაც, პირობითი მტკიცების წესით ვღებულობთ (~p→(r&~r)). ახლა უკვე აგებულ მტკიცებას ახალ ხაზად დავუმატოთ ზოგადმართებული ფორმულა ~(r&~r), რისი დამატებაც ნებისმიერი მტკიცების ნებისმიერ ადგილზე (სტრიქონზე) მტკიცების მართებულობას არ ცვლის, რადგან იგი არასდროს არ მცდარდება. ამის შემდგომ ჩვენ ვღებულობთ ~~p მოდუს ტოლნენსის წესით, რის შემდგომაც დამატების წესის გამოყენებით მიიღება p გამონათქვამის მტკიცება.

არაპირდაპირ დამტკიცებაში, ისევე როგორც პირობით დამტკიცებაში, შეიძლება ჩალაგდეს სხვა არაპირდაპირი და პირობითი დამტკიცებები. ყველა ასეთ შემთხვევაში, უფრო ღრმად ჩადებული ნაწილის შემადგენლები არ შეიძლება გავითვალისწინოთ და ვიგულისხმოთ ჭეშმარიტ გამონათქვამებად მტკიცების უფრო ნაკლებ ღრმად ჩადებულ ნაწილებში. ამგვარად, უფრო ღრმად ჩადებულ ნაწილებში გამოყვანათა გაკეთების უფრო მეტი თავისუფლებაა, მაშინ როდესაც ზედაპირულ დონეებზე გამოყვანათა გაკეთების შესაძლებლობები თანდათან უფრო იზღუდება.

არაპირდაპირი დამტკიცებები ფართოდ გამოიყენება მათემატიკაში, რადგან, ხშირად, არაპირდაპირი დამტკიცების მოძიება უფრო ადვილია, ვიდრე შესაბამისი პირდაპირი დამტკიცებისა. მაგალითად, ვთქვათ დასამტკიცებელი გვაქვს, რომ ცარიელი სიმრავლე არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე. საწინააღმდეგოს დაშვებით ვღებულობთ, რომ ცარიელ სიმრავლეს აქვს წევრი, რაც ცარიელი სიმრავლის განსაზღვრებას ეწინააღმდეგება. ამგვარად, იმ დაშვებას, რომ ცარიელი სიმრავლე არ არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე, მივყავართ წინააღმდეგობამდე, რაც ადასტურებს ამ დაშვების შეუძლებლობას.

6.6 ბეთსის ცხრილები

თეორიულ კომპიუტერულ მეცნიერებებსა და მათემატიკურ ლოგიკაში მიმდინარე თანამედროვე კვლევები ძირითადად ვითარდება თეორემათა ავტომატურად მამტკიცებელი მანქანების კონსტრუირების მიზნებით. ასეთ გამომთვლელ მანქანებს თეორემათა მამტკიცებლებს უწოდებენ. ამ კვლევების ძირითადი მიზანი ადამიანებისათვის დამახასიათებელი თეორემათა მამტკიცებელი უნარების ავტომატური ანუ მანქანური რეალიზაციაა. გასაგებია, რომ ელემენტარული ლოგიკური სისტემებისათვის აქ განხილული მამტკიცებელი პროცედურების პირდაპირი ავტომატური დანერგვა შეუძლებელია. თუ თქვენ გადაწყვიტავთ, რომ მექანიკურად ანუ ავტომატურად გამოიყვანოთ დასკვნა წინაპირობებად მოცემული გამონათქვამების რაღაც საწყისი სიმრავლიდან, თქვენ, სავარაუდოა, რომ გარდა უკვე თქვენთვის ცნობილი გამოყვანის წესებით სარგებლობისა, მოგიწევთ ამ წინაპირობების, ან მათი ნაწილების ჩანაცვლება მათივე იგივური გამონათქვამებით. ცხადია, რომ პრაქტიკული თვალსაზრისებით მოუხერხებელია გადამოწმდეს ყველა შესაძლო ჩანაცვლება ჩასანაცვლებელი გამონათქვამების ყველა შესაძლო იგივური გამონათქვამებისათვის, რადგან განსახილველი იგივური გამონათქვამების რიცხვი, როგორც წესი, უსასრულოა. ასეთ დროს თქვენ ხშირად ეყრდნობით ხოლმე ინტუიციასა და ევრისტიკულ გამოცდილებას, იმის განსასაზღვრავად თუ კონკრეტულ შემთხვევაში, რომელი გამონათქვამი უნდა შეირჩეს და რომელი არა. დღეისათვის

ასეთი ინტუიციური და ევრისტიკული მიდგომები იმდენად მცირედაა შესწავლილი, რომ ჯერ-ჯერობით თეორემათა მამტკიცებლების კონსტრუირებისას არ განიხილება მათი გამოყენების საკითხები. მიუხედავად ამისა, თუ კი არსებობს პროცედურა, რომელიც ითვალისწინებს განსახილველი დასამტკიცებელი მაგალითის დასამტკიცებლად საჭირო ყველა შესაძლო ჩასმათა სრულ გადათვლას, მაშინ აღნიშნული პროცედურის მანქანური რეალიზაცია და, შესაბამისად, აღნიშნული ტიპის მაგალითების მანქანური მამტკიცებლის კონსტრუირება მოსახერხებელია. ასეთი პროცედურა არსებობს და იგი ჰოლანდიელი ლოგიკოსის ევერტ ბეთსის პატივსაცემად **სემანტიკური ცხრილების ბეთსის მეთოდის** სახელით არის ცნობილი. გამონათქვამთა და ჩასმათა ის სასრული ოდენობა, რომელთა საფუძველზეც ეს მეთოდი იძლევა ნებისმიერი კონკრეტული გამონათქვამის გამოყვანას, შედგება:

1. თვითონ ამ გამონათქვამისაგან,
2. ამ გამონათქვამის ყველა ქვეგამონათქვამებისაგან (ე.ი. ქვეფორმულებისაგან),
3. წინაპირობებზე დამოკიდებულ გამონათქვამთა ზოგიერთი მარტივი კომბინაციისაგან.

ამ ჩაკეტილი შინაარსული ცხრილების, როგორც მტკიცებითი მეთოდის, ყველაზე მეტად ღირსშესანიშნავი თვისება არის ის, რომ ამ მეთოდით ნებისმიერი P ფორმულის დამტკიცებაში მონაწილეობენ მხოლოდ ამ P ფორმულის ქვეფორმულები. ამ ნაწილში ჩვენ განვიხილავთ ამ მეთოდს მხოლოდ გამონათქვამთა ლოგიკისათვის, ხოლო შემდეგ თავში ჩვენ გავაფართოებთ მეთოდს პრედიკატული ლოგიკის გამონათქვამებზე ანუ ისეთ გამონათქვამებზე, რომლებიც საშუალებას იძლევიან გათვალისწინებული იქნეს მათი შინაგანი სტრუქტურული თავისებურებებიც.

ბეთსის ცხრილის ძირითადი იდეის მიხედვით ნებისმიერი პირობითი გამონათქვამი დამტკიცებულად უნდა ჩაითვალოს თუ ყოველი მცდელობა მისი დამაპირისპირებელი (ანუ გამომრიცხავი) მაგალითის აგებისა, ანუ ისეთი მაგალითის აგებისა, რომელიც უარყოფს ამ პირობითი გამონათქვამის დასკვნას, მაშინ როდესაც მის წინაპირობებს ადასტურებს, თავდება წარუმატებლად. ამასთან, თუ ასეთი გამომრიცხავი მაგალითი არსებობს, მაშინ ბეთსის ცხრილური მეთოდი აგებს მას, ხოლო თუ ასეთი გამომრიცხავი მაგალითი არ არსებობს, მაშინ მეთოდი სასრული ბიჯების მეშვეობით ადასტურებს ამ არარსებობას. დამტკიცება ყოველთვის შეიცავს $P_1\&P_2\&\ldots\&P_{n-1}$ წინაპირობებს და P_n შედეგს, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია გამომდინარეობის კავშირით. ბეთსის ცხრილი ცდილობს წინაპირობების გაჭეშმარიტებას და დასკვნის გამცდარებას, რაც საბოლოო ჯამში $(P_1\&P_2\&\ldots\&P_{n-1})\rightarrow P_n$ გამონათქვამის გამცდარების მცდელობაა. თუ ეს მცდელობა დამთავრდა წარუმატებლად, მაშინ ცხრილი იხურება, რაც ადასტურებს იმას, რომ ქვეფორმულების არანაირი ინტერპრეტირება (ჭეშმარიტული შეფასება) არ იძლევა გამომრიცხავი მაგალითის აგების საშუალებას. ხოლო, იმ შემთხვევაში, თუ ზემოაღნიშნული მცდელობა დამთავრდა წარმატებით, მაშინ მეთოდი არა მარტო ადასტურებს გამომრიცხავი მაგალითის არსებობას, არამედ გვიჩვენებს კიდეც, როგორ ავაგოთ იგი.

პროცედურა საკმაოდ მარტივია, და ჩვენ მას გაგაცნობთ რამდენიმე ელემენტარული მაგალითის განხილვის გზით, რის შემდგომაც სრულად ჩამოვაყალიბებთ ცხრილის ამგებ ზოგად წესებს.

მაგალითი 1: დავამტკიცოთ $\sim\sim p$ გამონათქვამი $(p\&q)$ გამონათქვამის საფუძველზე.

ბეთსის ცხრილების ის აღნიშვნები, რომლებსაც აქ ვიყენებთ, შემდეგნაირად განისაზღვრება:

1. ფურცელზე ვერტიკალური ხაზის გავლებით გავაკეთოთ ორი სვეტი (აიღეთ საკმარისი სიდიდის ფურცელი, რადგან ცხრილი შეიძლება გამოვიდეს იმაზე უფრო მოცულობითი ვიდრე თქვენ თავიდან წარმოგიდგენიათ);
2. დავაწეროთ მარცხენა სვეტს **ჭეშმარიტი**, მარჯვენას კი **მცდარი**;
3. ჩავწეროთ წინაპირობა **ჭეშმარიტი** სვეტის, ხოლო დასკვნა **მცდარი** სვეტის პირველ სტრიქონში

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
1.	(p & q)	~ ~ p

გამომდინარე იქიდან, რომ ლოგიკური კავშირების ცხრილების მეშვეობით ვიცით ამ ლოგიკური კავშირების შინაარსი, ჩვენ შემდეგნაირად ვმსჯელობთ: რადგან (p&q) წინაპირობაა, ის გაგებულია ჭეშმარიტად და ამის გათვალისწინებით ვცდილობთ ~~p დასკვნის მცდარობის დამტკიცებას. ამასთან, კონიუნქცია ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა მისი შემადგენელი ორივე ფორმულა ჭეშმარიტია. ამგვარად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ p და q ჭეშმარიტებია. ეს ინფორმაცია ცხრილში შემდეგნაირად ჩაიწერება:

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
2.	p	
3.	q	

რადგან ახლა უკვე **ჭეშმარიტი** სვეტის ქვეშ გვაქვს მხოლოდ ატომალური გამონათქვამები, პროცესის შემდგომი განვითარებისათვის ჩვენ იძულებულნი ვართ გადავიდეთ სვეტზე **მცდარი**. ჩვენ ვასკვნით, რომ რადგან ორმაგი უარყოფა მცდარია, მაშინ ერთმაგი უარყოფა ჭეშმარიტია, რადგანაც უარყოფა გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას ცვლის საპირისპიროთი. ეს გარემოება ცხრილზე შემდეგნაირად აისახება:

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
4.	~ p	

თუ უარყოფა ჭეშმარიტია, მაშინ იგივე გამონათქვამი უარყოფის გარეშე იქნება მცდარი და ეს ასეა იმავე მიზეზების გამო, რა მიზეზებითაც იყო მოტივირებული ბიჯი 4. ამგვარად ვღებულობთ:

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
5.		p

ახლა უკვე ცხრილში ჩვენ გვაქვს მხოლოდ ატომალური გამონათქვამები და ამიტომ ცხრილის შემდგომი განვითარება შეუძლებელია. მაგრამ, თუ გავიხსენებთ ჩვენს შეთანხმებებს და იმ მონაცემებს, რაც საწყის პირობებად მოგვეწოდა წინაპირობებისა და დასკვნის სახით, ვნახავთ რომ მე-2 სტრიქონის მიხედვით p გამონათქვამი ჭეშმარიტია, მაშინ როდესაც მე-5 სტრიქონით იგივე p გამონათქვამი მცდარია. ეს კი შეუძლებელია, რადგან p ერთდროულად ვერ იქნება მცდარიც და ჭეშმარიტიც. ამგვარად, ყოველმხრივ გამართულმა მსჯელობამ, რომლითაც ჩვენ ცხრილს თანდათანობით ვანვითარებდით მიგვიყვანა აშკარა წინააღმდეგობამდე! ასეთ შემთხვევაში შეიძლება ვინმემ იფიქროს, რომ ცხრილური მეთოდი საერთოდ უვარგისია და რომ საერთოდ არ ღირს ამ მეთოდით სარგებლობა, მაგრამ თქვენ ჩქარობთ დასკვნის გამოტანას. — ჩვენ ხომ ცხრილი თავიდანვე გარკვეული მიზნით გავაწყვეთ: კერძოდ კი იმ მიზნით, რომ დაგვეძებნა ატომალური გამონათქვამების ისეთი ჭეშმარიტული შეფასება, რომელშიც ყველა წინაპირობა ჭეშმარიტი, ხოლო დასკვნა კი - მცდარი იქნებოდა. ამ მიზნით

იყო რომ წინაპირობები დავალაგეთ **ჭეშმარიტი** სვეტის მხარეს, ხოლო დასკვნა დავდეთ **მცდარი** სვეტის მხარეს. – მხოლოდ ამგვარმა წინასწარმა დაშვებამ განაპირობა ის, რომ, ისევე როგორც ეს ხდება ხოლმე საწინააღმდეგოს დაშვების გზით მტკიცებისას, ჩვენ აშკარა წინააღმდეგობა მივიღეთ. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ჩვენი პირველსაწყისი დაშვება უფლება მოკლებული და უკვე წინააღმდეგობრივი იყო. ეს კი თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ არ არსებობს არანაირი ისეთი ინტერპრეტაცია, რომელშიც წინაპირობები ჭეშმარიტია, დასკვნა კი მცდარი, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს იმას, რომ არ არსებობს შემოთავაზებული მსჯელობის არანაირი უარმყოფელი კერძო მაგალითი. ცხრილი იწოდება ჩაკეტილად, თუ ამ ცხრილის **ჭეშმარიტ** და **მცდარ** სვეტში გვხვდება ერთი და იგივე გამონათქვამი. შევნიშნოთ, რომ ჩამკეტი გამონათქვამი არ არის აუცილებელი იყოს ატომალური გამონათქვამი. ნებისმიერი გამონათქვამი, რომელიც ცხრილში ერთდროულად ფასდება მცდარადაც და ჭეშმარიტადაც იძლევა აშკარა წინააღმდეგობას.

ქვემოთ წარმოდგენილია ამ მაგალითის მთლიანი ცხრილი:

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
1.	(p & q)	~ ~ p
2.	p	
3.	q	
4.	~ p	
5.		p

იმის საჩვენებლად, თუ რომელი ლოგიკური კავშირის დაშლით მიიღება ახალი ხაზი, ჩვენ პირველი ხაზისაგან განსხვავებული ყველა შემდეგი ხაზი შეგვიძლია დავაინდექსიროთ ამ ლოგიკური კავშირის აღმნიშვნელი სიმბოლოთი, ასევე შეგვიძლია ინდექსირებულად ვაჩვენოთ ეს კავშირი რომელ სვეტს განეკუთვნება - **ჭეშმარიტს**(T) თუ **მცდარს**(F). ამ მიდგომებით ჩვენ ცხრილში ინდექსები შემდეგნაირად იქნებოდნენ წარმოდგენილი: $2_{\&,T}$, $3_{\&,T}$, $4_{\sim,F}$ და $5_{\sim,T}$. – ვფიქრობთ, რომ ამ მაგილითის მიხედვით თქვენ უკვე დამოუკიდებლად შეძლებთ შემდეგ მაგალითებში სტრიქონთა ნომრების აქ აღწერილის მსგავს ინდექსირებას.

მაგალითი 2: $\sim(p \rightarrow q)$ გამონათქვამიდან გამომდინარე დავამტკიცოთ $\sim p \vee q$.

იმისათვის, რომ $\sim(p\rightarrow q)$ წინაპირობა განვიხილოთ ჭეშმარიტად, ხოლო $\sim p\vee q$ დასკვნა მცდარად, ვხსნით ზემოაღწერილისგვარ შემდეგ ცხრილს:

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
1.	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim p \vee q$

შემდეგ გამონათქვამი $\sim p\vee q$ მარტივდება და საფუძველს უდებს მე-2 და მე-3 სტრიქონებს.

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
2		~ p
3.		q

ამ სტრიქონების ამგვარი დაკომპლექტება განპირობებულია იმით, რომ დიზიუნქცია მცდარია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მისი შემადგენელი ქვეფორმულები ასევე მცდარი ფორმულები არიან. ახლა გავამარტივოთ სტრიქონი 2. კერძოდ, უარყოფა მხოლოდ მაშინ არის მცდარი, როცა უარყოფის გარეშე დარჩენილი ფორმულა ჭეშმარიტია. ამგვარად შემდეგი ბიჯი იძლევა შემდეგს:

	ჭეშმარიტი	მცდარი
4.	p	

ანალოგიურად, წინაპირობა შეგვიძლია გავამარტივოთ უარყოფის მოშორებით და დარჩენილი ნაწილის გადაწერით **მცდარი** სვეტის მხარეს:

	ჭეშმარიტი	მცდარი
5.		$(p\rightarrow q)$

ახლა, იქიდან გამომდინარე, რომ გამომდინარეობა მცდარია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა წინაპირობა არის ჭეშმარიტი და დასკვნა კი - მცდარი, ვღებულობთ შემდეგს:

	ჭეშმარიტი	მცდარი
6.	p	q

ამგვარად, მთელი გამონათქვამი გამარტივდა (დახურდავდა) და, შესაბამისად, აღარ დაგვრჩა არცერთი დაუშლელი შედგენილი გამონათქვამი. ამასთან, არც აშკარა წინააღმდეგობა არ მიგვღია, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს იმას, რომ უნდა არსებობდეს ჩვენი მსჯელობის (მაგალითის) უარმყოფელი კერძო მაგალითი. მართლაც, თუ p გამონათქვამს განვიხილავთ ჭეშმარიტად და q გამონათქვამს მცდარად, ჩვენ მივიღებთ თავდაპირველი მაგალითის უარმყოფელ მაგალითს, რაც მარტივად შეიძლება შევამოწმოთ ცხრილური ანუ სწრაფი გამცდარების მეთოდზე დაყრდნობით:

$$\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \ \sim p \vee q$$
$$1\ 1\ 0\ 0\ 0 \quad 0\ 1\ 0\ 0$$

როდესაც ერთი და იგივე ატომალური გამონათქვამი ექცევა ცხრილის ორსავე მხარეს ჩვენთვის გასაგები ხდება, რომ მასზე დაყრდნობით არანაირი უარმყოფელი მაგალითი არ შეიძლება იქნეს აგებული, რამდენადაც, ცხადია, არ შეიძლება ერთსა და იმავე მაგალითში ერთსა და იმავე დროს ერთი და იგივე გამონათქვამი შეფასდეს მცდარადაც და ჭეშმარიტადაც.

შემდეგი მაგალითი წარმოგვიდგენს ჩაკეტილ ცხრილს, რომელიც $q\rightarrow\sim p\vee q$ გამონათქვამის ზოგადმართებულობას ამტკიცებს.

მაგალითი 3. დაამტკიცეთ $\sim p\vee q$ გამონათქვამი q გამონათქვამის საფუძველზე

	ჭეშმარიტი	მცდარი
1.	q	$\sim p\vee q$
2.		$\sim p$
3.		q
	==========	==========

ჩაკეტვა, რომელსაც q გამონათქვამი წარმოქმნის, ცხრილის ორივე მხარეს აღინიშნება ====== ორმაგი ხაზით. იმ შემთხვევაში, თუ ჩაკეტილი ცხრილის რომელიმე მხარეს არის არაატომალური გამონათქვამი, რომელიც ბუნებრივია ემორჩილება შემდგომი გამარტივების წესებს, ჩვენ ვასკვნით, რომ ეს არაატომალური გამონათქვამი და მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა არანაირ გავლენას არ ახდენს მთლიანი გამონათქვამის ზოგადმართებულობაზე. ზემოგანხილულ მაგალითში ასეთია ~p. ამგვარად, ჩაკეტილი ცხრილი შეიძლება შეიცავდეს შედგენილ, არაატომალურ გამონათქვამს, მაგრამ, ასეთ შემთხვევაშიც, არ არის არანაირი არც

აუცილებლობა და არც საჭიროება მასზე გამამარტივებელი წესებით მოქმედებისა და, შესაბამისად, მტკიცებითი პროცედურის კვლავ გაგრძელებისა.

ბეთსის ცხრილების აგების პროცესს საგრძნობლად ართულებს ალტერნატიულ ინტერპრეტაციათა განხილვის საჭიროება. მაგალითად, $p \vee q$ დიზიუნქციის ჭეშმარიტება იძლევა სამ შესაძლო ინტერპრეტაციას (ჭეშმარიტულ შეფასებას ანუ დამნიშვნელებას), ესენია: ჭეშმარიტია p, ჭეშმარიტია q, ან ჭეშმარიტია ერთდროულად ორივე: როგორც p, ისე q. ასეთ შემთხვევებში ცხრილი იხლიჩება (ანუ ხურდავდება) ამ შესაძლო ალტერნატიული ინტერპრეტაციების შესაბამისად. მაგალითისათვის განვიხილოთ $(\sim p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ გამონათქვამის ბეთსის ცხრილი.

მაგალითი 4:

	ჭეშმარიტი		მცდარი	
1.	$(\sim p \vee q)$		$(p \rightarrow q)$	
2.	p			
3.			q	
4.	4_1 $\sim p$	4_2 q ========	4_1	4_2 =======
5.	=======		p =======	

მე-2 და მე-3 სტრიქონები საერთოა მთელი ცხრილისთვის. მე-4 სტრიქონით იწყება ცხრილის დახურდავება ანუ დახლეჩა შემადგენელ 4_1 და 4_2 ქვეცხრილებად, რაც განპირობებულია $(\sim p \vee q)$ დიზიუნქციის ჭეშმარიტობის პირობებით. შესაბამისად, $\sim p$ და q დიზიუნქტებიდან საკუთრივ თითოეული წარმოქმნის მთლიანი ცხრილის თითო ქვეცხრილს და ჩვენ, შესაბამისად ამისა, ვცდილობთ თითოეული ამ წარმოქმნილი ქვეცხრილის ჩაკეტვის გზით მთელი ცხრილის ჩაკეტვას. მე-4 ხაზში 4_2 ქვეცხრილი იკეტება, იმის გამო, რომ q ატომი არის ცხრილის ორივე მხარეს (მე-3 ხაზი ეკუთვნის ცხრილის ყველა ალტერნატიულ ქვეცხრილს). მე-5 ხაზში კი, რომელიც ჭეშმარიტი უარყოფის გამარტივების შედეგად მიიღება, იკეტება 4_1 ქვეცხრილი (ამ შემთხვევაში ჩაკეტვის მიზეზია p ატომი)

ქვეცხრილი იკეტება მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს გამონათქვამი, რომელიც ამ ქვეცხრილის ორივე მხარეს ეკუთვნის. ქვეცხრილებისგან შემდგარი რთული ცხრილი იკეტება მხოლოდ მაშინ, როცა იკეტება მისი შემადგენელი ყველა ქვეცხრილი. ხოლო იმ შემთხვევაში, თუ ცხრილი არ ჩაიკეტა, ცხრილის შემადგენელი ღიად დარჩენილი ქვეცხრილების მეშვეობით ჩვენ ვპოულობთ ატომალური გამონათქვამების ისეთ ჭეშმარიტულ შეფასებებს, რომლებიც იძლევიან განსახილველი ფორმულის ზოგადმართებულობის უარმყოფელ კერძო მაგალითებს. ანუ, ცხრილის შემადგენელი ღიად დარჩენილი ქვეცხრილების მეშვეობით იგება ატომალური გამონათქვამების ისეთი დამნიშვნელობები, მხოლოდ რომლებზედაც ცხრილში დასამტკიცებლად შეტანილი პირველსაწყისი გამონათქვამი ღებულობს მცდარ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას.

შევნიშნოთ, რომ ერთი ღია ქვეცხრილის განვითარება იძლევა ერთი რომელიმე გამომრიცხავი კერძო მაგალითის აგების საშუალებას, მაშინ როდესაც ახალი ქვეცხრილების გახსნა და ცხრილის ყველა შესაძლო ქვეცხრილების აგება გვეხმარება დავინახოთ ამ ქვეცხრილების და, შესაბამისად, მთლიანი ცხრილის ჩაკეტვის შესაძლებლობები. საზოგადოდ, ცხრილის დამხლეჩი ანუ დამხურდავებელი წესით სარგებლობა, მხოლოდ მას შემდეგ, რაც ცხრილზე ყველა სხვა წესით სარგებლობის შესაძლებლობა ამოიწურა, სწორ სტრატეგიად ითვლება. ქვემოთ მოცემულია გამონათქვამთა ლოგიკისათვის ბეთსის ცხრილური მეთოდის განმსაზღვრელი წესების სრული სისტემა:

ბეთსის ცხრილების ამგები წესები

გამონათქვამთა ზოგადი ფორმის დასახელება	წესები იმ გამონათქვამებისათვის რომლებიც განთავსებულნი არიან სვეტში **ჭეშმარიტი**	წესები იმ გამონათქვამებისათვის რომლებიც განთავსებულნი არიან სვეტში **მცდარი**
უარყოფა $\sim p$	დავდოთ p სვეტში მცდარი	დავდოთ p სვეტში ჭეშმარიტი
გამომდინარეობა $p \to q$	დახურდავება! დავდოთ q ქვესვეტში ჭეშმარიტი დავდოთ p ქვესვეტში მცდარი	დავდოთ p სვეტში ჭეშმარიტი დავდოთ q სვეტში მცდარი
კონიუნქცია $p \& q$	დავდოთ p და q სვეტში ჭეშმარიტი	დახურდავება! დავდოთ p ქვესვეტში მცდარი დავდოთ q ქვესვეტში მცდარი
დიზიუნქცია $p \vee q$	დახურდავება! დავდოთ p ქვესვეტში ჭეშმარიტი დავდოთ q ქვესვეტში ჭეშმარიტი	დავდოთ p და q სვეტში მცდარი

ქვემოთ მოყვანილია მაგალითი ცხრილისა, რომელიც ორჯერ ხურდავდება.

მაგალითი 5. დავამტკიცოთ $(p\&q)$ გამონათქვამი $(p\to q)$ გამონათქვამიდან გამომდინარე.

	ჭეშმარიტი				მცდარი			
1.	$(p \to q)$				$(p \& q)$			
2.	2_1		2_2		2_1 p		2_2 q	
3.	$3_{1.1}$ q	$3_{1.2}$	$3_{2.1}$ q ====	$3_{2.2}$	$3_{1.1}$	$3_{1.2}$ p	$3_{2.1}$ ====	$3_{2.2}$ p

ცხრილის დახურდავება მე-2 სტრიქონში განხორციელდა მცდარი კონიუნქციის დახურდავების წესით, რომელიც ორივე კონიუნქტს აფასებს მცდარად. შემდეგი სტრიქონი აგრძელებს ამ ცხრილის დახურდავებას ჭეშმარიტი გამომდინარეობის დახურდავების წესით, რომელიც, თავის მხრივ, დასკვნას აფასებს ჭეშმარიტად, ხოლო წინაპირობას მცდარად. იმის გამო, რომ ამ უკანასკნელი დახურდავების მონაცემი (ე.ი 1 სტრიქონით **ჭეშმარიტ** სვეტში მოცემული დასახურდავებელი $(p\to q)$ გამონათქვამი) განეკუთვნება უკვე მანამდე მე-2 სტრიქონში დახურდავების შედეგად მიღებულ ორივე ქვეცხრილს, მე-3 სტრიქონში ხდება უკვე ამ დახურდავებული ქვეცხრილების მეორეჯერადი დახურდავება, რაც ამ ხაზში ოთხ ქვეცხრილს წარმოქმნის. იმისათვის, რომ ჩაიკეტოს ესა თუ ის ქვეცხრილი, ცხადია, გათვალისწინებული უნდა იქნეს ამ ქვეცხრილის ყველა შემადგენლები. ქვეცხრილების ინდექსები გვიჩვენებენ თუ ზედა დონის რომელი ქვეცხრილის შემადგენელი ნაწილია იგი. ასე მაგალითად, ჩვენს ცხრილში $3_{2.1}$ და $3_{2.2}$ ქვეცხრილები 2_2 ქვეცხრილის განსხვავებული შემადგენელი ქვეცხრილებია და ისინი ცალ-ცალკე, მაგრამ თითოეული მათთაგანი როგორც 2_2 ქვეცხრილის ნაწილები, ამ ქვეცხრილთან ერთად უნდა გავიაზროთ, მაშინ როდესაც არანაირი უფლება არა გვაქვს და არც საჭიროება $3_{2.1}$ და $3_{2.2}$ ქვეცხრილების 2_1 ქვეცხრილის ნაწილებად განხილვისა და მასთან ერთად გააზრებისა. როგორც ხედავთ, ჩაკეტვა წარმოიქმნება მხოლოდ $3_{2.1}$ ქვეცხრილში. ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ დამაპირისპირებელ (გამომრიცხავ) კერძო მაგალითებს:

1. $p = 0$ და $q = 1$ $(3_{1.1})$
2. $p = 0$ და $q = 1$ ან 0 $(3_{1.2})$
3. $p = 0$ და $q = 0$ $(3_{2.2})$

თითოეული აქ აღწერილი ჭეშმარიტული შეფასებისათვის ჩვენი მაგალითის წანამძღვარი ანუ წინაპირობა ჭეშმარიტია, დასკვნა კი - მცდარი.

შეიძლება ითქვას, რომ გამონათქვამთა ლოგიკისათვის სემანტიკური ცხრილების მეთოდი არის გამონათქვამების ზოგადმართებულობის ამომხსნელი პროცედურა. ამომხსნელი

პროცედურების საკითხი მე-8 თავის ცენტრალური თემაა, თუმცა ჩვენ ახლავე შეგვიძლია გავაკეთოთ რამდენიმე წინასწარი შენიშვნა გამომდინარე უკვე განხილული ცხრილური მეთოდიდან: ცხადია, რომ ნებისმიერი გამონათქვამი შედგება ატომალური გამონათქვამებისა და ლოგიკური კავშირების სასრული ოდენობისაგან, რაც ცხრილის ამგებ წესებთან ერთად განაპირობებს იმას, რომ ნებისმიერ შემთხვევაში პროცედურა დასრულებადია: ამასთან, ცხრილი ან იკეტება და, შესაბამისად, ადასტურებს დასამტკიცებელს, ან იძლევა გამომრიცხავ მაგალითს და უარყოფს მას. ამგვარად, ნებისმიერი ცხრილი იგება ბიჯთა რაღაც სასრული რიცხვით, რაც დამოკიდებულია დასამუშავებელ გამონათქვამში ლოგიკური კავშირების რაოდენობაზე. აღსანიშნავია ისიც, რომ არ არსებობს ჩაციკვლადი, ანუ უსასრულოდ გაგრძელებადი ცხრილები. ერთადერთი რის გამოც ჩვენს მიერ აღწერილი ცხრილის ამგები პროცედურა ჯერ კიდევ არ არის სრულად მექანიკური (ავტომატური) არის ის, რომ არ არის წინასწარ ცალსახად გაწერილი დასაშვებ ბიჯთა თანამიმდევრობა.

სავარჯიშოები

1. გადათარგმნეთ შემდეგი წინადადებები გამონათქვამთა ლოგიკის ენაზე. გამოიყენეთ პატარა ლათინური ასოები ატომალური (განუყოფელი) გამონათქვამების აღსანიშნავად და თარგმანს დაურთეთ წინასათარგმნი შეთანხმებების სახით გასაღები. - ანუ, ჩამოწერეთ სიის სახით თუ რომელ წინადადებას რომელი ატომალური გამონათქვამი შეესაბამება. (რიგ შემთხვევებში არ არის გამორიცხული თქვენ დაგჭირდეთ განსხვავებული ატომები ერთი სახის წინადადების სხვადასხვა სინტაქსური ვარიანტებისათვის.) მაგალითად, „თუ ჯონი არის წვეულებაზე, მაშინ მერიც არის წვეულებაზე.“ თარგმანი: $(p \rightarrow q)$. გასაღები: p - „ჯონი არის წვეულებაზე“; q - „მერი არის წვეულებაზე“.

(ა) ან ჯონი არის იმ ოთახში ან მერი, და ისიც შესაძლებელია, რომ ორივე იქ იყოს.
(ბ) ეს ხანძარი გააჩინა ბოროტ განმზრახველმა, ან საქვაბეში ადგილი ქონდა შემთხვევით აფეთქებას.
(გ) როდესაც წვიმს, ბალახი სველდება.
(დ) სემს უნდა ძაღლი, მაგრამ ალისას კატა ურჩევნია.
(ე) თუ სტივი გვიან მოვა სახლში და არ იქნება ნასადილევი, ჩაშუშულს გავუცხელებთ.
(ვ) კლარენსი ღრმად განათლებულად ჩაითვლება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მას ჩუვაშის კითხვა შეუძლია.
(ზ) მარშას არ უნდა ჯონთან ერთად გარეთ გასვლა მანამ, სანამ ის წვერს არ გაიპარსავს და სმას თავს არ დაანებებს.
(კ) საფონდო ბირჟა წარმატებულია, როცა ხალხს სჯერა, რომ ეკონომიკა ვითარდება და თანაც, მხოლოდ ამ შემთხვევაში.
(ლ) აუცილებელი, მაგრამ არასაკმარისი პირობები მოლაპარაკების დასაწყებად არის ის, რომ ბარატარიამ დაივიწყოს ტიპიტუს წინააღმდეგ განხორციელებული აგრესიის ყველა გამოვლინება.

შეეცადეთ თარგმნისას არ დაკარგოთ არაფერი გარდა იმისა, რასაც ბუნებრივი ენის სემანტიკური თავისებურებების გამო ვერ ჩატევთ გამონათქვამთა ლოგიკის ენაში.

2. შემდეგი წინადადებები მრავლად შეიცავენ სხვადასხვა სახის ელიფსისურ ანუ ნაგულისხმევ შემადგენლებს, იმდენად, რომ ზოგიერთ წინადადებაში კავშირები თითქოს არც კი აკავშირებენ წინადადების შემადგენელ გამონათქვამებს. შინაარსის შენარჩუნებით გადააფორმულირეთ ისინი ისე, რომ კავშირები აკავშირებდენ გამონათქვამებს (თუ საჭირო იქნება შეცვალეთ კავშირებიც) და წინა სავარჯიშოს მსგავსად გააკეთეთ მათი სიმბოლური თარგმანი:

(ა) ჯონი და ტონი აპირებენ კინოში წასვლას, ბილი კი - არა.
(ბ) სუზანს არ უყვარს ხახვი ან ჭარხალი.
(გ) თუ არც პიტერი და არც ფრედი არ მიდიან წვეულებაზე, არც მე წავალ.
(დ) მერი თუ არ დაიკარგა, ან რაიმე არ შეემთხვა, ხუთ წუთში აქ იქნება.
(ე) დათვმა ან მგელმა ბიჭები შეაშინა.
(ვ) წვეულებას ან კალათბურთის თამაშს შეეძლო ბავშვების შეცდომაში შეყვანა.

3. დავუშვათ, რომ p, q და r ჭეშმარიტი და s კი მცდარი გამონათქვამებია. იპოვეთ შემდეგი გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები.

(ა) $(p \& q) \& s$
(ბ) $p \& (q \& s)$
(გ) $p \rightarrow s$
(დ) $s \rightarrow p$
(ე) $(p \& q) \leftrightarrow (r \& \sim s)$
(კ) $p \rightarrow (q \leftrightarrow (r \rightarrow s))$

4. ააგეთ შემდეგი გამონათქვამების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი. დააკვირდით, ხომ არ არიან მათ შორის ლოგიკურად ურთიერთ იგივურნი.

(ა) $(p \vee \sim q)$
(ბ) $\sim(\sim p \& q)$
(გ) $(((p \leftrightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q)$
(დ) $(p \rightarrow (q \vee \sim r)) \& (p \rightarrow (q \vee \sim r))$
(ე) $(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q)$

5. შემდეგი გამონათქვამებისათვის სწრაფი გამცდარების მეთოდით მოიძიეთ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ის სისტემები, რომელთათვისაც ეს გამონათქვამები ღებულობენ მცდარ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას.

(ა) $p \vee q$
(ბ) $(p \vee q) \rightarrow (p \& q)$
(გ) $\sim(\sim q \vee q) \vee (p \rightarrow q)$
(დ) $(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow q)$
(ე) $((p \vee q) \& (r \& s)) \leftrightarrow (((p \& q) \& r) \& s)$

6. გაარკვიეთ შემდეგი გამონათქვამებიდან, რომელია ზოგადმართებული, წინააღმდეგობრივი, შესრულებადი?

(ა) $p \vee \sim q$

(ბ) $p \vee q$
(გ) $(p \,\&\, q) \rightarrow (p \vee r)$
(დ) $\sim p \,\&\, \sim(p \rightarrow q)$
(ე) $(p \vee r) \rightarrow \sim p$

7. ზოგიერთი ლოგიკური კავშირი შეიძლება განისაზღვროს სხვა ლოგიკური კავშირების მეშვეობით. მაგალითად, $(p \rightarrow q)$ შეიძლება განისაზღვროს როგორც შემოკლება $(\sim p \vee q)$ გამონათქვამისა, რადგანაც ეს ორი გამონათქვამი ლოგიკურად იგივურნი არიან. ამგვარად, ყველა ფორმულა, რომელიც შეიცავს $\rightarrow$ ლოგიკურ კავშირს, შეიძლება ჩანაცვლდეს ფორმულით, რომელიც შეიცავს $\sim$, $\vee$ ლოგიკურ კავშირებს.

(ა) განსაზღვრეთ $\rightarrow$ ლოგიკური კავშირი $\sim$ და $\&$ ლოგიკური კავშირებით.
(ბ) განსაზღვრეთ $\&$ ლოგიკური კავშირი $\sim$ და $\vee$ ლოგიკური კავშირებით.
(გ) განსაზღვრეთ $\leftrightarrow$ ლოგიკური კავშირი $\&$ და $\rightarrow$ ლოგიკური კავშირებით.

(ამგვარად, ხუთი ლოგიკური კავშირი შეიძლება დაყვანილ იქნეს ორ, $\sim$ და $\vee$ ლოგიკურ კავშირზე)

(დ) აჩვენეთ, რომ შეიძლება ხუთივე კავშირის განსაზღვრა $\sim$ და $\&$ ლოგიკური კავშირებით.

8. ისარგებლეთ 6-12 ცხრილით მოცემული კანონებით და შემდეგი გამონათქვამები დაიყვანეთ მათ უმარტივეს იგივურ ფორმაზე.

(ა) $(\sim p \,\&\, (p \,\&\, q))$
(ბ) $(\sim p \,\&\, q) \vee \sim (p \vee q)$
(ბ) $(\sim p \,\&\, (p \,\&\, q)) \vee (p \,\&\, r)$
(ბ) $(\sim p \,\&\, q) \leftrightarrow (p \vee q)$
(ბ) $((p \vee q) \,\&\, (p \vee \sim q)) \rightarrow (p \vee q)$

9. ააგეთ შემდეგი მსჯელობების სამართლიანობის ფორმალური დამტკიცებები (გაითვალისწინეთ, რომ რიგ შემთხვევებში, პირობითი ან/და არაპირდაპირი დამტკიცება უფრო მარტივად იგება!).

(ა) $p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\sim r$ $\therefore \sim p$	(ბ) p $\sim r$ $(p \,\&\, \sim r) \rightarrow q$ $\therefore q$
(გ) $p \vee q$ $\sim q$ $r \rightarrow \sim q$ $\therefore \sim r$	(დ) $p \rightarrow \sim q$ $r \rightarrow q$ $\sim r \rightarrow s$ $\therefore p \rightarrow s$

(ე) $\sim p \vee q$ $\sim q \& r$ $\sim (p \vee q) \rightarrow s$ $\therefore r \& s$	(ვ) $p \vee (q \& r)$ $\sim t$ $(p \vee q) \rightarrow (s \vee t)$ $\sim p$ $\therefore r \& s$
(ზ) $p \leftrightarrow q$ $\sim p$ $(q \& \sim r) \vee t$ $(s \vee t) \rightarrow r$ $\therefore r \& \sim q$	(თ) $\sim p \rightarrow q$ $r \rightarrow (s \vee t)$ $s \rightarrow \sim r$ $p \rightarrow \sim t$ $\therefore r \rightarrow q$
(ი) $p \rightarrow (q \& r)$ $q \rightarrow s$ $r \rightarrow t$ $(s \& t) \rightarrow \sim u$ u $\therefore \sim p$	(კ) $p \rightarrow q$ $r \rightarrow s$ $\sim q \vee \sim s$ p $(t \& u) \rightarrow r$ $\therefore \sim t \vee \sim u$
(ლ) $(p \& q) \rightarrow (p \rightarrow (r \& s))$ $(p \& q) \& u$ $\therefore r \vee s$	(მ) p $(p \& q) \& (p \& r)$ $(p \vee q) \rightarrow \sim r$ $\therefore p \leftrightarrow s$

10. გამოხატეთ შემდეგი მსჯელობები სიმბოლური ფორმით და განსაზღვრეთ, არიან თუ არა ისინი ზოგადმართებულები:

(ა) ბარონი მოკლა ან მსახურმა ან მზარეულმა ან მძღოლმა. თუ ბარონი მზარეულმა მოკლა, მაშინ ლორი მოწამლული იყო, და თუ ბარონი მძღოლმა მოკლა, მაშინ მანქანაში ბომბი იყო ჩადებული. ლორი არ იყო მოწამლული და მსახურს არ მოუკლავს ბარონი. აქედან გამომდინარე, ბარონი მოკლა მძღოლმა.

(ბ) თუ ადამიანმა ვერ გაიგო მინიშნება ან ვერ მოასწრო წინადადების წაკითხვა, მაშინ ის არასწორ ღილაკს დააწვება ან არასწორად გასცემს პასუხს. თუ მან არასწორად გასცა პასუხი, მაშინ დროის მრიცხველი არ გამოირთვება. იგი სწორ ღილაკს დააწვა და დროის მრიცხველი გამოირთო. აქედან გამომდინარე, მან გაიგო მინიშნება.

(გ) თუ წნევა ერთი ატმოსფეროა, წყალი დუღს მხოლოდ მაშინ, როცა ტემპერატურა სულ ცოტა ასი გრადუსია. თუ წნევა ერთი ატმოსფეროა, წყალი იყინება მხოლოდ მაშინ, როცა ტემპერატურა არ არის ნულ გრადუსზე მეტი. წნევა ერთი ატმოსფეროა და ტემპერატურა ან სულ ცოტა ასი გრადუსია, ან არ არის ნულ გრადუსზე მეტი. წყალი არ დუღს. აქედან გამომდინარე, ტემპერატურა არ არის ნულ გრადუსზე მეტი.

(დ) თუ მე ვარ კეთილსინდისიერი, მაშინ მე ვარ გულუბრყვილო. მე ვარ ან კეთილსინდისიერი, ან გულუბრყვილო, ანდა სემი იყო მართალი და იმ მაღაზიის ის გამყიდველი აფერისტია. მე არ ვარ გულუბრყვილო. და იმ მაღაზიის ის გამყიდველი ნამდვილად აფერისტია. აქედან გამომდინარე, სემი იყო მართალი.

(ე) ეს კონსონანტური მიმდევრობა, თუ ის დამწყები მიმდევრობაა, არის წინავოკალური, და თუ ის არ არის დამწყები მიმდევრობა მაშინ ის არის უხმო. თუ ის არის ან წინავოკალური ან უხმო, მაშინ ის არის თანხმოვნური და აფრიკატული (წრიპინა). თუ ის არის თანხმოვნური, მაშინ, თუ ის არის აფრიკატული, მაშინ ის არის დაჭიმული. თუ ის არის დაჭიმული, მაშინ, თუ ის დამწყებია, ის არის პალატიზირებული (შემსუბუქებული). აქედან გამომდინარე, ეს კონსონანტური მიმდევრობა არის შემსუბუქებული და უხმო.

11. ვთქვათ $S = \{p, (p\vee q), (p\vee p), (p\vee \sim p), (p\&(q\vee \sim q)), (\sim q\rightarrow p), (p\rightarrow (q\rightarrow p)), (\sim p\rightarrow q), (p\vee (q\&\sim q)), (p\vee (q\vee \sim q))\}$ რაიმე სიმრავლეა და $R=\{(x,y)\ /\ x\in S$ და $y\in S$ და $x\Leftrightarrow y\}$ ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული მიმართებაა.

(ა) ვაჩვენოთ. რომ R ლოგიკური იგივურობის მიმართებაა.

(ბ) იპოვეთ S სიმრავლეზე R მიმართებით განსაზღვრული იგივურობის კლასები.

12. ააგეთ შემდეგი მსჯელობების (გამოყვანების) ზოგადმართებულობის საკითხის გამრკვევი ბეთსის ცხრილები:

(ა)
$$\begin{array}{l} (p\rightarrow(q\rightarrow r) \\ \sim(\sim p \vee r) \\ \hline \therefore\ p \,\&\sim q \end{array}$$

(ბ)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \,\&\, r \\ \hline \therefore\ p \,\&\, q \end{array}$$

(გ)
$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \,\&\, (s\vee t) \\ t \rightarrow q \\ \hline \therefore (p \rightarrow q) \vee \sim (s \rightarrow q) \end{array}$$

13. გამოსახულებები ფორმალურ აღრიცხვაში შეიძლება ჩაიწეროს ე.წ. „პოლონური ჩანაწერებით (ფრჩხილებისაგან თავისუფალი ჩანაწერებით)“, რომელშიც ლოგიკური კავშირები განთავსებულნი არიან იმ გამონათქვამების წინ, რომლებსაც ისინი აკავშირებენ. პოლონურ სისტემაში ლოგიკური კავშირები შემდეგნაირად აღინიშნება: N

(უარყოფა), A (დიზიუნქცია), K (კონიუნქცია), C (გამომდინარეობა) და E (იგივურობა). ბოლო ოთხი მოქმედებს უშუალოდ მის მარცხნივ განთავსებულ ორ გამონათქვამზე; უარყოფა მხოლოდ ერთზე. ქვემოთ, სვეტის მარცხენა მხარე შევსებულია სტანდარტული ჩანაწერებით, მათ გასწვრივ კი მოცემულია მათი პოლონური ჩაწერები.

სტანდარტული	პოლონური
~p	Np
$p\vee q$	Apq
p&q	Kpq
$p\to q$	Cpq
$p\leftrightarrow q$	Epq
$(p\&q)\vee r$	AKpqr
$p\&(q\vee r)$	KpAqr

დააკვირდით რითი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან $(p\&q)\vee r$ და $p\&(q\vee r)$ ფორმულების პოლონური ჩანაწერები.

(ა) გადაიყვანეთ პოლონურ ჩანაწერებში:

(1) $((p\vee q)\ \&\ (q\vee r))\ \&\ (p\vee s)$

(2) $(\sim p\&(\sim p\to q))\to q$

(3) $(p\vee q)\to((r\leftrightarrow s)\ \&p)$

(ბ) გადაიყვანეთ სტანდარტულ ჩანაწერებში:

(1) ApCKNpNqKpEqr

(2) KANKAKEEpqrspqrs

(3) NCAKEpqrst

(გ) გამოხატეთ დე მორგანის კანონები პოლონურ ჩანაწერებში.

თავი 7
პრედიკატული ლოგიკა

7.1 სინტაქსი

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ კიდევ ერთ ლოგიკურ ენას. კერძოდ, ზოგადად გავეცნობით ე.წ. პრედიკატულ ლოგიკას და ამ ლოგიკური თეორიის შესაძლებლობებს. ამ თეორიაში საშუალება გვეძლევა როგორც (5-1) და (5-2) სახის მტკიცებების, ისე გამონათქვამთა ლოგიკის სხვა ნებისმიერი სახის მტკიცების ანალიზისა.

პრედიკატული ლოგიკის უმარტივესი გამონათქვამები (ე. ი. ატომალური ფორმულები) იგება ერთი პრედიკატისა და ტერმების გარკვეული ოდენობისაგან. მაგალითად, H(s) გამონათქვამი აგებულია H პრედიკატითა და ერთი s ტერმით; გამონათქვამი L(j,m) აგებულია L პრედიკატითა და j და m ტერმებით. ამ ფორმულებიდან პირველი შეიძლება გამოყენებულ იქნას როგორც თარგმანი ფრაზისა **სოკრატე ადამიანია**, სადაც **სოკრატე** წარმოდგენილია s ტერმით, ხოლო **ადამიანია** – H პრედიკატით; ანალოგიურად, L(j,m) ატომალური ფორმულა

შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც პრედიკატული ლოგიკის ენაში **ჯონს უყვარს მერი** წინადადების თარგმანი.

პრედიკატი, იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ ტერმს ითხოვს იგი გამონათქვამების ასაგებად, შეიძლება იყოს ერთადგილიანი, ორადგილიანი და ა. შ.. ზემოთ განხილულ მაგალითებში H ერთადგილიანი, L კი ორადგილიანი პრედიკატია. თუ პრედიკატს მისი ადგილიანობის მაჩვენებელი რიცხვის არატოლი რაოდენობის ტერმებს მივუწერთ, მივიღებთ სინტაქსური თვალსაზრისებით არასწორად აგებულ ანუ არასწორად ფორმირებულ გამოსახულებას. მაგალითად, ჩვენს შემთხვევაში, ასეთები იქნებოდნენ გამოსახულებები H(j,m) და L(s). საზოგადოდ, პრედიკატებს აღნიშნავენ მთავრული ლათინური ასოებით. ამასთან, არ არის აუცილებელი მათი აღნიშვნა ღიად გვითითებდეს ტერმთა იმ რაოდენობაზე, რომელსაც ის ითხოვს გამონათქვამების ასაგებად. პრედიკატის საპრედიკაციო ადგილთა რაოდენობა ანუ პრედიკატის ადგილიანობა ნატურალური რიცხვით გამოისახება და, შესაბამისად, პრედიკატის ადგილიანობის მაჩვენებელი გარდა იმისა, რომ ის სასრული ნატურალური რიცხვი უნდა იყოს, არანაირად არ იზღუდება.

აქვე ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ პრედიკატული ლოგიკის ენაში პრედიკატის ცნების შინაარსული გაგება არაა აუცილებელი ზუსტად შეესაბამებოდეს ბუნებრივ ენაში გრამატიკული პრედიკატის ცნების შინაარსულ გაგებას. ზემოთ, **სოკრატე არის ადამიანი (ადამიანია)** წინადადების თარგმნისას, H (ლოგიკური) პრედიკატი გამოვიყენეთ ნაცვლად (გრამატიკული) პრედიკატისა **არის ადამიანი (ადამიანია)**, ხოლო L ლოგიკური პრედიკატი შევუსაბამეთ გარდამავალ ზმნას **უყვარს** – წინადადებაში **ჯონს უყვარს მერი**, თუმცა პრედიკატული ლოგიკის ენაზე იგივე ფრაზა თავისუფლად შეგვეძლო გადმოგვეცა ფორმულით G(m), სადაც ერთადგილიანი G პრედიკატი **ჯონს უყვარს** ფრაზის თარგმნითი შესაბამისი იქნებოდა, რომელიც, თავის მხრივ, ბუნებრივ ენობრივი თვალსაზრისებით შეიძლება საერთოდაც არ იქნეს განხილული არა თუ პრედიკატად, არამედ თუნდაც რაიმე სახის ძირეულ გრამატიკულ კატეგორიად[1].

პრედიკატულ ლოგიკაში განიხილება ორი პრინციპულად განსხვავებული სახის ტერმები. პირველ მათგანს უწოდებენ **ინდივიდურ კონსტანტებს (საკუთრივ კონსტანტებს)**. ასეთებია ზემოთ მოყვანილი s, m და j სიმბოლოები. როგორც დასახელება გვიჩვენებს, ისინი აღნიშნავენ კონკრეტულ ინდივიდებს (უფრო ზოგადად – საგნებს) და ბუნებრივ ენობრივი ფრაზების თარგმნისას, როგორც წესი, შეესაბამებიან საკუთარ სახელებს – მაგ.: **ჯონს, მერის, სოკრატეს**. მეორე სახის ტერმები იწოდებიან **ინდივიდურ ცვლადებად** (ან უბრალოდ, **ცვლადებად**), რომელთა აღსანიშნადაც გამოიყენება პატარა ასოები ლათინური ანბანის ბოლო ნაწილიდან – v, w, x, y, z – და, იმ შემთხვევაში, თუ უფრო მეტი რაოდენობის ცვლადების შემოტანის საჭიროებაა, მათ მიეწერებათ შტრიხები და/ან ინდექსები. თუ პრედიკატით აგებული გამოსახულება შეიცავს ერთ, ან ერთზე მეტ ცვლადს, მაგ.: H(x), L(m,y), შედეგად ვღებულობთ არა **გამონათქვამს**, არამედ გამოსახულებას, რომელსაც **ღია გამონათქვამი** ანუ **პროპოზიციული (ჭეშმარიტული) ფუნქცია** ეწოდება.

ნებისმიერი ღია გამონათქვამი კვანტორთა გარკვეული ოდენობის პრეფიქსული ანუ წინსართული მიწერით გარდაიქმნება გამონათქვამად, მაგ.: $(\forall x)H(x)$, $(\exists y)L(m,y)$. **ზოგადობის კვანტორს,** რომელიც აღინიშნება $\forall$ სიმბოლოთი, შეიძლება შევუსაბამოთ ისეთი სახის ბუნებრივ ენობრივი შინაარსები, როგორიცაა მაგალითად **ყველა, თითოეული, ყოველი**[1]. **არსებობის კვანტორი** კი, რომელიც $\exists$ სიმბოლოთი აღინიშნება, შეესაბამება ისეთი სახის

[1] **რედაქტორის შენიშვნა:** ლოგიკური და გრამატიკული პრედიკატების ურთიერთმიმართების საკითხი დეტალურად განიხილება ნაშრომში „ლინგვისტური მიმართებისა და ლოგიკური ბრუნების საკითხისათვის ქართულში" (იხ. ს-ს ჟურნალი „ქართული ენა და ლოგიკა" - 2005წ., იანვარი-ივნისი, თბ.).

[1] **რედაქტორის შენიშვნა:** ქართულ ენაში უკუთქმით ზმნურ პრედიკატებთან ზოგადობის კვანტორის ფუნქციებს ასრულებენ მაკვანტიფიცირებელი სიტყვები **არცერთი**, **არავინ**, **არანაირი** და ა.შ..

ბუნებრივ ენობრივ შინაარსებს, როგორიცა **ზოგიერთი**[2] (იგულისხმება ,,სულ მცირე ერთი მაინც'' (ანუ შესაძლებელია მეტიც)). x ცვლადი, რომელიც $(\forall x)H(x)$ გამოსახულებაში ზოგადობის კვანტორს მოსდევს, იმაზე მიგვითითებს, რომ კვანტიფიკაცია მომდევნო გამოსახულებაში განხორციელდა x ცვლადის მიმართ. ამგვარი დაზუსტება აუცილებელია, რადგან გამოსახულება შეიძლება შეიცავდეს ერთზე მეტ კვანტორსა და ერთზე მეტ ცვლადს. მაგალითად, $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ გამოსახულებაში $L(x,y)$ გამოსახულების პირველი ადგილი (ე.ი. x ადგილი) კვანტიფიცირებულია ზოგადობის კვანტორით, მეორე ადგილი კი (ე.ი. y ადგილი) კვანტიფიცირდება არსებობის კვანტორით, მაშინ როდესაც $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$ გამოსახულებაში ადგილებისდა მიხედვით კვანტიფიკაცია პირიქითი რიგით წარმოებს.

ვთქვათ, H კვლავ **ადამიანია (არის ადამიანი)** მიმართებას შეესაბამება, მაშინ $(\forall x)H(x)$ გამონათქვამი შეგვიძლია ვთარგმნოთ როგორც **ყველა ინდივიდი ადამიანია** ანუ **ყველაფერი (ე.ი. ყველანაირი საგანი) ადამიანია**. ამავე პირობებში $(\exists x)H(x)$ გამონათქვამის ერთ-ერთი თარგმნითი შესაბამისი იქნებოდა **ზოგიერთი (ე. ი. ერთი მაინც) ინდივიდი ადამიანია**, მოკლედ**, რომელიღაცა (ერთი) ადამიანია**. თუ დავუშვებთ, რომ m კონსტანტა შეესაბამება სიტყვას **მერი** და L პრედიკატი სიტყვას **უყვარს**, მაშინ $(\exists y)L(m,y)$ გამონათქვამი შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი ფრაზის თარგმანად: **აქ არის სულ ცოტა ერთი მაინც ისეთი ინდივიდი, რომელიც მერის უყვარს (There is at least one individual whom Mary loves)**[3]**,** ან მოკლედ, **მერის უყვარს რაღაცა** (ან **ვიღაცა**, და ეს იმ შემთხვევაში, თუ ყველა ის ინდივიდი, ვიზეც ვსაუბრობთ, ადამიანია). ანალოგიურად, $(\forall y)L(m,y)$ შეესაბამება ფრაზას **მერის უყვარს ყველა ინდივიდი** ან, თუ ინდივიდში ადამიანები იგულისხმება, **მერის უყვარს ყველა**.

აქვე შევნიშნავთ, რომ გარკვეულ შემთხვევებში მნიშვნელობა არ აქვს იმას, თუ რომელ ასოს ავირჩევთ ცვლადის აღსანიშნად. $(\forall x)H(x)$ გამონათქვამის ნაცვლად თავისუფლად შეგვეძლო დაგვეწერა $(\forall y)H(y)$ ან $(\forall z)H(z)$ გამონათქვამი, $(\exists y)L(m,y)$ გამონათქვამის ნაცვლად კი - $(\exists x)L(m,x)$. როცა გამოსახულებაში ერთზე მეტი ცვლადია, ჩვენ, რა თქმა უნდა, სხვადასხვა ასოები უნდა გამოვიყენოთ გამოსახულებაში არსებული განსხვავებული ცვლადებისათვის, მაგ.: $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$. თუ დავწერთ $L(x,x)$ ფორმულას და შემდეგ, ამ ფორმულაში მოვახდენთ x ცვლადის არსებობის კვანტორით კვანტიფიცირებას, მივიღებთ გამონათქვამს $(\exists x)L(x,x)$, რომელიც ასე იკითხება: **არსებობს ერთი მაინც ისეთი ინდივიდი, რასაც (ან ვისაც) უყვარს თავისი თავი.** აქ ერთი და იგივე x ტერმი იკავებს ორადგილიანი პრედიკატის ორივე ადგილს. გამონათქვამში $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$, რომლის ბუნებრივ ენობრივი ფორმა არის **არსებობს ერთი მაინც ისეთი ინდივიდი, რომელსაც უყვარს ყველა ინდივიდი,** x და y ცვლადებს ინდივიდთა სიმრავლეში შეუძლიათ მიიღონ ერთმანეთისგან განსხვავებული მნიშვნელობები, მაგრამ, არც ის გამოირიცხება, რომ მათ ამ სიმრავლეში ერთი და იგივე

---

[2] **რედაქტორის შენიშვნა:** ქართულ ენაში მაკვანტიფიცირებელი სიტყვა **ყველა** უკუთქმით ზმნურ პრედიკატებთან არსებობის კვანტორის ფუნქციას ასრულებს. ასე მაგალითად, წინადადება **ყველა ინდივიდი არ არის ადამიანი** შინაარსულად თითქმის არაფრით არ განსხვავდება წინადადებისაგან **ზოგიერთი ინდივიდი არ არის ადამიანი.** ქართულში არსებობის კვანტორის ფუნქციებით გამოიყენება აგრეთვე სიტყვები **რომელიღაცა (ერთი), ვიღაცა (ერთი), რაღაცა (ერთი), ერთი (მაინც), რამდენიმე** და ა. შ,. მაგ., **რამდენიმე ინდივიდი არ არის ადამიანი.**

[3] **რედაქტორის შენიშვნა:** ეს წინადადება, ცხადია, არ არის თანამედროვე ქართულისათვის დამახასიათებელი სტანდარტული ფრაზირება იმ შინაარსისა, რომლის გადმოცემაც აქ ჩვენ ამ ფრაზით ვცადეთ მკითხველებამდე ავტორებისეული და, შესაბამისად, ინგლისურ ენობრივი თვალსაზრისების მეტი ადეკვატურობით მიტანის მიზნით. თანამედროვე ქართულით ჩვენ იგივეს შემდეგნაირად ვიტყოდით: **არსებობს სულ ცოტა ერთი მაინც ისეთი ინდივიდი, რომელიც მერის უყვარს.** – ის, რომ ბუნებრივი ენობრივი სისტემების მკაცრი მათემატიკური კვლევები ითხოვენ საკვლევი ენობრივი სისტემების ლოგიკურ-ლინგვისტური კანონების სრულ და ადეკვატურ ასახვას და ის, რომ აღნიშნული თვალსაზრისებით ქართული ბუნებრივი ენობრივი სისტემა ძირეულადვე განსხვავდება ინდოევროპული და სხვა არაქართველური ტიპის ბუნებრივი ენობრივი სისტემებისაგან, აუცილებლობის წესით განაპირობებს აღნიშნული მიმართულებით ადგილობრივი მიზნობრივი კვლევების განვითარების საჭიროებას. – ეს ის რეალობაა, რაც აღნიშნული მიმართულებით მიმდინარე კვლევებს მკაცრ მათემატიკურ, ფორმალურ-ლოგიკურ დატვირთვებთან ერთად გამოკვეთილად უსაზღვრავს ფუნდამენტური მნიშვნელობის მქონე ქართველოლოგიურ დატვირთვებსაც.

მნიშვნელობები მიენიჭოთ; მართლაც, $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$ გამონათქვამი მხოლოდ იმ შემთხვევაშია ჭეშმარიტი, თუ არსებობს ერთი მაინც ისეთი ინდივიდი, რომელსაც უყვარს ყველა ინდივიდი საკუთარი თავის ჩათვლით. მაგრამ, ისიც უნდა გვახსოვდეს, რომ ის, თუ რომელი კონკრეტული ცვლადია არჩეული, არაარსებითია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მიუხედავად ამ არჩევანისა ერთი და იგივე კვანტორი უკავშირდება პრედიკატის ერთსა და იმავე ადგილს; მაგ.: $(\exists y)(\forall x)L(y,x)$ გამონათქვამი არის $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$ გამონათქვამის ალფაბეტური ვარიანტი; მაგრამ $(\exists y)(\forall x)L(y,x)$ და $(\exists x)(\forall y)L(y,x)$ არ არიან ერთმანეთის ალფაბეტური ვარიანტები, რადგან, აქ უკვე, ერთი და იგივე კვანტორები უკავშირდებიან L პრედიკატის განსხვავებულ ადგილებს.

ქვემოთ ჩვენ კვლავ შევეხებით კვანტორებისა და ცვლადების გამოყენების რიგ თავისებურებებს. მანამდე კი ყურადღებას გავამახვილებთ იმ გარემოებაზე, რომ პრედიკატულ ლოგიკაში სინტაქსურად დაშვებულია გამონათქვამებისა და ღია გამონათქვამების ერთმანეთთან დაკავშირება ანუ მათი ერთმანეთთან მიერთება შემდეგი ლოგიკური ოპერატორების გამოყენებით: $\sim$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$; მაგ.:

(7-1) (I) $\sim H(x)$

(II) $\sim H(s)$

(III) $((\forall x)H(x) \;\&\; L(j, m))$

(IV) $(\sim H(s) \rightarrow \sim (\forall x)H(x))$

(II), (III) და (IV) გამონათქვამები ბუნებრივ ენაში შესაბამისად შეიძლება ითარგმნოს შემდეგ წინადადებებად: **სოკრატე არ არის ადამიანი**; **ყოველი ინდივიდი ადამიანია და ჯონს უყვარს მერი**; **თუ სოკრატე არ არის ადამიანი, მაშინ ყველა ინდივიდი არ არის ადამიანი.** (I) ფორმულა არის არა გამონათქვამი, არამედ ღია გამონათქვამი, რადგან ის შეიცავს არაკვანტიფიცირებულ ცვლადს და, ალბათ, ეს არის მიზეზი იმისა, რომ იგი არ შეესაბამება არცერთ თხრობით წინადადებას (თუმცა, შესაძლოა, მისი ყველაზე მიახლოებული თარგმანი იყოს **ის არ არის ადამიანი (He is not human),** სადაც **ის (He)** სიტყვის რეფერენტი არაა დაკონკრეტებული).

რედაქტორის შენიშვნა: აქ, უნდა ითქვას, რომ ავტორები, თანამედროვე ლოგიკურ-ლინგვისტური თვალსაზრისების გათვალისწინებით, ეხებიან მეტად მნიშვნელოვან პრობლემატურ საკითხს. მათი თქმით, (I) ფორმულის პირდაპირი ენობრივი თარგმანი არ არსებობს და ამის მიზეზი, როგორც ისინი მიიჩნევენ, უნდა იყოს ის, რომ იგი არის არა გამონათქვამი, არამედ ღია გამონათქვამი, რაც ამ ფორმულაში არაკვანტიფიცირებული x ცვლადის არსებობით არის განპირობებული. მიუხედავად ამისა, ისინი აღნიშნული წინადადების უხეშ თარგმანად გვთავაზობენ **ის არ არის ადამიანი (He is not human)** წინადადებას**.** – გასაგებია, რომ მათი ხედვა აღნიშნულ პრობლემაზე განპირობებულია ინგლისური ენის სიღრმისული ბუნებრივი თავისებურებებით, რაც, ჩვენთვის, ამ ენის ბუნებრივად არ მატარებლებისათვის, ძნელად საწვდომია. - მიუხედავად ამისა, ანდა, პირიქით, სწორედაც რომ ამის გამო, ჩვენ ვალდებულნი ვართ განვიხილოთ თვისობრივად იგივე პრობლემატური საკითხი ქართული ენის სიღრმისეული ბუნებრივი თავისებურებების გათვალისწინებით. – განვიხილოთ ფორმულა $H(x)$, რომლის უხეში ენობრივი თარგმანი მათივე მიდგომებით უნდა იყოს **ის არის ადამიანი** წინადადება. ახლა დავაკვირდეთ ქართულ წინადადებებს: **ინდივიდი ადამიანია, ყველა ინდივიდი ადამიანია, ერთი რომელიღაც ინდივიდი ადამიანია, ის (ეს) ინდივიდი ადამიანია, ერთი რომელიღაც ინდივიდი არ არის ადამიანი, ის (ეს) ინდივიდი არ არის ადამიანი, არცერთი ინდივიდი ადამიანია*, არცერთი ინდივიდი არ არის ადამიანი, ინდივიდი არ არის ადამიანი. –** ჩვენი მიდგომებით (იხ. დამხმარე საკითხავი კურსი თანამედროვე მათემატიკურ ლინგვისტიკაში, 2004წ., თბ.) $H(x)$ ფორმულის ქართულ ენობრივი თარგმანია წინადადება **ინდივიდი ადამიანია**. ანუ, ჩვენ ვთვლით, რომ ამ წინადადებაში სიტყვა **ინდივიდი** ქართულ ენობრივ რეალიზაციას უკეთებს ცვლადის მათემატიკურ იდეას, რასაც გვიდასტურებს ქართულ ენაში **ინდივიდი ადამიანია** და **ყველა ინდივიდი ადამიანია** წინადადებების შინაარსული იგივურობა და **ინდივიდი**

ადამიანია და **ის ადამიანია** წინადადებების შინაარსული განსხვავებულობა. აქედან გამომდინარე, ჩვენთვის, ~H(x) ფორმულის ქართულ ენობრივი თარგმანია **ინდივიდი არ არის ადამიანი** წინადადება, რაც შინაარსულად ეიგივურება **არცერთი ინდივიდი არ არის ადამიანი** წინადადებას. — ამგვარად, ჩვენ ვთვლით, რომ ბუნებრივი ქართული ენობრივი სისტემისათვის უცხო არ არის მათემატიკური ცვლადის იდეა, რაც ქართული ენისა და მათემატიკური ენის ზოგადი ერტიპობრიობის კიდევ ერთი დამადასტურებელი არგუმენტია. – ამ საკითხის განხილვისას გასათვალისწინებელია ისიც, რომ ბუნებრივი ენის თხრობითი წინადადებები, ჩვენი მიდგომებით, ყოველთვის გამოითქმებიან როგორც მეტყველი პირის მიერ ჭეშმარიტად ანუ მართლად გაგებული შინაარსები. როგორც ჩანს, სწორედ ეს, და არა ~H(x) ფორმულაში x ცვლადის არსებობა, ართულებს აღნიშნული სახის ღია გამონათქვამების პირდაპირი ბუნებრივ ენობრივი თარგმანების გაკეთებას. — აქ აღნიშნულის გათვალისწინებით და ჩვენეული მიდგომებით (II), (III) და (IV) გამონათქვამები ქართულ ბუნებრივ ენობრივ წესთწყობაში შესაბამისად ითარგმნებიან შემდეგ წინადადებებად: **მცდარია ის, რომ სოკრატე ადამიანია; ჭეშმარიტია ის, რომ ყველა ინდივიდი ადამიანია და მარის უყვარს ჯონი; თუ მცდარია ის, რომ სოკრატე ადამიანია, მაშინ მცდარია ის, რომ ყველა ინდივიდი ადამიანია.** ამავე მიდგომებით (I) გამონათქვამი ითარგმნება როგორც **მცდარია ის, რომ ინდივიდი ადამიანია**. ამ მიდგომებით ~(∀x)~H(x) გამონათქვამის თარგმანია **მცდარია ის, რომ არცერთი ინდივიდი არ არის ადამიანი**, ხოლო ~(∃x)~H(x) გამონათქვამისა კი — **მცდარია ის, რომ ზოგიერთი ინდივიდი არ არის ადამიანი**. — აქ მოკლედ განხილულ ჩვენეულ მიდგომებს, რომლებიც „ლოგიკისა და ენის გაერთიანებულ ქართულ ჯგუფში" ბუნებრივი ქართულ ენობრივი წესთწყობის მკაცრი ლოგიკურ-ლინგვისტური კვლევების შედეგად გამოიკვეთა, გაკვრით ქვემოთაც შევეხებით. მანამდე კი, მკითხველს ვთავაზობთ ~(~H(s) → ~ (∀x)H(x)) და ~ ((∀x)H(x) & L(j, m)) გამონათქვამების ჩვენეულ თარგმანს: **მცდარია ის, რომ თუ მცდარია ის, რომ სოკრატე ადამიანია, მაშინ მცდარია ის, რომ ყველა ინდივიდი ადამიანია; მცდარია ის, რომ (ჭეშმარიტია ის, რომ) ყველა ინდივიდი ადამიანია და მარის უყვარს ჯონი. —** ხაზგასმით აღვნიშნავთ, რომ ჩვენ ვცდილობთ ტექსტში არსებული მათემატიკური გამონათქვამების ბუნებრივ ენობრივი თარგმნითი ტოლძალოვნების ისე წარმოჩენას, რომ მაქსიმალურად შენარჩუნდეს სახელმძღვანელო კურსში გატარებული ინგლისურ ენობრივი ლოგიკურ-ლინგვისტური თვალსაზრისები.

ღია გამონათქვამი, რაც არ უნდა რთული იყოს ის, წინ კვანტორების მიწერით ყოველთვის შეგვიძლია გარდავქმნათ გამონათქვამად. ასე მაგალითად, ღია გამონათქვამი ~H(x) შეგვიძლია გარდავქმნათ ან (∀x)~H(x) ან (∃x)~H(x) გამონათქვამად (ეს უკანასკნელი შეესაბამება წინადადებას **ყველა ინდივიდი არ არის ადამიანი** (**Every individual is not human**, რაც ბევრ მსმენელს შეიძლება არც მთლად ცხადად და ერთაზროვნად ეჩვენოს, მაგრამ აქ იგულისხმება, რომ ნებისმიერად აღებულ ინდივიდზე ვერ ვიტყვით იმას, რომ ის ადამიანია და რომ, შესაბამისად, **ერთი ინდივიდი მაინც არ არის ადამიანი**).

რედაქტორის შენიშვნა: ქართულ ენაში წინადადება **ყველა ინდივიდი არ არის ადამიანი** არანაირი ორაზროვნების მატარებელი არ არის. მიუხედავად ამისა, ჩვენ ზემოთ შევინარჩუნეთ ავტორებისეული ხედვა და მსჯელობა, რომელიც, ცხადია, ეხება ინგლისურ წინადადებას **Every individual is not human.** ქართულ ენაში, ინგლისური ენისაგან განსხვავებით, წინადადება **ყველა ინდივიდი არ არის ადამიანი** ცალსახად არაორაზროვანია და იგი ისევე გაიგება, როგორც ამას ავტორები გვთავაზობენ ზემო მსჯელობაში. მიზეზი იმისა, რომ ეს ასეა, სიღრმისეულია და, როგორც ჩანს, იგივეა მიზეზი იმისა, რომ ქართულში ზემოაღნიშნულ წინადადებასთან ერთად დაიშვება და აზრდება აგრეთვე წინადადება **არცერთი ინდივიდი არ არის ადამიანი,** რომელიც, როგორც ორმაგუარყოფიანი კონსტრუქცია, ინგლისური ენისათვის არასწორ სინტაქსურ კონსტრუქციად განიხილება.

მაგალითების საშუალებით ჩვენ არაფორმალურად აღვწერეთ პრედიკატული ლოგიკის ენის სინტაქსი, ახლა კი შემოგთავაზებთ ამ ენის სინტაქსური წესების ზუსტ ფორმულირებას.

პრედიკატული ლოგიკის ენის სიტყვარი (ალფაბეტი) შეიცავს:

(7-2) (I) საგნობრივ (ანუ ინდივიდურ) კონსტანტებს: j, m, . . .;

(II) საგნობრივ (ანუ ინდივიდურ) ცვლადებს: x, y, z,. . . (ზოგჯერ ინდექსირებულებსაც);

(**ტერმი** საგნობრივი კონსტანტებისა და ცვლადების საერთო სახელია.)

(III)პრედიკატებს: P,Q,R,..., რომელთაგან თითოეული ხასიათდება ნაგულისხმევი საოპერაციო ადგილთა რაოდენობის ამსახველი გარკვეული სასრული რიცხვით, რომელსაც პრედიკატის ადგილიანობის მახასიათებელს უწოდებენ;

(IV) გამონათქვამთა ლოგიკის ხუთ ლოგიკურ კავშირს: ~, ∨, &, →, ↔;

(V) ორ კვანტორს: ∀ და ∃;

(VI) დამხმარე სიმბოლოებს: (,) და [,].

პრედიკატული ლოგიკის ენის **ფორმულათა** სიმრავლე აიგება (ანუ წარმოიქმნება) ამ ენის სიტყვარისა და (7-3) დებულებებით მოცემული ამავე ენის სინტაქსური (ანუ ფორმალური) წესების გამოყენებით. შემდგომში **გამონათქვამთა** სიმრავლეს ჩვენ განვსაზღვრავთ როგორც ფორმულათა ამ სიმრავლის გარკვეულ საკუთრივ ქვესიმრავლეს.

(7-3) (I) თუ P არის n-ადგილიანი პრედიკატი და $t_1,...,t_n$ ტერმებია, მაშინ $P(t_1,...,t_n)$ გამოსახულება ფორმულაა.

(II) თუ φ და ψ ფორმულებია, მაშინ ფორმულებია აგრეთვე ~φ, (φ&ψ), (φ∨ψ), (φ→ψ), (φ ↔ ψ) გამოსახულებები.

(III) თუ φ ფორმულაა და x საგნობრივი (ანუ იდივიდური) ცვლადია, მაშინ ფორმულებია აგრეთვე (∀x)φ და (∃x)φ გამოსახულებები.

(IV) გამოსახულება არის პრედიკატული ლოგიკის ენის ფორმულა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ იგი შეიძლება აიგოს (I)-(III) წესების სასრულ რიცხვჯერ გამოყენების შედეგად.

ფორმულათა ამგები პირველი წესი წარმოქმნის ე.წ. ატომალურ ანუ განუყოფელ ფორმულებს (ე.ი. ფორმულებს, რომლებიც არ შეიცავენ კავშირებსა და კვანტორებს), მაგალითად, R(x,y), P(c), K(m,x), S(x,z,m). მიაქციეთ ყურადღება, რომ ლოგიკურ კავშირებს შეუძლიათ ერთმანეთს მიუერთონ როგორც კვანტორებიანი, ისე უკვანტორო ფორმულები და რომ ნებისმიერი კვანტორი მასზედ მიწერილ ცვლადთან ერთად შეიძლება წინ მიეწეროს ფორმულას მაშინაც კი, როცა ფორმულა არ შეიცავს ამ ცვლადს (მაგ., (∀x)P(y) სწორად აგებული ფორმულაა). ამდენად, პრედიკატული ლოგიკის ენის სინტაქსის ანუ ამ ენის ფორმალური წესების მიხედვით დასაშვებია ე.წ. **„უმიზნო“ კვანტიფიკაციაც** (ზოგიერთ სისტემაში არაა დაშვებული ამგვარი კვანტიფიკაცია, მაგრამ ამას უარყოფითი მხარეც აქვს: ამ შემთხვევაში გამოსახულებათა წარმომქმნელი ანუ ფორმულათა ამგები ფორმალური წესების სიმრავლე უფრო რთულია, რადგან ფორმულის წინ კვანტორის მიწერა ნებადართულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ფორმულა შეიცავს კვანტიფიცირებად ცვლადს. ჩვენ უპირატესობას ვანიჭებთ უფრო მარტივ სინტაქსს და უმიზნო კვანტიფიკაციას განვიხილავთ როგორც შინაარსულად მნიშვნელობის არ მქონე ანუ შინაარსობრივად არაძალისმიერ, ირელევანტურ ოპერაციას).

ვთქვათ, x არის ცვლადი და φ არის ფორმულა, რომელზედაც ზემოაღწერილი (III) წესის შესაბამისად კვანტორის მიწერით (მიერთებით) ვიღებთ ან (∀x)φ ან (∃x)φ ფორმულას. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ φ არის მასზედ მიერთებული კვანტორის **მოქმედების არე** და რომ φ და φ ფორმულის ნებისმიერი ნაწილი ანუ ქვეფორმულა მდებარეობს ამ კვანტორის **მოქმედების არეში.** ხშირად φ ფორმულას (∀x)φ და (∃x)φ ფორმულების მატრიცასაც

უწოდებენ. ქვემოთ განიხილება რამდენიმე მაგალითი, სადაც თითოეული კვანტორის მოქმედების არე მონიშნულია ქვემო ხაზგასმით.

(7-4) (I) $(\exists x)\underline{P(x)}$

(II) $(\exists y)\underline{R(x, y)}\ \&\ P(y)$

(III) $(\exists y)\underline{(R(x, y)\ \&\ P(y))}$

(IV) $(\exists x)\underline{(R(m)\ \&\ R(j, y))}$

(V) $(\exists x)\underline{((\forall y)\underline{(R(x, y) \rightarrow K(x, x))}}$ (($\exists x$) კვანტორის მოქმედების არე)

(($\forall y$) კვანტორის მოქმედების არე)

(VI) $(\exists x)\underline{[Q(x)\ \&\ (\forall y)\underline{(P(y) \rightarrow (\exists z)\underline{S(x, y, z)})}]}$ (($\exists x$) კვანტორის მოქმედების არე)

(($\forall y$) კვანტორის მოქმედების არე)

(($\exists z$) კვანტორის მოქმედების არე)

მიაქციეთ ყურადღება, რომ (II) მაგალითში ($\exists y$) დაერთო $R(x,y)$ ფორმულას და ამის გამო იგი მოექცა ამ არსებობის კვანტორის მოქმედების არეში, რის შემდგომაც მხოლოდ, ამ ოპერაციის შედეგად მიღებული ფორმულა & კავშირით მიუერთდა $P(y)$ ფორმულას, რომელიც, თავის მხრივ, ამ ($\exists y$) კვანტორის მოქმედების არის მიღმაა. მეორე მხრივ, (III) მაგალითში არსებობის კვანტორი მიუკავშირდა მთლიან $(R(x,y)\&P(y))$ ფორმულას, რომელიც, შესაბამისად, ერთი მთლიანი სახით ამ კვანტორის მოქმედების არედ იქცა. (IV) მაგალითში, მიუხედავად იმისა, რომ საქმე გვაქვს ცარიელ კვანტიფიკაციასთან, ($\exists x$) კვანტორის მომდევნო ფორმულა მისი მოქმედების არეა. (V) და (VI) მაგალითებში ხდება იმ ფორმულათა კვანტიფიკაცია, რომლებიც უკვე შეიცავენ კვანტორებს. ამდენად, შესაძლებელია, რომ ერთი რომელიმე კვანტორის მოქმედების არე შედიოდეს სხვა კვანტორის მოქმედების არეშიც.

მომდევნო განსაზღვრებაში კვანტორის მოქმედების არის ცნებას გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება.

(7-5)**განსაზღვრება 7.1.** ფორმულის x ცვლადი (x ცვლადის შემოსვლა) **იწოდება ფორმულის დაბმულ ცვლადად**, თუ ის შედის რომელიმე ($\exists x$) ან ($\forall x$) კვანტორის მოქმედების არეში. ფორმულის x ცვლადი (x ცვლადის შემოსვლა) იწოდება **ფორმულის თავისუფალ ცვლადად**, თუ ის არაა ფორმულის დაბმული ცვლადი. ■

ამგვარად, ფორმულაში ცვლადის შემოსვლის დაბმულობის საკითხი უკავშირდება ფორმულის წინ მიწერილ კვანტორებსა და ფორმულაში ცვლადის შემოსვლებს შორის არსებულ ურთიერთ მიმართებას. მაგალითად, $P(x)$ ფორმულაში x თავისუფალია, $(\exists x)P(x)$ ფორმულაში კი - დაბმული. (7-4,II) მაგალითში y ცვლადი $R(x,y)$ ფორმულაში არის დაბმული (($\exists y$) კვანტორის მიერ), მაგრამ $P(y)$ ფორმულაში იგივე y ცვლადი თავისუფალია. (7-4,III) მაგალითში y ცვლადის ორივე შემოსვლა დაბმულია. (7-4,II) და (7-4,III) მაგალითებში $R(x,y)$ ფორმულის x ცვლადი არის თავისუფალი, რადგან იგი არ შედის x ცვლადთან დაკავშირებული კვანტორის მოქმედების არეში. ანალოგიურად, (7-4,IV) მაგალითში y არის თავისუფალი, რადგან აქ ერთადერთი კვანტიფიკაცია ხდება ($\exists x$) კვანტორით. ახლა ჩვენთვის ნათელია, რომ „უმიზნო“ კვანტიფიკაცია უმიზნოა იმიტომ, რომ ის არანაირად არ ცვლის ფორმულაში დაბმული და თავისუფალი ცვლადების განლაგებას. მიაქციეთ ყურადღება, რომ კონსტანტები, მაგ.: m და j (7-4,IV) მაგალითში, არ შეიძლება იყვნენ არც დაბმული არც თავისუფალი, რამდენადაც, განსაზღვრებიდან გამომდინარე, მხოლოდ ცვლადის დაბმაა შესაძლებელი. (7-4,V) და (7-4,VI) ფორმულებში ყველა ცვლადის ყველა შემოსვლა დაბმულია. შევნიშნოთ, რომ ცვლადი, რომელიც თავისუფალია ქვეფორმულაში, შეიძლება იყოს დაბმული ამ ქვეფორმულის შემცველი ვრცელი ფორმულის ფარგლებში, მაგ., ასეთებია x და y ცვლადები (7-4,VI) ფორმულის $(\exists z)S(x,y,z)$ ქვეფორმულაში.

ნებისმიერი ცვლადის ნებისმიერი შემოსვლა, რომელიც გვხვდება ფორმულაში, ან დაბმულია, ან თავისუფალი. – აქ სხვა რაიმე შუალედური მდგომარეობა გამოირიცხება. ამასთან, ცვლადი შეიძლება მხოლოდ ერთგზის იყოს დაბმული. მაგალითად, შეიძლება ვინმემ იფიქროს, რომ $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists x)M(x))$ ფორმულაში $M(x)$ ფორმულის x ცვლადი დაბმულია როგორც $(\exists x)$, ისე $(\forall x)$ კვანტორით. ეს ასე არაა. – ის დაბმულია მხოლოდ $(\exists x)$ კვანტორით, ხოლო $(\forall x)$ კვანტორით იბმება მხოლოდ $P(x)$ ფორმულის x ცვლადი. ეს ფორმულა ნაკლებ დამაბნეველი იქნებოდა, ჩვენ რომ აქ სხვადასხვა ცვლადები გამოგვეყენებინა, მაგ., $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)M(y))$, რომელიც ზემოთ მოცემული ფორმულის ერთ-ერთი ალფაბეტური ვარიანტია. საერთოდ, უკეთესია ფორმულათა შედგენისას თავი ავარიდოთ სხვადასხვა ცვლადების აღნიშვნას ერთი და იგივე ასოთი იმ შემთხვევაშიც კი, როცა ორი კვანტორი, რომელიც ერთმანეთის სამოქმედო არეში იჭრება, ისედაც ნათლად მიუთითებს მათ განსხვავებულობაზე (როგორც ეს აქ განხილულ მაგალითში იყო). ალფაბეტური ვარიანტების თემას ჩვენ დავუბრუნდებით 7.3 პარაგრაფში.

პრედიკატულ ლოგიკაში **გამონათქვამი** ისეთი ფორმულაა, რომელიც არ შეიცავს არცერთ თავისუფალ ცვლადს. ამდენად, გამონათქვამში ნებისმიერი ცვლადის ნებისმიერი შემოსვლა დაბმულია ამავე გამონათქვამის (ფორმულის) რომელიმე კვანტორით. გამონათქვამთა ამ სიმრავლეს ზოგჯერ **პრედიკატული ლოგიკის გამონათქვამთა ანუ წინადადებათა ანუ ჩაკეტილ ფორმულათა სიმრავლესაც** უწოდებენ. ფორმულა, რომელიც შეიცავს ცვლადის ერთ მაინც თავისუფალ შემოსვლას, როგორც უკვე აღინიშნა, **ღია ფორმულად,** ზოგჯერ კი, **პროპოზიციულ ფუნქციად** იწოდება.

7.2 სემანტიკა

ამ პარაგრაფში მოცემულია პრედიკატული ლოგიკის სემანტიკის არაფორმალური აღწერა. ამ საკითხის უფრო მკაცრ, ფორმალურ განხილვას შემოგთავაზებთ ამავე სახელმძღვანელო კურსის D ნაწილში.

გამონათქვამს, ისევე როგორც ეს გამონათქვამთა ლოგიკაშია, პრედიკატთა ლოგიკაში ანუ, რაც თითქმის იგივეა, პრედიკატულ აღრიცხვაში შეიძლება მიენიჭოს ორიდან ერთ-ერთი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა: ან 1 **(ჭეშმარიტი),** ან 0 **(მცდარი)**. ნებისმიერი ისეთი გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა, რომელიც აგებულია პრედიკატების, ტერმებისა და კვანტორების გამოყენებით, განისაზღვრება ამ მისი ამგები ალფაბეტური სიმბოლოების ე.წ. **შინაარსული (ანუ სემანტიკური) მნიშვნელობებით** (რომლებიც არაა აუცილებელი იყოს ჭეშმარიტული მნიშვნელობები). მაგალითად, გამონათქვამი $H(s)$, რომელიც აგებულია ერთადგილიანი H პრედიკატითა და s კონსტანტით ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას შემდეგნაირად იღებს: s კონსტანტის შინაარსული მნიშვნელობა არის რაღაც ინდივიდი ინდივიდთა რაღაც D სიმრავლიდან, რომელიც წინასწარ უნდა იყოს განსაზღვრული (აქ D სიმრავლეთა თეორიის სიმრავლური დისკურსის მსგავსი ცნებაა და ხშირად მას ასეც მოიხსენიებენ). დავუშვათ, რომ D არის ყველა ადამიანთა სიმრავლე (მხედველობაში გვაქვს როგორც დღეს არსებული, ისე დღევანდლამდე არსებული ადამიანების სიმრავლე), ხოლო ამ სიმრავლის ის ინდივიდი, რომელიც s კონსტანტით აღინიშნება, არის **სოკრატე**. დავუშვათ ისიც, რომ H პრედიკატის სემანტიკური ანუ შინაარსული მნიშვნელობა არის D სიმრავლიდან აღებული ინდივიდების რაღაც სიმრავლე – ვთქვათ, {სოკრატე, არისტოტელე, პლატონი, მოცარტი, ბეთჰოვენი}. ასეთ შემთხვევაში $H(s)$ გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა იქნება ჭეშმარიტი, გამომდინარე იმ ფაქტიდან, რომ ინდივიდი, რომელიც შეესაბამება s კონსტანტას, არის იმ სიმრავლის წევრი, რომელიც შეესაბამება H პრედიკატს. მეორე მხრივ, H პრედიკატის შინარსული მნიშვნელობა რომ ყოფილიყო სიმრავლე {მალერი, პრუსტი, მიქელანჯელო}, $H(s)$ მიიღებდა მნიშვნელობად მცდარს, რადგან სოკრატე ამ უკანასკნელი სიმრავლის წევრი არ არის.

გამოსახულების სემანტიკური მნიშვნელობის აღსანიშნად ჩვენ ვიყენებთ ორმაგ კვადრატულ ფრჩხილებს. ამგვარად, ამ შეთანხმებით, წინა მაგალითი შემდეგნაირად აღიწერება: [[s]] =სოკრატე, [[H]]={სოკრატე, არისტოტელე, პლატონი, მოცარტი, ბეთჰოვენი}, და [[H(s)]]=1.

D არეზე L ორადგილიანი პრედიკატის სემანტიკური მნიშვნელობა არის D სიმრავლის ინდივიდებისაგან შედგენილი **დალაგებული წყვილების სიმრავლე** (ე. ი. D×D სიმრავლის რაღაც ქვესიმრავლე). ამასთან, გამონათქვამი L(j,m) ჭეშმარიტად მიიჩნევა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ინდივიდთა დალაგებული ‹x,y› წყვილი შედის ამ სიმრავლეში და თუ, ამავდროულად, x არის j კონსტანტის სემანტიკური მნიშვნელობა, y კი m კონსტანტისა. მაგალითად, თუ [[j]] არის 'ჯონ დონი' და [[m]] არის 'შოტლანდიის დედოფალი მერი', მაშინ L(j,m) იქნება ჭეშმარიტი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ წყვილი ‹ჯონ დონი, შოტლანდიის დედოფალი მერი› შედის იმ სიმრავლეში, რომელიც არის L პრედიკატის სემანტიკური მნიშვნელობა. – წინააღმდეგ შემთხვევაში L(j,m) მცდარია. ზოგადად, ნებისმიერი K ორადგილიანი პრედიკატისა და a და b ტერმებისათვის [[K(a,b)]]=1 მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა ‹[[a]],[[b]]›∈[[K]].

პრედიკატულ ლოგიკაში ნებისმიერი გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა დამოკიდებულია დისკურსის არეზე და ამ არეზე კონსტანტებისა და პრედიკატებისთვის შერჩეულ სემანტიკურ მნიშვნელობებზე. როცა ეს ყველაფერი სრულადაა განსაზღვრული, ჩვენ ვამბობთ, რომ აგებულია პრედიკატული ლოგიკის **მოდელი**[1]. უფრო ზუსტად, პრედიკატული ლოგიკის ნებისმიერი მოდელი შედგება D სიმრავლისა და F ფუნქციისგან, რომელიც მნიშვნელობად ანიჭებს:

(I)	ყოველ ინდივიდურ კონსტანტას	D სიმრავლის რაღაც ელემენტს;
(II)	ყოველ ერთადგილიან პრედიკატს	D სიმრავლის რაღაც ქვესიმრავლეს;
(III)	ყოველ ორადგილიან პრედიკატს და საზოგადოდ,	D×D სიმრავლის რაღაც ქვესიმრავლეს;
(IV)	ყოველ n-ადგილიან პრედიკატს	$\underbrace{D\times D\times \ldots \times D}_{n}$ სიმრავლის ქვესიმრავლეს (ე.ი. D სიმრავლიდან აღებული ინდივიდებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეულების რაღაც სიმრავლეს).

ამგვარად, პრედიკატულ ლოგიკაში ისეთი გამონათქვამები, როგორიცაა H(s) ან L(j,m) არ არიან საზოგადოდ ან ჭეშმარიტი, ან მცდარი, არამედ ისინი შეიძლება იყონ ან ჭეშმარიტი, ან მცდარი გარკვეულ, კერძოდ განსაზღვრულ **M მოდელში**. თუ გვსურს იმ გარემოების ხაზგასმა, რომ სემანტიკური მნიშვნელობა განიხილება არა საზოგადოდ, არამედ რომელიღაცა კერძოდ განსაზღვრულ M მოდელში, შეგვიძლია მოდელის სახელი მივუთითოთ ზემოშემოთავაზებულ აღნიშვნაში ზედა ინდექსით, მაგ.: $[[H(s)]]^M$ =1, $[[s]]^M$ =სოკრატე. ირკვევა, რომ გარკვეული გამონათქვამები არიან ან ჭეშმარიტნი, ან მცდარნი მიუხედავად არჩეული მოდელისა და ასეთი გამონათქვამები პრედიკატულ ლოგიკაში **ტავტოლოგიურ (ზოგადმართებულ)**, შესაბამისად **კონტრადიქციურ (ზოგადმცდარ, წინააღმდეგობრივ) გამონათქვამებად (ფორმულებად)** იწოდებიან. რამდენადაც პრედიკატთა ლოგიკაში კავშირები &, ∨ (და სხვ.) ისევე განისაზღვრებიან, როგორც გამონათქვამთა ლოგიკაში, ცხადია, რომ გამონათქვამი H(s)∨~H(s) ამ ლოგიკურ სისტემაში ტავტოლოგიური ანუ ზოგადმართებული

[1] **რედაქტორის შენიშვნა:** ბევრი ავტორი, ასეთ შემთხვევაში, ნაცვლად ტერმინისა **მოდელი** იყენებს ტერმინს **ინტერპრეტაცია**. ასეთ ავტორებთან ტერმინი **მოდელი** გამოყენებულია **არაწინააღმდეგობრივი ინტერპრეტაციების** აღსანიშნავად.

გამონათქვამია, ხოლო H(s)&~H(s) კი – კონტრადიქციური ანუ ზოგადმცდარი. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, როგორიც არ უნდა იყოს მოცემული მოდელი, H(s) და ~H(s) გამონათქვამებს ექნებათ ურთიერთსაწინააღმდეგო ჭეშმარიტული მნიშვნელობები და ამიტომ H(s)∨~H(s) ნებისმიერ მოდელში ჭეშმარიტი ფორმულა გამოდის. ისეთი გამონათქვამები, როგორებიცაა H(s) ან L(j,m), რომელთა ჭეშმარიტული მნიშვნელობები იცვლება მოდელებისდა მიხედვით, იწოდებიან **კონტიგენტურ** ანუ **ორმხრივშესრულებად** გამონათქვამებად. პრედიკატულ ლოგიკაში არსებობს ისეთი ტავტოლოგიური და კონტრადიქტული გამონათქვამები, რომლებიც ზემოგანხილული H(s)∨~H(s) და H(s)&~H(s) ფორმულებისგან განსხვავებით არ არიან გამონათქვამთა ლოგიკის შესაბამისი ტავტოლოგიებისა და კონტრადიქციების მარტივი პირდაპირი შედეგი.

კვანტიფიცირებულ ანუ კვანტორებიან გამოსახულებათა სემანტიკა რამდენადმე უფრო რთულია, ვიდრე მხოლოდ პრედიკატებისა და ტერმებისაგან შედგენილი გამოსახულებების სემანტიკა. ამჯერად მხოლოდ ზოგადად მიმოვიხილავთ ამ საკითხებს, რომლებსაც მკაცრი ფორმალური თვალსაზრისებით მე-13 თავში გავეცნობით.

ფორმულა, რომელშიც ყველა ცვლადი დაბმულია, როგორიცაა მაგალითად (∀x)H(x) ან (∃y)L(m,y), არის გამონათქვამი და, შესაბამისად, ნებისმიერ კერძოდ აღებულ მოდელში იგი არის ან ჭეშმარიტი, ან მცდარი. ასეთი გამონათქვამები, როგორც წესი, აგებულნი არიან ცვლადებ მიწერილი კვანტორებისა და ღია გამონათქვამებისაგან (მაგ.: H(x) ან L(m,y)), რომლებიც, იქიდან გამომდინარე, რომ არ არიან გამონათქვამები, არცერთი ცალსახად განსაზღვრული ჭეშმარიტული მნიშვნელობით არ ხასიათდებიან. მიუხედავად ამისა, ჩაკეტილი ანუ კვანტიფიცირებული გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დადგენისას ჩვენ წინასწარ ვითვლით შესაბამისი ღია გამონათქვამის ანუ პროპოზიციული ფუნქციის სხვადასხვა ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებს მათში კვანტიფიცირებული ცვლადების ადგილას ამ ცვლადების სხვადასხვა მნიშვნელობების ანუ **D საინტერპრეტაციო არის სხვადასხვა ინდივიდების ჩასმითა და ამ ჩასმის შედეგად მიღებული გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობების გამოთვლით.** მაგალითად, (∀x)H(x) გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დასადგენად x ცვლადს რიგრიგობით მნიშვნელობად ვანიჭებთ D არის თითოეულ ინდივიდს და x ცვლადის ყოველი ასეთი კონკრეტული დამნიშვნელებისათვის ვეძებთ H(x) გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, რომელიც გაიგება ჭეშმარიტად, თუ ამ მოდელში x ცვლადის ეს კონკრეტული [[x]] მნიშვნელობა ამავე მოდელის მიხედვით გააზრებული [[H]] სიმრავლის წევრია და გაიგება მცდარად – წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამასთან, თუ [[x]] შედის [[H]] სიმრავლეში D საინტერპრეტაციო არის (ანუ დისკურსის) **ყველა წევრისათვის (ანუ ინდივიდისათვის)**, მაშინ (∀x)H(x) მიიჩნევა ჭეშმარიტად, ხოლო იმ შემთხვევაში, თუ D დისკურსის რომელიღაც ინდივიდისთვის [[x]]∉[[H]], მაშინ (∀x)H(x) მიიჩნევა მცდარად. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, (∀x)H(x) ჭეშმარიტია (მოცემულ მოდელში) მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა H(x) ჭეშმარიტია D არედან აღებული x ცვლადის თითოეული მნიშვნელობისათვის. შესაბამისად, (∃x)H(x) (მოცემულ მოდელში) ჭეშმარიტია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა H(x) ჭეშმარიტია (ამ მოდელის) D საინტერპრეტაციო არის **ერთი რომელიღაცა ინდივიდისათვის მაინც** (ე.ი მაშინ, როცა x ცვლადი მნიშვნელობად ამ ერთ რომელიღაცა ინდივიდს იღებს).

განვიხილოთ ერთი ნაწილობრივ აღწერილი მოდელი. იგულისხმება, რომ ამ მოდელში მნიშვნელობები იმ პრედიკატებსა და ტერმებსაც აქვთ, რომლებიც არა არიან ცხადად მითითებულნი, მაგრამ სიმარტივისთვის ჩვენ მათ აქ უგულვებელვყოფთ.

(7-6) ვთქვათ:

D={სოკრატე, არისტოტელე, პლატონი, მოცარტი, ბეთჰოვენი, ტოლსტოი}

F(s) = სოკრატე F(m) = მოცარტი

F(a) = არისტოტელე F(b) = ბეთჰოვენი
F(p) = პლატონი F(t) = ტოლსტოი
F(H) = {სოკრატე, არისტოტელე, პლატონი}
F(M) = {სოკრატე, არისტოტელე, პლატონი, მოცარტი, ბეთჰოვენი, ტოლსტოი}=D
F(L) = {‹სოკრატე, სოკრატე›, ‹სოკრატე, არისტოტელე›, ‹მოცარტი, ბეთჰოვენი›, ‹ბეთჰოვენი, მოცარტი›, ‹ტოლსტოი, პლატონი›, ‹პლატონი, მოცარტი›, ‹არისტოტელე, ტოლსტოი›}

მკითხველს ახლა შეუძლია თავად შეამოწმოს, რომ შემდეგი გამონათქვამები (და არა მხოლოდ ისინი) ამ მოდელში ჭეშმარიტი გამონათქვამებია:

H(s), H(a), H(p), M(s), M(b), L(s, s), L(t, p)

ხოლო შემდეგი გამონათქვამები კი – მცდარი:

H(m), H(b), H(t), L(a, s), L(m, m)

გამონათქვამი (∀x)M(x) ამ მოდელში ჭეშმარიტია, რადგან M(x) ჭეშმარიტია იმისდა მიუხედავად, თუ D სიმრავლის წევრთაგან რომელს მიიღებს მნიშვნელობად x ცვლადი, ე. ი. აღწერილ მოდელში ჭეშმარიტია M(x) ფორმულის ყველა შესაძლო M(s), M(a), M(p), M(m), M(b) და M(t) კერძო შემთხვევა x ცვლადის ყველა შესაძლო კერძო მნიშვნელობისათვის. ასევე ჭეშმარიტია (∃x)H(x) გამონათქვამი, რადგან ამ მოდელში, ცხადია, რომ H(x) ჭეშმარიტია x ცვლადის ერთი მაინც მნიშვნელობისათვის. კერძოდ, ის ჭეშმარიტია, როცა [[x]] არის ან სოკრატე, ან არისტოტელე, ან პლატონი. განსაკუთრებული ყურადღება მიაქციეთ იმ გარემოებას, რომ ის მნიშვნელობები, რომლებსაც x იღებს, არის D სიმრავლის ინდივიდები (წევრები) და არა ენის კონსტანტური ასოები – s, a, p და სხვ.. ასევე ადვილი დასანახია, რომ თუკი (∀x)M(x) ჭეშმარიტია (და დისკურსის არე არაა ცარიელი), მაშინ ჭეშმარიტი იქნება ასევე (∃x)M(x).

გამონათქვამი (∃y)L(m,y) ჭეშმარიტია, რადგან არსებობს y ცვლადის ერთი მაინც ისეთი მნიშვნელობა (კერძოდ, ბეთჰოვენი), რომ დალაგებული წყვილი ‹მოცარტი, [[y]]› შედის ამ მოდელით L მიმართებისთვის მონიშნულ სიმრავლეში, ე. ი. [[L]] სიმრავლეში. მაგრამ (∀y)L(m,y) მცდარია, რადგან y ცვლადის ყველა მნიშვნელობისთვის წყვილი ‹მოცარტი, [[y]]› არ შედის [[L]] სიმრავლეში (მაგალითად, ‹მოცარტი, სოკრატე› წყვილი არაა ამ სიმრავლეში).

ზემოგანხილული გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობების დადგენის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ჩვეული გზით - პროპოზიციული კავშირების ჭეშმარიტული ცხრილების გამოყენებით - განვსაზღვროთ ისეთი რთული გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობებიც, როგორებიცაა (H(s)&H(m)), ((∀x)M(x)∨H(a)) და (H(p)→(∃y)L(m,y)). მკითხველი დარწმუნდება, რომ მოცემულ მოდელში ეს სამი გამონათქვამი შესაბამისად არის მცდარი, ჭეშმარიტი და ჭეშმარიტი.

ასეთი ტრივიალური არაა (∃x)(H(x)&M(x)) გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის განსაზღვრა, რომელშიც ლოგიკური კავშირი შედის კვანტორის მოქმედების არეში. არსებობის კვანტორით კვანტიფიცირებული გამონათქვამების მნიშვნელობის განსაზღვრის წესის თანახმად, ჩვენ უნდა დავადგინოთ, D სიმრავლეში არსებობს თუ არა x ცვლადის ისეთი მნიშვნელობა, რომელზედაც რთული პროპოზიციული ფუნქცია H(x)&M(x) ჭეშმარიტ მნიშვნელობას ღებულობს. ჩვენ x ცვლადს მნიშვნელობად უნდა მივანიჭოთ D არის თითოეული ინდივიდი ცალ-ცალკე და გავარკვიოთ, არის თუ არა ერთდროულად ორივე, H(x) და M(x), რომელიმე მათთაგანისათვის ჭეშმარიტი. გასაგებია, რომ თუ ერთი მაინც ასეთი

მნიშვნელობა ვიპოვეთ, მაშინ $(\exists x)(H(x)\&M(x))$ იქნება ჭეშმარიტი. გასაგებია ისიც, რომ წინააღმდეგ შემთხვევაში, იგი იქნება მცდარი. მოცემულ მოდელში ეს ფორმულა ჭეშმარიტია, რამდენადაც არსებობს სამი ისეთი ინდივიდი — სოკრატე, არისტოტელე და პლატონი — რომელიც ერთდროულად არის [[H]] და [[M]] სიმრავლეების წევრი. მეორე მხრივ, $(\forall x)(H(x)\&M(x))$ მცდარია; ყველა ინდივიდი არ არის ერთდროულად [[H]] და [[M]] სიმრავლეების წევრი. თუმცა, ამ მოდელში $(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$ ჭეშმარიტია, რამდენადაც განსახილველ მოდელში x ცვლადისათვის არ მოიძებნება ისეთი მნიშვნელობა, რომელზედაც $(H(x)\rightarrow M(x))$ ფორმულა მნიშვნელობად ღებულობს მცდარ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, რაც, თავის მხრივ, იმას ნიშნავს, რომ განხილულ მოდელში არ არსებობს ისეთი ინდივიდი, რომელიც შედის [[H]] სიმრავლეში, მაგრამ არ შედის [[M]] სიმრავლეში.

ამოცანა: იპოვეთ აღწერილ მოდელში $(\forall x)(L(m,x)\rightarrow H(x))$ და $(\forall x)(L(m,x)\rightarrow M(x))$ გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები?

გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობების დადგენა განსაკუთრებით რთულდება იმ გამონათქვამებისათვის, რომლებშიც ზოგიერთი კვანტორი შედის სხვა კვანტორების მოქმედების არეში. თუმცა, ამ შემთხვევაშიც, ზოგადი წესები ძალაშია, მაგრამ ასეთი გამონათქვამების მნიშვნელობა ისაზღვრება, ასე ვთქვათ, გარედან შიგნით დამუშავების პრინციპით. მაგალითად, $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ ჭეშმარიტი იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ D სიმრავლეში x ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გამოსახულება $(\exists y)L(x,y)$ იქნება ჭეშმარიტი. როდისაა ეს უკანასკნელი ჭეშმარიტი? — თუ არსებობს y ცვლადის ერთი ისეთი მნიშვნელობა მაინც, რომლისთვისაც $L(x,y)$ არის ჭეშმარიტი, და ამ შემთხვევაში ვგულისხმობთ, რომ x ცვლადს აქვს წინა ბიჯით მინიჭებული მნიშვნელობა; ე.ი. x ცვლადს მნიშვნელობად რიგრიგობით ვანიჭებთ D სიმრავლის თითოეულ ინდივიდს და x ცვლადის თითოეული ასეთი მნიშვნელობისათვის ვადგენთ $(\exists y)L(x,y)$ გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას იმით, რომ y ცვლადის ადგილას რიგრიგობით ვსვამთ D სიმრავლის თითოეულ ინდივიდს. ამასთან, საზოგადოდ ცხადია, რომ x ცვლადის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის $(\exists y)L(x,y)$ შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი, ხოლო ზოგიერთი დანარჩენისთვის მცდარი, თუმცა გამონათქვამი $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ ჭეშმარიტია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $(\exists y)L(x,y)$ ჭეშმარიტია D არიდან აღებული x ცვლადის ყველა შესაძლო მნიშვნელობისათვის.

მოცემულ მოდელში $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ ჭეშმარიტია. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, დავუშვათ, რომ x არის სოკრატე[1]; მაშინ $(\exists y)L(x,y)$ იქნება ჭეშმარიტი, როცა y არის სოკრატე ან არისტოტელე. თუ x არის არისტოტელე, მაშინ $(\exists y)L(x,y)$ იქნება ჭეშმარიტი, როცა y არის ტოლსტოი, და ა. შ.. საბოლოოდ ჩვენ ვნახავთ, რომ x ცვლადის ყოველი კონკრეტული მნიშვნელობისათვის მოიძებნება y ცვლადის ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც $L(x,y)$ გამონათქვამს ჭეშმარიტ გამოსახულებად აქცევს. ან, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, D სიმრავლის თითოეული წევრი ერთხელ მაინც გვხვდება პირველ წევრად დალაგებულ წყვილთა L სიმრავლის რომელიმე წევრში. ამდენად, $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ ჭეშმარიტია ამ მოდელში.

მეორე მხრივ, ამ მოდელში $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$ მცდარია. ეს ფორმულა ჭეშმარიტი იქნებოდა, y ცვლადის ერთი ისეთი მნიშვნელობა მაინც რომ არსებობდეს, რომლისთვისაც $(\forall x)L(x,y)$ იქნებოდა ჭეშმარიტი, ანუ რომ არსებობდეს D სიმრავლის ერთი მაინც ისეთი წევრი (ინდივიდი), რომელიც დალაგებულ წყვილთა L სიმრავლეში არის ისეთი წყვილების მეორე წევრი (კომპონენტი), რომელთა პირველი წევრების (კომპონენტების) ერთ სიმრავლედ

[1] **რედაქტორის შენიშვნა:** ეს მსჯელობა იქნებოდა უფრო კორექტული, რომ ყოფილიყო: მაშინ $(\exists y)L(x,y)$ იქნება ჭეშმარიტი, რადგან ამ შემთხვევაში როცა y არის სოკრატე ან არისტოტელე $L(x,y)$ ჭეშმარიტია, თუ x არის არისტოტელე, მაშინაც $(\exists y)L(x, y)$ იქნება ჭეშმარიტი, რადგან ამ შემთხვევაში როცა y არის ტოლსტოი $L(x,y)$ ჭეშმარიტია და ა. შ..

გაერთიანება მთლიან D სიმრავლეს იძლევა. [[L]] სიმრავლის გადამოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასეთი ინდივიდი არ არსებობს, ამდენად ამ მოდელში $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$ მცდარია.

ეს ბოლო ორი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ გამოსახულებაში შინაარსულად შეიძლება არსებითიც იყოს კვანტორთა რიგითობა, როცა ერთი მათგანი ზოგადობის, მეორე კი - არსებობის კვანტორია. ერთი სიტყვით, შესაძლოა არსებობდნენ ისეთი მოდელები, რომლებშიც ერთი რომელიღაც გამონათქვამი ჭეშმარიტია, ხოლო მეორე - კვანტორთა შებრუნებული რიგით აგებული - მცდარი. ის, რომ ეს მართლაც ასეა, თვალნათლივ გამოჩნდება, თუკი ავიღებთ უფრო ბუნებრივ მოდელს. ვთქვათ, D არის ყველა ცოცხალი ადამიანების სიმრავლე და $L=\{\langle x,y\rangle | x$ს უყვარს yი$\}$. მაშინ $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ ჭეშმარიტი იქნება იმ შემთხვევაში, თუ ყოველი ადამიანისათვის არსებობს ერთი მაინც ისეთი ადამიანი, რომელიც მას უყვარს, მაგრამ $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$ ჭეშმარიტი მხოლოდ იმ შემთხვევაში იქნებოდა, თუ იარსებებდა ერთი ისეთი ადამიანი მაინც, რომელიც ყველას ეყვარებოდა. ადვილი დასანახია, რომ შეზღუდულ ბუნებრივ მოდელებში პირველი გამონათქვამი როგორც წესი ჭეშმარიტია, ხოლო მეორე გამონათქვამი კი პირიქით - როგორც წესი მცდარია.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია ვნახოთ, თუ როგორ ითარგმნება ბუნებრივი ენის ფრაზები პრედიკატული ლოგიკის ენაზე. მაგალითად, გამონათქვამისთვის **ყველა კატა არის ძუძუმწოვარა (All cats are mammals)** ჩვენ დაგვჭირდება ერთადგილიანი პრედიკატები, ვთქვათ C და M, იმისათვის რომ შევუსაბამოთ ისინი ფრაზებს **არის კატა (is cat)** და **არის ძუძუმწოვარა (is mammal)**. ამის შემდეგ განსახილველი გამონათქვამი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც $(\forall x)(C(x)\rightarrow M(x))$, რომელიც დაახლოებით ასე შეიძლება გაჟღერდეს: განსაზღვრის არეში შემავალი ყველა ინდივიდისთვის, თუ ეს ინდივიდი არის კატა, მაშინ ის ძუძუმწოვარაცაა; ან, უფრო მოკლედ, ყველაფერი, რაც კი კატაა, ძუძუმწოვარაცაა. მიაქციეთ ყურადღება, რომ პრედიკატული გამოთვლის ენაში გაკეთებულ ჩვენს თარგმანში ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია მაშინაც, როცა განსაზღვრის არეში საერთოდ არ არიან კატები, რადგან ასეთ შემთხვევაში x ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის $C(x)$ იქნება მცდარი და, ამდენად, მთლიანი პირობითი გამონათქვამი ცხადია იქნება ჭეშმარიტი. ამავე პრინციპით გამონათქვამი **არცერთი კატა (არ) არის ძუძუმწოვარა (No cats are mammals)** ითარგმნება როგორც $(\forall x)(C(x)\rightarrow\sim M(x))$: ყველა ის, რაც არის კატა, ამცდარებს იმას, რომ ის არის ძუძუმწოვარა. ეს გამონათქვამიც ჭეშმარიტია, როცა განსაზღვრის არეში საერთოდ არ არიან კატები და ეს განსხვავებით შესაბამისი ბუნებრივ ენობრივი ფრაზისგან, რომელიც ასეთ შემთხვევაში ჩაითვლებოდა უადგილოდ ან უაზროდ. — ამგვარად, ჩვენ კვლავ ვხვდებით ნაცნობ სიტუაციას, კერძოდ კი სიტუაციას, როცა ბუნებრივ ენობრივი გამონათქვამები და მათი უახლოესი ლოგიკური შესაბამისები არასრულად ეთანხმებიან ერთმანეთს.

რედაქტორის შენიშვნა: ჩვენი მიდგომებით, რომლებიც ზემოგანხილული თვალსაზრისებით პრინციპულად განსხვავდებიან აქ წარმოდგენილი მიდგომებისაგან, წინადადება **ყველა კატა ძუძუმწოვარაა** შეზღუდულკვანტორებიანი პრედიკატული ლოგიკის ენაზე ითარგმნება, როგორც $\forall x_{x\in C}$**:M(x)**, სადაც C={კატა}, M კი არის **ძუძუმწოვარაა** მიმართება ანუ ფაქტიურად იგივე, რაც წინა მაგალითში, ხოლო **ყველა კატა არის ძუძუმწოვარა,** ითარგმნება როგორც $\forall x_{x\in C}$**:(x∈M)**, სადაც უკვე M არის სიმრავლე, რომელსაც ჩვენ შემდეგნაირად აღვნიშნავთ {ძუძუმწოვარა}. შემდეგში შეზღუდული კვანტორებისთვის ნაცვლად ჩანაწერისა $\forall x_{x\in C}$ ჩვენ, ზოგჯერ, გამოვიყენებთ ჩანაწერს **∀x∈C.** ამგვარად, ზედა თარგმანი ამ გამარტივებული მიდგომებით შემდეგნაირად ჩაიწერება **∀x∈C:M(x)**, შესაბამისად **∀x∈C:(x∈M)**. – დავსვათ კითხვა: გარდა იმისა, რომ ჩვენ ვსარგებლობთ შეზღუდულკვანტორებიანი მიდგომებით, რით არის განპირობებული შემოთავაზებულ და ჩვენეულ მიდგომებს შორის ასეთი ფუნდამენტური განსხვავებები? – განვიხილოთ ასეთი წინადადება **თუ რაიმე (ე.ი. სრულიად ნებისმიერი ინდივიდი) კატაა, მაშინ ის (ე.ი. ეს რაიმე) ძუძუმწოვარაცაა.** ჩვენი მიდგომებით ეს წინადადება

იმ მათემატიკურ თარგმანში, რომელიც ეყრდნობა აღნიშვნათა იგივე სისტემას, რომელსაც ვიყენებდით, იძლევა $C(x)\rightarrow M(x)=t$ ცვლადზე დამოკიდებულ ტოლობას და ეს იმიტომ, რომ (1) ამ წინადადებაში სიტყვა **რაიმე** ენობრივ რეალიზებას უკეთებს დისკურსის ანუ ნაგულისხმევი კონტექსტის უნივერსუმზე განსაზღვრულ შეუზღუდავ ცვლადს და (2) ეს წინადადება, როგორც თხრობითი წინადადება ნაგულისხმევობით გვეწოდება როგორც ფაქტობრივად ჭეშმარიტი გამონათქვამი. ანუ, ფაქტიურად, იგი გაგებულია **ჭეშმარიტებაა ის, რომ თუ რაიმე (ე.ი. სრულიად ნებისმიერი ინდივიდი) კატაა, მაშინ ის (ე.ი. ეს რაიმე) ძუძუმწოვარაცაა** წინადადების ბუნებრივ შინაარსულ შემოკლებულ სახედ. ახლა, თუ დისკურსის ანუ კონტექსტის უნივერსუმს აღვნიშნავთ U სიმბოლოთი და იმის აღსანიშნავად, რომ x ცვლადი განსაზღვრულია U სიმრავლეზე გამოვიყენებთ $x\in U$ ჩანაწერს ზედა თარგმანის უფრო სრული ფორმალური სახე იქნება $x\in U{:}C(x)\rightarrow M(x) = t$. ამ მიდგომებით, წინადადება (I) – **ჭეშმარიტებაა ის, რომ ნებისმიერი რამ, რაც კი არსებობს, თუ კატაა, მაშინ ის ძუძუმწოვარაცაა** თარგმანში მოგვცემდა $\forall x\in U{:}C(x)\rightarrow M(x)=t$ ფორმულას, რომლის, შეიძლება ითქვას, ენთინემური ანუ ნაგულისხმევი ანუ ელიფსისური ანუ შემოკლებული სახეა ფორმულა $(\forall x)(C(x)\rightarrow M(x))$. ანუ, სახელმძღვანელოთი შემოთავაზებული კლასიკური მიდგომებით წინადადება **ყველა კატა ძუძუმწოვარაა** გაიგივებულია წინადადებასთან (II) – **ნებისმიერი რამ, რაც კი არსებობს, თუ კატაა, მაშინ ის ძუძუმწოვარაცაა,** რაც, რა თქმა უნდა, მკაცრი ენობრივ-ლოგიკური თვალსაზრისებით არასრული ადეკვატიზაციაა ენობრივად არსებული ლოგიკური ვითარებისა. – ამგვარად, ცალსახად შეიძლება ითქვას, რომ ჩვენეული მიდგომები, რომლებიც ბუნებრივი ქართული ენის ზოგად ლოგიკურ-ლინგვისტურ თავისებურებებს ეყრდნობა, ბევრად უფრო მეტი ადეკვატურობით იძლევა ენობრივი შინაარსების მათემატიკურ თარგმანებს ვიდრე ზემოგანხილული კლასიკური მიდგომები. – განვიხილოთ შემდეგი წინადადებები და მათი მათემატიკური თარგმანები: **(I*) – ჭეშმარიტებაა ის, რომ თუ რაიმე ცხოველი (ე.ი. სრულიად ნებისმიერი ცხოველი) კატაა, მაშინ ის (ე.ი. ეს რაიმე ცხოველი) ძუძუმწოვარაცაა. (II*) – ნებისმიერი ცხოველი, რაც კი არსებობს, თუ კატაა, მაშინ ის ძუძუმწოვარაცაა.** ჩვენი მიდგომებით (I*) წინადადების მათემატიკური თარგმანია $\mathbf{x\in\{ცხოველი\}\subset U{:}C(x)\rightarrow M(x)=t}$, რომელიც (I) წინადადების მათემატიკური თარგმანისაგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ (I*) თარგმანში $\mathbf{x}$ ცვლადი **{ცხოველი}** სიმრავლით შეზღუდული ცვლადია, მაშინ როდესაც (I) თარგმანში იგივე $\mathbf{x}$ ცვლადი განსაზღვრულია მთლიან $\mathbf{U}$ სიმრავლეზე, რაც, ბუნებრივია, ამ მიდგომების სასარგებლოთ მეტყველებს, რადგან წმინდა ენობრივ-ლოგიკური თვალსაზრისებითაც (I*) წინადადება არის უფრო ზოგადი შინაარსის მქონე (I) წინადადების კერძო ანუ შეზღუდული ფორმა **{ცხოველი}** სიმრავლით მოცემულ უნივერსუმზე. ანალოგიურად ზემოგანხილულისა, გასაგებია, რომ (II*) წინადადების ჩვენეული თარგმანი $\mathbf{\forall x\in\{ცხოველი\}\subset U{:}C(x)\rightarrow M(x)=t}$ არის (II) წინადადების ჩვენეულივე თარგმანის ისეთი კერძო შეზღუდული ფორმა, როგორც თავად (II*) წინადადებაა (II) წინადადებასთან მიმართებაში. – ამგვარად, ჩვენეული მიდგომები აშკარად ადასტურებენ იმას, რომ მათემატიკური ცვლადის იდეა არა თუ უცხოა, არამედ, შეიძლება ითქვას, რომ ერთ-ერთი სასაფუძვლო შემადგენელია ქართული ენობრივ-ლოგიკური წესთწყობისა და ამ წესთწყობით მოცემული აზროვნებითი წესრიგისა. უფრო მეტიც, დადასტურებულად შეიძლება ითქვას, რომ ქართული ენობრივი აზროვნება ფუნდამენტურად ეყრდნობა არათუ მხოლოდ შეუზღუდავი ცვლადის პრიმიტიულ მათემატიკურ იდეას, არამედ იგი ცნობს და სახელური ფრაზებით მაქსიმალურად დახვეწილადაც იყენებს შეზღუდული ცვლადების რთულ მათემატიკურ სისტემას.

ზოგიერთი კატა არის ძუძუმწოვარა (Some cats are mammals) შეიძლება ითარგმნოს როგორც $(\exists x)(C(x)\&M(x))$, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა განსაზღვრის არეში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ინდივიდი, რომელიც კატაც არის და ძუძუმწოვარაც. ამ შემთხვევაში თუკი განსაზღვრის არეში არ იქნება არცერთი კატა, პრედიკატული ლოგიკის ეს გამონათქვამი მცდარი იქნება, შესაბამის ბუნებრივ ენობრივ გამონათქვამზე კი შეგვეძლო გვეთქვა, რომ მისი ამოსავალი პირობა არასრულყოფილია (ყველა მისგან გამომდინარე შედეგით). უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ფრაზის თარგმანად არ გამოდგება $(\exists x)(C(x)\rightarrow M(x))$ – ანუ ისეთივე პირობითი გამოსახულება, როგორიც განზოგადებული გამონათქვამის დროს გამოვიყენეთ. ეს ფორმულა ჭეშმარიტია, როცა არ არსებობს არც ერთი კატა (ანტეცედენტი ანუ წინაპირობა ყოველთვის მცდარია) ან როცა არსებობს ერთი მაინც

ძუძუმწოვარა (კონსეკვენტი ანუ დასკვნა ჭეშმარიტია). — მართალია, ჩვენ ვეგუებით იმას, რომ ბუნებრივ ენობრივი ფრაზა და მისი ლოგიკური თარგმანი ზუსტად არ ემთხვევა ერთმანეთს, მაგრამ იმას მაინც არ უნდა შევეგუოთ, რომ გამონათქვამები **ზოგიერთი კატა ძუძუმწოვარაა (Some cats are mammals)** და **ან არ არსებობს არც ერთი კატა ან არსებობს ერთი მაინც ძუძუმწოვარა (Either there are no cats or there is at least one mammal)** ერთნაირად ითარგმნებოდეს ლოგიკის ენაზე[1].

> **რედაქტორის შენიშვნა:** ჩვენი მიდგომები თითქმის მთლიანად აწესრიგებს ზემოთ წარმოქმნილ უხერხულობებს: ასე მაგალითად, ჩვენთან, წინადადება **ზოგიერთი კატა ძუძუმწოვარაა** თარგმანში იძლევა ფორმულას $\forall x_{x\in C^*\subseteq C}\mathbf{:M(x)}$, ხოლო **ზოგიერთი კატა არის ძუძუმწოვარა** კი – $\forall x_{x\in C^*\subseteq C}\mathbf{:(x\in M)}$ ფორმულას, რომელიც ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს საინტერპრეტაციო სამყაროში განხილული {კატა} სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, რომ მისი ყველა ელემენტი ამავდროულად ძუძუმწოვარაა (არაა გამორიცხული, რომ ეს ქვესიმრავლე ემთხვეოდეს თავად {კატა} სიმრავლეს და არც ის გამოირიცხება, რომ ეს ქვესიმრავლე იყოს ერთელემენტიანი სიმრავლე). ამასთან, თუ ასეთი არაცარიელი C^* ქვესიმრავლე არ არსებობს მაშინ იგი მცდარად ითვლება! – ამგვარად, ჩვენი მიდგომები, რომელიც ქართული ენისათვის მყარად დამახასიათებელი სქემების მკაცრი მათემატიკური ასახვის შედეგად გამოიკვეთა, თარგმანში სრულად ხსნის ზემოთ განხილულ უხერხულობებს. ამ მიდგომებით **ზოგიერთი კატა არაა (არ არის) ძუძუმწოვარა** თარგმანში იძლევა $\forall x_{x\in C^*\subseteq C}\mathbf{:(x\notin M)}$ და $\forall x_{x\in C^*\subseteq C}\mathbf{:\sim M(x)}$ ურთიერთეკვივალენტურ შეზღუდულკვანტორებიან ფორმულებს, რომელთაგან ნებისმიერი ჭეშმარიტია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს C სიმრავლის ისეთი არაცარიელი C^* ქვესიმრავლე, რომ C^* სიმრავლის არცერთი ელემენტი არ არის ძუძუმწოვარა. — რაც შეეხება სახელმძღვანელო კურსით შემოთავაზებულ თარგმანს **ზოგიერთი კატა არის ძუძუმწოვარა** წინადადებისა, უნდა ითქვას, რომ ის ფაქტიურად არის თარგმანი შემდეგი წინადადებისა, **არსებობს რაღაც, რომელიც კატაცა და ძუძუმწოვარაც**. ანუ, მათი მიდგომებით, წინადადებები **ზოგიერთი კატა არის ძუძუმწოვარა** და **ზოგიერთი ძუძუმწოვარა არის კატა** თარგმანში ერთმანეთისაგან არ განირჩევა, მაშინ როდესაც ჩვენი მიდგომებით პირველის თარგმანია $\forall x\in C^*\subset C\mathbf{:(x\in M)=t}$, ხოლო მეორესი კი - $\forall x\in M^*\subset M\mathbf{:(x\in C)=t}$. – ამგვარად, როგორც ჩანს, თუ სახელურ ფრაზებსა და ზმნურ ფრაზებს ლოგიკური თვალსაზრისებით გავაიგივებთ (როგორც ეს ზემოგანხილულ კლასიკურ თარგმანებშია!) და მათ ერთმანეთისაგან განურჩევლად პრედიკატებად დავინახავთ და თუ, შესაბამისად ამისა, ვერ დავინახავთ ენაში

---

[1] **რედაქტორის შენიშვნა:** აქ შემოთავაზებული მსჯელობა მცირედ ცდება კორექტულობის საზღვრებს: მართლაც, იმისათვის, რომ $(\exists x)(C(x)\rightarrow M(x))$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი, საკმარისია არსებობდეს x ცვლადის ერთი მაინც ისეთი $[[x]]$ მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $C([[x]])\rightarrow M([[x]])=1$. – ეს, ერთი მხრივ. მეორე მხრივ კი, $C([[x]])\rightarrow M([[x]])=1$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $C([[x]])=0$ და $M([[x]])=1$ ტოლობებიდან ერთი მაინც ძალისმიერია, ანუ როცა $[[x]]\notin[[C]]$ და $[[x]]\in[[M]]$ გამონათქვამებიდან ერთი მაინც ჭეშმარიტია, ანუ **როცა ერთი მაინც ინდივიდი არ არის კატა და ერთი მაინც ინდივიდი არის ძუძუმწოვარა წინადადებებიდან ერთი მაინც ჭეშმარიტია.** – სხვაგვარად იგივეზე გავდივართ შემდეგნაირი მსჯელობით:

1. $(\exists x)(C(x)\rightarrow M(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\sim C(x)\vee M(x))$ **(გამომდინარეობის განსაზღვრებით)**
2. $(\exists x)(\sim C(x)\vee M(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\sim C(x)\vee(\exists x)M(x)$ **(კვანტორთა დისტრიბუციის 3 კანონით (იხ. შემდეგი პარაგრაფი))**
3. $(\exists x)\sim C(x)\vee(\exists x)M(x))$ გამონათქვამის ენობრივი მეწყვილე კი ცხადია არის, **ან არსებობს ერთი მაინც არაკატა ან არსებობს ერთი მაინც ძუძუმწოვარა** და არა ის, რასაც ზემოთ ავტორები გვთავაზობენ. –როგორც ჩანს წინადადება **ან ერთი მაინც ინდივიდი არ არის კატა, თუარადა ერთი მაინც ინდივიდი არის ძუძუმწოვარა** არის **ერთი მაინც ინდივიდი არ არის კატა და ერთი მაინც ინდივიდი არის ძუძუმწოვარა წინადადებებიდან ერთი მაინც ჭეშმარიტია წინადადების** მოკლე და სრული ტოლძალოვანი. – ამგვარად**, როდესაც ავტორები** $(\exists x)(C(x)\rightarrow M(x))$ გამონათქვამზე გვეუბნებიან, რომ ეს ფორმულა ჭეშმარიტია, როცა არ არსებობს არცერთი კატა (ანტეცედენტი ანუ წინაპირობა ყოველთვის მცდარია), ეს რა თქმა უნდა ასეა, მაგრამ, მეორე მხრივ, ეს ფორმულა ჭეშმარიტია მაშინაც, როცა x ცვლადის განსაზღვრის არეში არის ერთი მაინც ისეთი $[[x]]$ ინდივიდი, რომელიც არ არის კატა (ანუ რომელიც არის არაკატა) და, აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ $(\exists x)(C(x)\rightarrow M(x))$ ფორმულის ჭეშმარიტებასთან მიმართებაში მოთხოვნა იმის თაობაზე, რომ განსაზღვრის არეში საერთოდ არ არსებობდეს კატა (ანუ რომ ამ განსაზღვრის არის ყოველი ელემენტი იყოს არაკატა), მკაცრი ლოგიკური თვალსაზრისებით არც თუ მთლად კორექტული მოთხოვნაა.

კვანტიფიცირებული თუ არაკვანტიფიცირებული სახელური ფრაზებით რეალიზებულ შეზღუდულ ცვლადებსა და კონსტანტებს (ანუ იმას, რასაც ჩვენეული თარგმანები ძირეულად ეყრდნობა!) მაშინ, ცხადია, ვერც იმას დავინახავთ, რომ ბუნებრივი ენა უმჯობესია განხილულ იქნეს არა როგორც კლასიკური პრედიკატული თეორია, არამედ როგორც შეზღუდულკვანტორებიანი პრედიკატული თეორია. – რაც შეეხება იმას, რომ ბუნებრივი ენებისათვის ცვლადისა და კონსტანტის მათემატიკური იდეები უცხო არ არის, ეს ჩვენთვის, გამომდინარე ქართული ენის პირდაპირი ფორმალურ-ლოგიკური აღწერის პირველი შედეგებიდან, არათუ ცხადი, არამედ უკვე დასაბუთებული ჭეშმარიტებაა. – ვიმეორებთ: თუ იმ სახელურ ფრაზებში ანუ იმ ენობრივ მონაცემებში, რომლებიც ბუნებრივ ენობრივ სისტემებში რეალიზებას უკეთებენ ცვლადებსა და კონსტანტებს, პრედიკატებს დავინახავთ, მაშინ, ცხადია, მათი (ე.ი. ამ სახელური ფრაზების) მეშვეობით ენაში არსებული ცვლადებისა და კონსტანტების დანახვა გაგვიჭირდება. – ამ შენიშვნას დავასრულებთ **არსებობს რაღაც, რომელიც კატაც არის და ძუძუმწოვარაც** წინადადების ჩვენეული მათემატიკური თარგმანით, რომელიც უკვე შეთანხმებული აღნიშვნებით შემდეგი ფორმულით გამოისახება: $\exists x \in U: C(x) \& M(x)$ (აქ **U** სიმბოლოთი აღნიშნულია ნაგულისხმევი დისკურსის უნივერსუმი ანუ ნაგულისხმევი საინტერპრეტაციო განსაზღვრის არე).

7.3 კვანტიფიკაციის კანონები და პრენექსული ფორმა

პრედიკატული ლოგიკის სტანდარტული სიმრავლური სემანტიკების გათვალისწინებით დადგენილია მნიშვნელოვანი იგივეობები, რომლებიც შეიძლება მივიჩნიოთ პრედიკატული ლოგიკის კანონებად. ისინი ფართოდ გამოიყენება მტკიცებათა აგების დროს და, ასევე, იმ ფორმულების ამოსაცნობად, რომლებიც არიან ბუნებრივი ენის წინადადებების მათემატიკური თარგმნითი ტოლძალოვნები, მაგრამ განსხვავდებიან მათგან ზოგადი სტრუქტურული თვალსაზრისებით[1]. ნებისმიერ ფორმულას, რომელიც შეიცავს თუნდაც ერთ თავისუფალ x ცვლადს (მაგ., $H(x)$, $L(x,x)$, $(\forall y)L(x,y)$, $(\exists y)(H(x)\rightarrow L(x,y))$ და ა. შ.) აღვნიშნავთ შემდეგი სახის გამოსახულებით: $\varphi(x)$, $\psi(x)$ და ა. შ..

$(\exists x)\sim\phi(x)$ გამონათქვამის ჭეშმარიტება ნიშნავს და ამტკიცებს იმას, რომ არსებობს ერთი მაინც ისეთი ინდივიდი, რომლისთვისაც $\sim\phi(x)$ არის ჭეშმარიტი; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ამ ინდივიდისთვის $\phi(x)$ მცდარია. ამდენად, ასეთ პირობებში, გასაგებია, რომ $(\forall x)\phi(x)$ არ შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი, რადგან ზოგადობის კვანტორიანი ფორმულის ჭეშმარიტება (ე.ი. უნივერსალურად კვანტიფიცირებული ანუ განზოგადებული გამონათქვამის ჭეშმარიტება) მოითხოვს, რომ მისი $\phi(x)$ მატრიცა x ცვლადის ყველა შესაძლო ინდივიდური მნიშვნელობისთვის იყოს ჭეშმარიტი; შესაბამისად, ვღებულობთ, რომ $\sim(\forall x)\phi(x)$ ჭეშმარიტია.

ეს მსჯელობა შეიძლება გამოვიყენოთ უკუმიმართულებითაც, რაც საბოლოო ჯამში შედეგად იძლევა პირველ კვანტორულ იგივეობას ანუ კვანტიფიკაციის პირველ კანონს:

(7-7) კანონი 1. კვანტიფიცირებული ფორმულის უარყოფა: $\sim(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\sim\phi(x)$

ამ კანონის შემადგენლების შესაბამისი ბუნებრივ ენობრივი ფრაზების ერთ-ერთ წყვილად ინგლისურში განიხილება შემდეგი წინადადებები: **არა ყველამ ჩააბარა გამოცდა (Not everyone passed the test)** და **ვიღაცამ არ ჩააბარა გამოცდა (Someone did not pass the test)**.

[1] **რედაქტორის შენიშვნა:** „ლოგიკისა და ენის გაერთიანებულ ქართულ ჯგუფში'' განვითარებული კვლევების ერთ-ერთი ძირითადი შედეგი არის ის, რომ ჩვენი მიდგომებით ბუნებრივი ენის წინადადებების მათემატიკური თარგმნითი ტოლძალოვნები ზოგადი სტრუქტურული თვალსაზრისებით არსებითად არ განსხვავდებიან მათი ქართულ ენობრივი შესატყვისებიდან, რაც კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი არგუმენტია ქართული და მათემატიკური ენების ჩვენს მიერ უკვე ხაზგასმული ზოგადი ერთტიპობრიობისა.

ორმაგი უარყოფის კანონის გათვალისწინებით (მხედველობაში გვაქვს ის, რომ $\sim\sim\phi \Leftrightarrow \phi$) კანონი 1 შეიძლებოდა ჩაგვეწერა შემდეგი მისი იგივური ფორმებითაც:

(7-8) კანონი 1′ $(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow \sim(\exists x)\sim\phi(x)$
კანონი 1′′ $\sim(\forall x)\sim\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\phi(x)$
კანონი 1′′′ $(\forall x)\sim\phi(x) \Leftrightarrow \sim(\exists x)\phi(x)$

ასევე ადვილად იგება ამ ვარიანტების ბუნებრივ ენობრივი შესატყვისები. ასე მაგალითად, ინგლისურში I′′′ კანონისთვის შეგვეძლო მიგვესადაგებინა **Everyone did not pass the test** (**ყველამ არ ჩააბარა გამოცდა***) (გაგებულია, როგორც ყველა ჩაიჭრა)) და **No one passed the test** (**არავინ ჩააბარა გამოცდა*** (გაგებულია, როგორც ყველა ჩაიჭრა)).

რედაქტორის შენიშვნა: ქართულში $(\forall x)\phi(x)$ სახის ლოგიკური სტრუქტურის მქონე გამონათქვამები ფრაზირდება, როგორც **ყველამ ჩააბარა გამოცდა,** $(\forall x)\sim\phi(x)$ სახის, როგორც **არცერთმა არ ჩააბარა გამოცდა**, $(\exists x)\phi(x)$ სახის, როგორც **ვიღაცამ ჩააბარა გამოცდა,** $(\exists x)\sim\phi(x)$ სახისა კი, როგორც **ვიღაცამ არ ჩააბარა გამოცდა.** ამასთან, ქართულში **ყველამ არ ჩაბარა გამოცდა** გაიგება როგორც $(\exists x)\sim\phi(x)$. ამგვარად, ქართულში დადებით პრედიკატთან **ყველა** გაიგება როგორც ზოგადობის კვანტორი, ხოლო უარყოფით პრედიკატთან ზოგადობის კვანტორის ფუნქციას თავის თავზე იღებს **არცერთი**. ამასთან, **ყველა** უარყოფით პრედიკატთან გაიგება, როგორც არსებობის კვანტორი. ამავდროულად, არსებობის კვანტორის ფუნქციებს ქართულში, როგორც დადებით, ისე უარყოფით პრედიკატებთან, თავის თავზე იღებენ სიტყვები **ვიღაც (ერთი მაინც), რაღაც (ერთი მაინც), რომელიღაც (ერთი მაინც)** და ა.შ.. **არცერთი,** ისევე როგორც **არავინ,** დადებით პრედიკატთან გაიგება როგორც ზოგადობის კვანტორი, მაგრამ იგი, ამავდროულად, უარყოფით შინაარსს სძენს პრედიკატს, რაც, გარკვეული აზრით, იმას ნიშნავს, რომ იგი (ე.ი. **არცერთი**, ისევე როგორც **არავინ**) დადებით პრედიკატებთან საერთოდ არ გაიგება. – ჩვენ ვთლით, რომ უნივერსალური ტიპის უარყოფითი კვანტიფიკატორებისათვის დამახასიათებელი ეს ზემოაღწერილი ვითარება, რითაც ინგლისური ენა სისტემურად ხასიათდება, მიგვანიშნებს ამ ენაში კვანტორების პრედიკატებზე დომინირებას. ხაზგასასმელია ისიც, რომ ეს, ინგლისური ენისათვის ბუნებრივად დამახასიათებელი ვითარება, ცხადია, უნდა ასახულიყო და აისახა კიდეც მონტეგიუსეულ მიდგომებზე, რომლებსაც ამ წიგნის ქართული თარგმანის მეორე ნაკვეთში გავეცნობით (მხედველობაში გვაქვს ბუნებრივ ენობრივი კვანტორების მისეული გაგება). ჩვენ ვთვლით, რომ ამ საკითხებთან მიმართებაში ქართულში დამოკიდებულებანი სარკისებური ანუ ინვერსირებული სახით არის გადაწყვეტილი: კერძოდ, როგორც ჩანს, ქართულისთვის სისტემურია პრედიკატული დომინირება კვანტორულ სიტყვებზე და მათ ფუქციებზე და არა პირიქით. - რაც შეეხება იმ ფაქტს, რომ ინდოევროპულისთვის დამახასიათებელი სქემები ქართულშიც შემოდის (მაგ., **არავინ ჩააბარა გამოცდა, არა ყველამ ჩააბარა გამოცდა**), ამას თავისი მარტივი ახსნა აქვს, მაგრამ ის, რომ ისინი ქართულისთვის მხოლოდ არაძირეულად დამახასიათებელი დამხმარე სქემებია უნდა გვესმოდეს! – რაც შეეხება კვანტიფიცირებული ფორმულების უარყოფის კანონების შესაბამის ფორმალურად უფრო ზუსტ ქართულენობრივ მეწყვილეებს, აქ ჩვენეული მიდგომებით ვლებულობთ:

კანონი 1: $\sim(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\sim\phi(x)$ – **მცდარია ის, რომ ყველამ ჩააბარა გამოცდა**
$\Leftrightarrow$ **ჭეშმარიტია ის, რომ ვიღაცამ არ ჩააბარა გამოცდა;**
კანონი 1′: $(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow \sim(\exists x)\sim\phi(x)$ – **ჭეშმარიტია ის, რომ ყველამ ჩააბარა გამოცდა**
$\Leftrightarrow$ **მცდარია ის, რომ ვიღაცამ არ ჩააბარა გამოცდა;**
კანონი 1′′: $\sim(\forall x)\sim\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\phi(x)$ – **მცდარია ის, რომ არცერთმა არ ჩააბარა გამოცდა**
$\Leftrightarrow$ **ჭეშმარიტია ის, რომ ვიღაცამ ჩააბარა გამოცდა;**
კანონი 1′′′: $(\forall x)\sim\phi(x) \Leftrightarrow \sim(\exists x)\phi(x)$ – **ჭეშმარიტია ის, რომ არცერთმა არ ჩააბარა გამოცდა**
$\Leftrightarrow$ **მცდარია ის, რომ ვიღაცამ ჩააბარა გამოცდა.**

რომელთა მათემატიკურად სიმბოლიზირებული გამარტივებული სახეებია:

კანონი 1: $\sim(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\sim\phi(x)$ – **ყველამ ჩააბარა გამოცდა = f**
$\Leftrightarrow$ **ვიღაცამ არ ჩააბარა გამოცდა = t;**

კანონი 1′: $(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow \sim(\exists x)\sim\phi(x)$ – **ყველამ ჩააბარა გამოცდა = t**
$\Leftrightarrow$ **ვიღაცამ არ ჩააბარა გამოცდა = f;**

კანონი 1″: $\sim(\forall x)\sim\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\phi(x)$ – **არცერთმა არ ჩააბარა გამოცდა = f**
$\Leftrightarrow$ **ვიღაცამ ჩააბარა გამოცდა = t;**

კანონი 1‴: $(\forall x)\sim\phi(x) \Leftrightarrow \sim(\exists x)\phi(x)$ – **არცერთმა არ ჩააბარა გამოცდა = t**
$\Leftrightarrow$ **ვიღაცამ ჩააბარა გამოცდა = f.**

1 კანონისა და ორმაგი უარყოფის კანონის ძალით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ პრედიკატულ ლოგიკაში განხილული ორი კვანტორიდან ნებისმიერი შესაძლებელია განისაზღვროს მეორეთი.

კანონთა შემდეგი ჯგუფი გამონათქვამთა ლოგიკაში & და $\vee$ ლოგიკური კავშირების დისტრიბუციულობის კანონების ანალოგიურია, ოღონდ, აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ მათგან ორი ლოგიკური გამომდინარეობაა და არა ლოგიკური იგივურობა.

(7-9) **კვანტორთა დისტრიბუციის კანონები:**

კანონი 2. $(\forall x)(\varphi(x) \,\&\, \psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \,\&\, (\forall x)\psi(x)$
კანონი 3. $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$
კანონი 4. $(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \Rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$
კანონი 5. $(\exists x)(\varphi(x) \,\&\, \psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x) \,\&\, (\exists x)\psi(x)$

2 კანონის მარცხენა მხარე ჭეშმარიტია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა განსაზღვრის არის ყოველი ინდივიდისთვის ჭეშმარიტია $\varphi(x)\&\psi(x)$; მარჯვენა მხარე ჭეშმარიტია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი ინდივიდისთვის ჭეშმარიტია $\varphi(x)$ და, ამავდროულად, ყოველი ინდივიდისთვის ჭეშმარიტია $\psi(x)$. ეს ორი გამონათქვამი აშკარად იგივური გამონათქვამებია. ანალოგიური განსჯით მკითხველს თავად შეუძლია გადაამოწმოს 3 კანონის სამართლიანობა.

4 კანონის მარცხენა მხარე ჭეშმარიტია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა x ცვლადის განსაზღვრის არის ნებისმიერი ინდივიდისთვის ჭეშმარიტია ან $\varphi(x)$ ან $\psi(x)$. ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი ინდივიდისთვის ჭეშმარიტია $\varphi(x)\vee\psi(x)$, რაც ასაბუთებს მარცხნიდან გამომდინარეობას. ის, რომ ადგილი არ აქვს პირუკუ გამომდინარეობას, დასტურდება შემდეგით: გამონათქვამი, რომლის თანახმადაც განსაზღვრის არის ყოველი ინდივიდი ან მამრობითი ან მდედრობითი სქესისაა, არ განაპირობებს (არ იწვევს) იმას, რომ ამ განსაზღვრის არეში ყველა ინდივიდი მამრობითი სქესისაა და არც იმას, რომ ყველა ინდივიდი მდედრობითი სქესისაა. ახლა უკვე მკითხველი ადვილად მიხვდება, რომ მე-5 კანონიც ანალოგიურად მტკიცდება.

2 და 3 კანონები ასახავენ ძირითად მიმართებებს ზოგადობის კვანტორსა და კონიუნქციასა და, შესაბამისად, არსებობის კვანტორსა და დიზიუნქციას შორის. $(\forall x)\varphi(x)$ ჭეშმარიტია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\varphi(a)$ ჭეშმარიტია და $\varphi(b)$ ჭეშმარიტია და ... , ხოლო $(\exists x)\phi(x)$ ჭეშმარიტია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ან $\varphi(a)$ არის ჭეშმარიტი, ან $\varphi(b)$ არის ჭეშმარიტი, ან ... . – აქ a, b, ... რიგი მოიცავს x ცვლადის განსაზღვრის არის ყველა წევრს. ამდენად, ზოგადობის კვანტორით კვანტიფიცირებული გამონათქვამი არის $\phi(a)\&\phi(b)\&...$ სახის კონიუნქციის იგივური, ხოლო არსებობის კვანტორით კვანტიფიცირებული გამონათქვამი $\phi(a)\vee\phi(b)\vee...$ სახის დიზიუნქციის იგივურია (ეს დიზუნქცია, ისევე როგორც წინა კონიუნქცია, შესაძლოა უსასრულოც იყოს). ამის გათვალისწინებით, 1 კანონი შეიძლება გაგებულ იქნას როგორც დე მორგანის კანონის ერთგვარი განზოგადება:

(7-10) $\sim(\phi(a)\ \&\ \phi(b)\ \&\ ...) \Leftrightarrow \sim\phi(a)\vee\sim\phi(b)\vee ...$

კანონთა შემდეგი ჯგუფი ეხება კვანტორთა რიგითობას ორმაგად კვანტიფიცირებულ გამონათქვამებში. თუ ორივე კვანტორი ზოგადობისაა ან ორივე მათგანი არსებობისაა, მაშინ გამონათქვამში მათ რიგითობას მნიშვნელობა არ აქვს (6 და 7 კანონები). ამ კანონების სამართლიანობა უფრო ნათელი გახდება, თუ მოვიშველიებთ კვანტორთა ზემომოყვანილ სემანტიკურ ინტერპრეტაციებს. ამავე მიდგომებით ტრივიალურად ხდება ამ კანონების განზოგადება სამ ან მეტკვანტორიან გამონათქვამებზე. ამ ვითარების გამოა, რომ $(\forall x)(\forall y)\phi(x,y)$ ტიპის გამონათქვამები ხშირად მოკლედ იწერება როგორც $(\forall x,y)\phi(x,y)$. ანალოგიურად, $(\exists x)(\exists y)(\exists z)\phi(x,y,z)$ გამონათქვამის შემოკლება გვაძლევს $(\exists x,y,z)\phi(x,y,z)$ ჩანაწერს და ა. შ..

(7-11) **კვანტორთა ურთიერთდამოკიდებულების კანონები:**

კანონი 6 $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\phi(x,y)$
კანონი 7 $(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)$
კანონი 8 $(\exists x)(\forall y)\varphi(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi(x,y)$

ზემოთ ჩვენ ვნახეთ, რომ არსებობის და ზოგადობის კვანტორთა რიგის შეცვლა არ იძლევა თავდაპირველი გამონათქვამის იგივურ გამონათქვამს. მიუხედავად ამისა, სამართლიანია 8 კანონით მოცემული ლოგიკური გამომდინარეობა. მართლაც, თუ **ყველას ყავს ვიღაც, ვინც მას უყვარს** (ე.ი. თუ $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ (I) ჭეშმარიტია), არაა აუცილებელი, რომ **ვიღაც ერთი უყვარდეს ყველას** (ე. ი. $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$ (II) შეიძლება მცდარიც იყოს). მეორე მხრივ, თუ **ვიღაც ერთი უყვარს ყველას** ანუ, თუ (II) გამონათქვამი ჭეშმარიტია, მაშინ (I) გამონათქვამიც ჭეშმარიტი იქნება – **ყველას ეყოლება ვიღაც ისეთი, ვინც მას უყვარს**. უკიდურეს შემთხვევაში, **ეს ვიღაც ისეთი, ვინც მას უყვარს, იქნება ის ვიღაც ერთი**, **რომელიც ყველას უყვარს**. გამონათქვამის ის კვანტიფიცირებული სახე, რომელშიც არსებობის კვანტორი წინ უსწრებს ზოგადობის კვანტორს, ზოგჯერ, გამონათქვამის **უფრო ძლიერ სახედ** იწოდება, რამდენადაც ის არ გულისხმობს იმ სიტუაციებს, რომლებიც გათვალისწინებულია გამონათქვამის ე.წ. **უფრო სუსტ სახეში** ანუ გამონათქვამის იმ სახეში, რომელშიც ზოგადობის კვანტორი წინ უსწრებს არსებობის კვანტორს.

ზოგჯერ, იმისათვის, რომ შევძლოთ ამ კანონების მიყენება კონკრეტულ ჩაკეტილ ფორმულებზე, აუცილებელი ხდება კვანტიფიცირებული ცვლადის ალფაბეტური ჩანაცვლება. მაგალითად, $(\forall x)F(x)\&(\forall y)G(y)$ გამონათქვამი 2 კანონის პირდაპირი ფორმალური გამოყენებით არ გარდაიქმნება $(\forall x)(F(x)\&G(x))$ გამონათქვამად. მაგრამ, თუ $(\forall x)F(x)\&(\forall y)G(y)$ გამონათქვამს მივცემთ სასურველ ფორმას მასში $(\forall y)G(y)$ ქვეფორმულის ნაცვლად მისი იგივური $(\forall x)G(x)$ ფორმულის ჩანაცვლებით, მაშინ მთელი ფორმულა მიიღებს $(\forall x)F(x)\&(\forall x)G(x)$ სახეს, რომელიც, უკვე, 2 კანონის პირდაპირი ფორმალური გამოყენებით გარდაიქმნება იგივურ $(\forall x)(F(x)\&G(x))$ გამონათქვამად. ფორმულაში ცვლადის ალფაბეტური ჩანაცვლება ითვალისწინებს (1) ახალი ცვლადის აღმნიშვნელი ახალი ასოთი ძველი ცვლადის აღმნიშვნელი ძველი ასოს **თითოეული** შემოსვლის ჩანაცვლებას, რაც დასაშვებად მიიჩნევა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ (2) ეს ჩანაცვლება არ ცვლის მთელი ფორმულის კვანტორულ კონფიგურაციას (აღნაგობას). ამ პირობების დაცვით განხორციელებული ჩასმის შედეგად მიიღება ახალი ფორმულა, რომელიც ძველი ფორმულის **ალფაბეტურ ვარიანტად** იწოდება, და რომელიც არის პირველსაწყისი ფორმულის ლოგიკურად იგივური. განვიხილოთ ამ თვალსაზრისებით ზემომოყვანილი მაგალითი:

(7-12) $(\forall x)F(x)\ \&\ (\forall y)G(y) : (\forall x)F(x)\ \&\ (\forall x)G(x)$

მარცხენა ფორმულაში y ცვლადი შეიძლება ჩანაცვლდეს x ცვლადით, რადგან ასეთი ჩანაცვლებით ფორმულის ყველა სხვა ცვლადის ყველა სხვა შემოსვლა ისევ იგივე კვანტორით იბმება, რითაც იგი იყო დაბმული ამ ჩანაცვლებამდე.

გთავაზობთ ალფაბეტური ვარიანტების სხვა მაგალითებს:

(7-13) $(\forall x)((\forall z)F(x,z) \rightarrow (\exists y)H(y,x)) : (\forall x)((\forall y)F(x,y) \rightarrow (\exists y)H(y,x))$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ კვანტიფიკაციის საერთო კონფიგურაცია არ შეცვლილა.

შემდეგი ფორმულები არ არიან ერთმანეთის იგივურნი (ეკვივალენტური) და, შესაბამისად, ისინი არც ერთმანეთის ალფაბეტური ვარიანტები არიან.

(7-14) $(\forall x)(F(x) \rightarrow (\exists y)G(x,y)) : (\forall x)(F(x) \rightarrow (\exists x)G(x,x))$

$G(x,y)$ ქვეფორმულაში x ჯერ იბმებოდა $(\forall x)$ კვანტორით, ჩანაცვლების შემდეგ კი იგი $(\exists x)$ კვანტორით იბმება.

(7-15) $(\forall x)(F(x) \rightarrow (\exists y)G(x,y)) : (\forall z)(F(z) \rightarrow (\exists y)G(x,y))$

აქ განხილული ჩანაცვლებით ფორმულის x ცვლადის ყველა შემოსვლა არ ჩანაცვლებულა ახალი z ცვლადით, რის გამოც $G(x,y)$ ფორმულაში x იქცა თავისუფალ ცვლადად.

ზოგჯერ, განსაკუთრებით კი გამომდინარეობის წესების გამოყენებისას, მიზანშეწონილია ყველა კვანტორის გამოტანა ფორმულის მარცხენა მხარეს. შემდეგი კანონების საფუძველზე ნათელი ხდება, თუ რა შემთხვევაში შეიძლება კვანტორული პრეფიქსის მარცხნივ გადაწევა ისე, რომ არ შეიცვალოს ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა.

(7-16) **კვანტორთა წინსართათ გამოტანის კანონები:**

კანონი 9 $(\varphi \rightarrow (\forall x)\psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi(x))$
(**იმ პირობით, რომ x ცვლადს არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა φ ფორმულაში.**)

კანონი 10 $(\varphi \rightarrow (\exists x)\psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi(x))$
(**იმ პირობით, რომ x ცვლადს არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა φ ფორმულაში.**)

კანონი 11 $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$
(**იმ პირობით, რომ x ცვლადს არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა ψ ფორმულაში.**)

კანონი 12 $(\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$
(**იმ პირობით, რომ x ცვლადს არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა ψ ფორმულაში.**)

ეს კანონები გამოიყენება ნებისმიერად აღებული ფორმულიდან მისი ე.წ. ნორმალური პრენექსული (წინსართული) ფორმის ასაგებად, რომელიც ამოსავალი ფორმულის ისეთი ალფაბეტური ვარიანტია, რომლის ყველა კვანტორი წინ უძღვის ფორმულის უკვე კვანტორებისგან თავისუფალ ე.წ. მატრიცას. მაგალითად, იმისთვის, რომ მოვიძიოთ (7-17) ფორმულის

(7-17) $(\exists x)F(x) \rightarrow (\forall y)G(y)$

PNF სახე (ე.ი. პრენექსული ნორმალური ფორმა), ვიყენებთ მე-9 კანონს და ვიღებთ:

(7-18) $(\forall y)[(\exists x)F(x) \rightarrow G(y)]$

ეს დასაშვებია, რამდენადაც $(\exists x)F(x)$ წინაპირობაში თავისუფალი სახით არ გვხვდება გადანაცვლებულ კვანტორში შემავალი y ცვლადი. მიღებული ფორმულა ჯერ კიდევ არაა PNF სახის, რადგან $(\exists x)$ კვანტორის მოქმედების არე არის მხოლოდ $F(x)$. კვანტორი $(\exists x)$ ჩვენ უნდა გამოვიტანოთ ფორმულიდან $(\exists x)F(x) \rightarrow G(y)$, და ეს შეგვიძლია გავაკეთოთ მე-12 კანონის გამოყენებით, რამდენადაც გამონათქვამის $G(y)$ დასკვნაში არ გვხვდება x როგორც თავისუფალი ცვლადი. შედეგად მივიღებთ ფორმულას $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(y))$, რომელიც არის (7-18) ფორმულის ფრჩხილებში ჩასმული ქვეფორმულის იგივური. ამგვარად, (7-17) ფორმულის იგივური PNF სახის ფორმულა იქნება:

(7-19) $(\forall y)[(\forall x)(F(x) \rightarrow G(y))]$

ახლა შეიძლება ოთხკუთხა ფრჩხილებიც მოვაცილოთ და მივიღებთ:

(7-20) $(\forall y)(\forall x)(F(x) \rightarrow G(y))$

მკითხველს შეუძლია თავად დარწმუნდეს იმაში, რომ თუ (7-17) გამონათქვამის მიმართ გამოვიყენებდით ჯერ მე-12 და შემდეგ კი მე-9 კანონს, მივიღებდით $(\forall x)(\forall y)(F(x) \rightarrow G(y))$ გამონათქვამს, რომელიც, რა თქმა უნდა, იქნებოდა (7-20) გამონათქვამის იგივური (და, შესაბამისად, (7-17) გამონათქვამის იგივურიც).

ზოგჯერ, მათ შორის ზემოაღწერილი კანონებით სარგებლობის ინტერესებიდან გამომდინარეც, შესაძლოა აუცილებელი გახდეს ფორმულის შეცვლა მისი რომელიმე ალფაბეტური ვარიანტით. მაგალითად, (7-17) ფორმულა წარმოდგენილი რომ ყოფილიყო, $(\exists x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)$ ალფაბეტური ვარიანტით, ჩვენ შეგვეძლო გამოგვეყენებინა მე-9 კანონი და მიგვეღო:

(7-21) $(\forall x)[(\exists x)F(x) \rightarrow G(x)]$

(მიაქციეთ ყურადღება, რომ x ცვლადი **არაა თავისუფალი** $(\exists x)F(x)$ ფორმულაში). მაგრამ, ასეთ შემთხვევაში, მე-12 კანონის გამოყენებით ჩვენ ვეღარ შევძლებდით $(\exists x)$ კვანტორის ფრჩხილებს გარეთ გატანას, რადგან $[(\exists x)F(x) \rightarrow G(x)]$ ფორმულის $G(x)$ დასკვნაში (კონსეკვენტში) x თავისუფალია (ასეთ დროს არანაირი მნიშვნელობა არ აქვს იმას, რომ ის დაბმულია ფრჩხილებს გარეთ არსებული $(\forall x)$ კვანტორით, რადგანაც ჩვენ საქმე გვაქვს $(\exists x)F(x) \rightarrow G(x)$ ქვეფორმულასთან, რომლის დასკვნაშიც x თავისუფალი ცვლადია). ამ პრობლემის გადასაწყვეტად ფორმულა $(\exists x)F(x) \rightarrow G(x)$ უნდა გარდავქმნათ მის ალფაბეტურ ვარიანტად, რის შემდეგაც დასაშვები იქნება მე-12 კანონის გამოყენება და $(\forall y)(F(y) \rightarrow G(x))$ ფორმულის მიღება. ამგვარად, ამ გამოყვანის საბოლოო შედეგი ასეთია:

(7-22) $(\forall x)(\forall y)(F(y) \rightarrow G(x))$

რომელიც, რა თქმა უნდა, $(\exists x)F(x)\rightarrow(\forall x)G(x)$ ფორმულის იგივურია (ისევე როგორც იგივურია (7-20) და (7-17) ფორმულებისა).

კვანტორების წინსართათ გამოტანის კანონებით ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი ფორმულა შემდეგი მარტივი პროცედურით განსაზღვრული წესებისა და იგივური გარდაქმნების გამოყენებით მივიყვანოთ ე.წ. წინსართიან ანუ პრენექსულ ფორმამდე:

1. ატომალური ფორმულები ისედაც პრენექსული ფორმის ფორმულებია (PNF ფორმულებია).
2. ვთქვათ, φ არის φ' პრენექსული (წინსართიანი) ფორმის ფორმულის იგივური. მაშინ, $(\forall x)\varphi'$ პრენექსული (წინსართიანი) ფორმის ფორმულაა და იგი $(\forall x)\varphi$ ფორმულის იგივურია.
3. თუ φ არის φ' წინსართიანი ფორმის (ე.ი. PNF) ფორმულის იგივური, მაშინ $\sim\varphi$ იქნება $\sim\varphi'$ ფორმულის იგივური. ამასთან, თუ φ' შეიცავს კვანტორებს, გამოიყენეთ I კანონები იგივური წინსართიანი ფორმულის მისაღებად.
4. თუ ფორმულას აქვს $\varphi\rightarrow\psi$ სახე, გარდამქმნელი პროცედურა უფრო რთულად იგება: დავუშვათ φ' და ψ' არიან შესაბამისად φ და ψ ფორმულების იგივური PNF ფორმულები (ე.ი პრენექსული ანუ წინსართიანი ფორმის ფორმულები). შევცვალოთ ისინი თავთავიანთი ისეთი ალფაბეტური ვარიანტებით, რომ მათში უკვე აღარ იყოს არცერთი გრაფიკულად ერთი და იგივე დაბმული ცვლადი. ამგვარი ალფაბეტური შეცლით მიღებულ ფორმულებს ჩვენ შესაბამისად კვლავაც φ' და ψ' ასოებით აღვნიშნავთ. და ბოლოს, $\varphi'\rightarrow\psi'$ ფორმულაზე ვიმუშაოთ კვანტორთა მარცხნივ გატანის წესებით საძიებელი PNF ფორმის ფორმულის ასაგებად.

ეს პროცედურა, გამომდინარე იქიდან, რომ პრედიკატულ ლოგიკაში ლოგიკური კავშირები და კვანტორები სრულად განისაზღვრებიან $\sim$ და $\rightarrow$ ლოგიკური კავშირებითა და $\forall$ ზოგადობის კვანტორით, ადასტურებს პრედიკატული ლოგიკის ნებისმიერი ფორმულის დაყვანის შესაძლებლობას მის ეკვივალენტურ PNF ფორმის ფორმულაზე.

პრენექსული ნორმალური ფორმის ფორმულების გამოყენება, უპირველეს ყოვლისა, მიზნად ისახავს ერთმანეთს შეადაროს ფორმულათა კვანტიფიკაციური სტრუქტურის სირთულის დონეები. მაგრამ, როცა პრედიკატული ლოგიკის ენაზე ითარგმნება ჩვეულებრივი ენობრივი წინადადებები, თარგმანი ხშირად მოითხოვს კვანტორთა ჩართვას გამონათქვამთა შიგნით, რამდენადაც ბუნებრივ ენაში კვანტორები სახელადი ფრაზის შიგნით გვხვდება. მაგალითად, იმისათვის, რომ ინგლისური ფრაზა **Some person likes every book ((ზოგიერთ) რომელიღაც ადამიანს უყვარს ყველა წიგნი)** გადავთარგმნოთ პრედიკატული ლოგიკის ენაზე, ჩვენ მოგვიწევს განხილვა ისეთი საინტერპრეტაციო D არისა, რომელშიც შედიან ყველა დღეს არსებული **ადამიანებიც** და **წიგნებიც**. აქედან გამომდინარე, ამ წინადადების თარგმანად არ გამოდგება ისეთი გამოსახულება, როგორიცაა $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$, რადგან ის ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა D სიმრავლის რომელიღაც ინდივიდს აქვს L მიმართება ამავე D სიმრავლის ყოველ ინდივიდთან, ე.ი. ადამიანებთანაც, წიგნებთანაც და ყველაფერ იმასთანაც, რაც კიდევ შეიძლება შედიოდეს ინდივიდთა ამ D არეში (სიმრავლეში). აქედან კი გამოდის, რომ აღნიშნული თარგმანის განსახორციელებლად ჩვენ დაგვჭირდება ერთადგილიანი პრედიკატები, რომლებიც შეესაბამება გამოთქმებს **'არის ადამიანი'** და **'არის წიგნი'**. ვთქვათ, P და B შესაბამისად ამ ერთადგილიან პრედიკატებს აღნიშნავენ. ამის გათვალისწინებით ამ წინადადების ყველაზე უფრო ბუნებრივი თარგმანი (იმ შემთხვევაში, თუ ფრაზის შინაარსად ვიგულისხმებთ იმას, რომ არსებობს ერთი მაინც ისეთი ადამიანი, რომელსაც ყველა წიგნი უყვარს) იქნება:

(7-23) $(\exists x)(P(x)\&(\forall y)(B(y)\rightarrow L(x,y)))$

რედაქტორის შენიშვნა: ჩვენი მიდგომებით, რომელიც პროფ. შ. ფხაკაძის სახელმძღვანელოში „მათემატიკური ლოგიკა – საფუძვლები" აღწერილ შეზღუდულ კვანტორებიან პირველი რიგის თეორიულ მიდგომებს ეყრდნობა, წინადადება **ერთ რომელიღაც ადამიანს უყვარს ყველა წიგნი,** თარგმანში არ ითხოვს **არის ადამიანი** და **არის წიგნი** ფრაზების პრედიკატებად განხილვას, რაც, საბოლოო ჯამში, ქართული ენობრივ-აზროვნებითი სისტემისათვის, ჩვენ ვთვლით, ბევრად უფრო ბუნებრივ და სრულყოფილ მათემატიკურ თარგმანებს იძლევა! – განვიხილოთ ძალიან მოკლედ აღნიშნული წინადადების ჩვენეული მათემატიკური თარგმანი: ვისარგებლებთ ზემოთ გაკეთებული ზოგადი $L(x,y)$, P და B აღნიშვნებით, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ P და B ჩვენთან სიმრავლეებს აღნიშნავენ. ჩვენი მიდგომებით $(\exists x\in P)(\forall y\in B){:}L(x,y)$ შეზღუდულ კვანტორებიანი ფორმულა ზემოშემოთავაზებული წინადადების მათემატიკური თარგმანია. ამგვარად, ჩვენი მიდგომებით, ქართული მარტივი წინადადება თარგმანში იძლევა ამ მარტივი წინადადების ამგებ პრედიკატს და შეზღუდულკვანტორებიან წინსართს, რომელიც ან ზოგადურად ან ეგზისტენციალურად აკვანტიფიცირებს სახელური ფრაზებით მოცემულ სიმრავლეებს, რომლებიც, თავის მხრივ, იძლევიან წინადადების ძირითადი ნაწილის ანუ ზმნური ფრაზით განსაზღვრული პრედიკატის სამსჯელო ადგილების შემზღუდველ სიმრავლეებს. ამგვარად, ქართული მარტივი წინადადება **ერთ რომელიღაც ადამიანს უყვარს ყველა წიგნი,** აგებულია **უყვარს(x,y)** ორადგილიანი პრედიკატით, რომლის სამსჯელო ადგილები შეზღუდულია სიმრავლეებით **{ადამიანს}** და **{წიგნი}** და რომლებიც ამ არეზე შესაბამისად კვანტიფიცირდებიან **რომელიღაც** და **ყველა** კვანტორებით. ეს პირველ მათემატიკურ თარგმანში იძლევა ჩვენს მიერ ე.წ. ინფიქსურ კვანტორებიან ფორმულას **უყვარს(**რომელიღაც**(ადამიანს),**ყველა**(წიგნი)),** რაც იმის გათვალისწინებით, რომ **რომელიღაც** არის არსებობის, **ყველა** კი ზოგადობის ტიპის კვანტორული ნიშანი, მეორე მათემატიკურ თარგმანში იძლევა $\exists x\in$**{ადამიანს}**$\forall y\in$**{წიგნი}**:**უყვარს(x,y)** ფორმულას, რომელიც, რა თქმა უნდა, არსებითად განსხვავდება ზემოშემოთავაზებული კლასიკური თარგმანით მიღებული $(\exists x)(P(x)\&(\forall y)(B(y)\rightarrow L(x,y)))$ ფორმულისაგან და, ამავდროულად, ცხადია ისიც, რომ ჩვენეული თარგმანი უფრო მეტი ადეკვატურობით ასახავს სათარგმნი ენობრივი წინადადებით მოცემულ შინაარსულ ვითარებას. ხაზგასასმელია ისიც, რომ ჩვენეული მიდგომებით მიღებული მათემატიკური თარგმანის ზოგადი ფორმალური კონსტრუქცია არსებითად ინარჩუნებს სათარგმნი ენობრივი წინადადების ფორმალურ კოსტრუქციას, მაშინ როდესაც კლასიკური მიდგომებით გაკეთებული მათემატიკური თარგმანისა და სათარგმნი ბუნებრივ ენობრივი წინადადების ფორმალური კონსტრუქციები არსებითად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ამ უკანასკნელი მოსაზრებისა და, შესაბამისად, ჩვენი მიდგომების უპირატესობათა კიდევ ერთხელ დასადასტურებლად ეს შენიშვნა დავასრულოთ **ცნობილია (ე.ი. ჭეშმარიტია), რომ არსებობს ერთი მაინც ისეთი ინდივიდი, რომელი ინდივიდიც არის ადამიანი და, ამასთან, ცნობილია ისიც, რომ ნებისმიერი ინდივიდისათვის, თუ ეს ინდივიდი არის წიგნი, მაშინ იმ რომელიღაც ინდივიდს ეს ინდივიდი უყვარს** წინადადების თარგმანით, რომელიც ჩვენეული მიდგომებით შემდეგი ფორმულით გამოისახება $\exists x\in U{:}(P(x)\&(\forall y\in U{:}(B(y)\rightarrow L(x,y)))$. - მკითხველი უნდა მიხვდეს, რომ ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული სათარგმნი წინადადება ამავდროულად არის ის წინადადება, რომლის თარგმანიც შემოგვთავაზეს ავტორებმა ნაცვლად **ერთ რომელიღაც ადამიანს უყვარს ყველა წიგნი** წინადადების თარგმანისა. – აქ მაგალითის მეშვეობით შევეცადეთ წარმოგვეჩინა კლასიკური მიდგომებისაგან ძირეულად განსხვავებული და ქართული ენობრივი წესთწყობისათვის ბუნებრივად დამახასიათებელი ჩვენეული სიმრავლურ-თეორიული მიდგომების სასაფუძვლო შემადგენლები (უფრო დეტალურად იხ.: 1.ს-ს ჟურნალი „ქართული ენა და ლოგიკა", 2005წ., იანვარი-ივნისი, თბილისი; 2.დამატებითი საკითხავი კურსი თანამედროვე მათემატიკურ ლინგვისტიკაში, 2004წ., თბილისი; 3.თბილისის V საერთაშორისო კონფერენციის შრომები, 2003წ., ამსტერდამი; 4.ჟურნალი „ივერია", 2002წ., თბილისი-პარიზი).

ასეთი ფორმულა, ერთი მხრივ, სავსებით აკმაყოფილებს თარგმანზე ჩვენს მოთხოვნებს, მაგრამ იმ გამოყვანის წესების გამოსაყენებლად, რომლებიც ქვემოთ განიხილება, ფორმულა

ჯერ უნდა იქნეს მიყვანილი იგივურ წინსართიან ანუ PNF სახემდე. (7-24) დემონსტრირებას უკეთებს იმას, თუ როგორ შეიძლება (7-23) დაყვანილ იქნეს მის იგივურ PNF სახეზე:

(7-24)
1. $(\exists x)(P(x) \& (\forall y)(B(y) \rightarrow L(x, y)))$
2. $(\exists x) \sim\sim(P(x) \& (\forall y)(B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **1, ორმაგი უარყ.**
3. $(\exists x) \sim(\sim P(x) \vee \sim(\forall y)(B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **2, დე მორგანის კანონით**
4. $(\exists x) \sim(\sim P(x) \vee (\exists y) \sim(B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **3, კვანტორთა 1 კანონით**
5. $(\exists x) \sim(P(x) \rightarrow (\exists y) \sim(B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **4, გამომდინარეობის კანონით**
6. $(\exists x) \sim(\exists y)(P(x) \rightarrow \sim(B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **5, კვანტორთა 10 კანონით**
7. $(\exists x)(\forall y) \sim(P(x) \rightarrow \sim(B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **6, კვანტორთა 1 კანონით**
8. $(\exists x)(\forall y) \sim(\sim P(x) \vee \sim(B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **7, გამომდინარეობის კანონით**
9. $(\exists x)(\forall y)(\sim\sim P(x) \& \sim\sim(B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **8, დე მორგანის კანონით**
10. $(\exists x)(\forall y)(P(x) \& (B(y) \rightarrow L(x, y)))$ **9, ორმაგი უარყოფის კანონით**

7.4 ბუნებრივი გამოყვანები

ჩვენ დაგვჭირდება წინა ნაწილში უკვე აღწერილ გამოყვანის წესებზე სულ რაღაც ერთი-ორი გამოყვანის წესის დამატება, რათა შევძლოთ კვანტიფიცირებული ფორმულების შემცველი გამონათქვამების მტკიცებების აგება. გავიხსენოთ, რომ მართებული მსჯელობა (დასაბუთება, მტკიცება) ემყარება ე.წ. გამოყვანის წესებს, რომლებიც აუცილებლობის წესით (ე.ი. ლოგიკური გამომდინარეობის წესით) ინახავენ ჭეშმარიტებას. ძირითადი იდეა, რომელიც აქ მუშაობს ასეთია: ჯერ ვიყენებთ წესებს, რომლებიც გამორიცხავენ ანუ ელიმინირებას უკეთებენ კვანტორებს, შემდეგ უკვანტორებოდ დარჩენილ მატრიცულ ნაწილს ვამუშავებთ გამოყვანის წესებით და ბოლოს, ფორმულაში კვლავ ვაბრუნებთ კვანტორებს. ფორმულებიდან კვანტორების გამოსარიცხად ჩვენ დაგვჭირდება ორი ახალი წესი – **უნივერსალური დაკონკრეტება (განკერძოება) (U.I. – Universal Instantiation)** და **ეგზისტენციალური დაკონკრეტება (განკერძოება) (E.I. – Existential Instantiation)** და, შესაბამისად, ორიც – ფორმულაში კვანტორთა კვლავ შემოსატანად – **უნივერსალური განზოგადება (U.G. – Universal Generalization)** და **ეგზისტენციალური განზოგადება (E.G. – Existential Generalization).** ამასთან, არამართებული (ანუ არასწორი - **incorecct**) გამოყვანების თავიდან ასაცილებლად ზოგიერთი ახალი წესის გამოყენებისას დაცული უნდა იქნეს დამატებითი პირობები. გამოყვანის ამ წესებში ვიყენებთ ფორმულებს $(\forall x)\varphi(x)$ და $(\exists x)\varphi(x)$, რათა ღიად მივუთითოთ იმ ფაქტზე, რომ სრულიად ნებისმიერი სირთულისა და სიგრძის φ ფორმულა შეიცავს x ცვლადს (ე. ი. ეს წესები არ შეიძლება გამოყენებულ იქნას ფორმულათა ცარიელი კვანტიფკაციის მიმართ).

როგორც უკვე ვნახეთ, ზოგადობის კვანტორით კვანტიფიცირებული ფორმულა ჭეშმარიტია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ზოგადობის კვანტორით დაბმული ცვლადის განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ ფორმულის მატრიცა ჭეშმარიტია. ამდენად, $(\forall x)\varphi(x)$ გამონათქვამის ჭეშმარიტებიდან ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ჭეშმარიტია ამ გამონათქვამის (ფორმულის) ნებისმიერი ისეთი კერძო მაგალითი, რომელიც მიიღება $\varphi(x)$ ფორმულაში x ცვლადის ნაცვლად მისი საინტერპრეტაციო განსაზღვრის არის სრულიად ნებისმიერი წევრის ჩასმით (ანუ ფორმულის ამ x ცვლადისათვის გარკვეული, ოღონდ სრულიად ნებისმიერი მნიშვნელობის მინიჭებით). ამგვარად, ზოგადობის კვანტორით კვანტიფიცირებული წინადადებიდან **ყველა ადამიანი არის მოკვდავი (მოკვდავია) (All man are mortal)** შეგვიძლია გამოვიყვანოთ (დავასკვნათ), რომ **თუ ჯონი არის ადამიანი**

(ადამიანია), ის არის მოკვდავი (მოკვდავია) (If John is a man, he is mortal). ამგვარად, უნივერსალური განკერძოების ეს ახალი წესი შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

უნივერსალური განკერძოება (U.I.)

$$\frac{(\forall x)\varphi(x)}{\therefore\ \varphi(c)}$$

აქ c არის ინდივიდური კონსტანტა, რომელიც ჩაენაცვლა x ცვლადის ყოველ თავისუფალ შემოსვლას გამოყვანის წესის წინაპირობის φ(x) მატრიცაში (გასაგებია, რომ ამ კონსტანტის სემანტიკური მნიშვნელობა დისკურსის (ე.ი ინტერპრეტაციის) განსაზღვრის არის სრულიად ნებისმიერი საგანია (ობიექტია)). ახლა, როცა ჩვენს განკარგულებაში უკვე არის U.I. გამოყვანის წესი, ჩვენ შეგვიძლია ვაჩვენოთ (5-3) დამტკიცების სისწორე.

(7-25)
1. $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$
2. $H(s)$
3. $H(s) \rightarrow M(s)$ **1, U.I.**
4. $M(s)$ **2, 3, M.P.**

რამდენადაც მეორე წინაპირობაში შემოდის კონკრეტული ინდივიდური კონსტანტა s და დასკვნაშიც იგივე კონსტანტა ფიგურირებს, უნივერსალური განკერძოების (U.I.) წესით სარგებლობისას ეს კონსტანტა იქნა გამოყენებული. მესამე სტრიქონში ფორმულა აღარაა კვანტიფიცირებული, და ამიტომაც შესაძლებელი გახდა გამონათქვამთა ლოგიკის წესის გამოყენება. აქ მოდუს პონენსის (M. P.) წესით გამოიყვანება მეოთხე სტრიქონის დასკვნა, რაც არის კიდეც საძიებელი შედეგი.

იმის დასამტკიცებლად, რომ გარკვეული ფორმულა ღებულობს ჭეშმარიტ მნიშვნელობას ანუ არის ჭეშმარიტი მოცემული სიმრავლის ნებისმიერი წევრისათვის, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ განსახილველი სიმრავლის **ნებისმიერად არჩეული ინდივიდი** და დავამტკიცოთ, რომ მისთვის ფორმულა ჭეშმარიტია. ამ შემთხვევაში, თუ მტკიცება ემყარება მხოლოდ იმას, რომ ეს ინდივიდი არის მოცემული სიმრავლის წევრი და არა ამ ინდივიდის სხვა რაიმე თვისებას, მაშინ სრული უფლება გვაქვს დავასკვნათ, რომ ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია სიმრავლის ნებისმიერი ინდივიდისათვის (წევრისათვის). ზუსტად ასეთ განსჯას ეფუძნება უნივერსალური განზოგადების (U.G.) წესი: ის, რაც ჭეშმარიტია განსაზღვრის არის ნებისმიერად შერჩეული ობიექტისათვის, ჭეშმარიტია ასევე განსაზღვრის არის სხვა ნებისმიერი ობიექტისთვისაც. ინდივიდურ v კონსტანტას ჩვენ გამოვყოფთ როგორც სპეციალურ სიმბოლოს ასეთი ნებისმიერად არჩეული ობიექტის აღსანიშნავად და საჭიროების შემთხვევაში, ანუ ყოველთვის როცა დაგვჭირდება ერთზე მეტი ასეთი სიმბოლო, მოვახდენთ მის ინდექსირებას და ანალოგიური მიზნებით გამოვიყენებთ $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ სიმბოლოებს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ v არის ინდივიდური კონსტანტა, ამდენად φ(v) არის ატომალური გამონათქვამი და არა ღია ფორმულა. მიუხედავად ამისა, v კონსტანტას ბევრი რამ აქვს საერთო ცვლადთან, რადგან ის აღნიშნავს ინტერპრეტაციის განსაზღვრის არის (ე.ი. დისკურსის საგანთა არის) სრულიად ნებისმიერ ინდივიდს და არა უკვე ცნობილ ერთ რომელიმე კონკრეტულს. ამგვარი შეთანხმებების შემდეგ U.G. შემდეგნაირად ყალიბდება:

$$\frac{\varphi(v)}{\therefore\ (\forall x)\varphi(x)}$$

ეს წესი გამოყენებულია შემდეგ მტკიცებაში, რომელსაც წარმოვადგენთ ჯერ ბუნებრივი, შემდეგ კი მათემატიკური ენობრივი საშუალებებით.

(7-26) **ყველა კურდღელი არის ოთხფეხა**
ყველა ოთხფეხა არის თბილსისხლიანი

∴ **ყველა კურდღელი არის თბილსისხლიანი**

(7-27) $(\forall x)(R(x) \to Q(x))$
$(\forall x)(Q(x) \to W(x))$

∴ $(\forall x)(R(x) \to W(x))$

მტკიცება შემდეგნაირად მიმდინარეობს:

1. $(\forall x)(R(x) \to Q(x))$
2. $(\forall x)(Q(x) \to W(x))$
3. $R(v) \to Q(v)$ **1, U.I.**

პირველი დაშვება დაკონკრეტებულია ნებისმიერად არჩეული v კონსტანტით. გავიხსენოთ, რომ ყოველი კონსტანტა იძლევა ზოგადობის კვანტორით კვანტიფიცირებული ფორმულის ჭეშმარიტ განკერძოებას: შესაბამისად, $R(v)\to Q(v)$ არის პირველი სტრიქონის ლეგიტიმური ანუ წესისმიერი კერძო შემთხვევა.

4. $Q(v) \to W(v)$ **2, U.I.**

ამ შემთხვევაში ჩვენ ვახდენთ მეორე დაშვების განკერძოებას იმავე კონსტანტით, რომელიც მესამე სტრიქონში ავირჩიეთ.

5. $R(v) \to W(v)$ **3, 4, H.S.**
6. $(\forall x)(R(x) \to W(x)$ **5, U.G.**

რადგან v ნებისმიერად იყო არჩეული, დასაშვებია მისი შემცველი გამონათქვამის უნივერსალური განზოგადება და მეექვსე სტრიქონში არსებული დასკვნის გამოყვანა.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთ მაგალითი, სადაც ზოგადობის კვანტორის მოსაცილებლად გამოყენებულია U.I. წესი, ხოლო, ბოლოს, U.G. წესით ისევ ხდება მისი აღდგენა.

(7-28) 1. $(\forall x)(P(x) \,\&\, Q(x))$
2. $(\forall x)(R(x) \rightarrow \sim P(x))$
3. $P(v) \,\&\, Q(v)$ **1, U.I.**
4. $R(v) \rightarrow \sim P(v)$ **2, U.I.**
5. $P(v)$ **3, &-Simp.(&-გამარტ.)**
6. $\sim\sim P(v)$ **5, Compl. (დამატ.)**
7. $\sim R(v)$ **4, 6, M.T.**
8. $Q(v)$ **3, &-Simp.(&-გამარტ.)**
9. $Q(v) \,\&\, \sim R(v)$ **7, 8, Conj.(&-დაკავშირ.)**
10. $(\forall x)(Q(x) \,\&\, \sim R(x))$ **9, U.G.**

ის ფაქტი, რომ φ(c) ჭეშმარიტია, იმის გათვალისწინებით, რომ c კონსტანტაა, განიხილება როგორც ღია φ(x) ფორმულის ჭეშმარიტი კერძო მაგალითის ანუ როგორც მისი ეგზისტენციალური განკერძოების არსებობა. ამდენად, იმ ფაქტიდან, რომ φ(c) არის ჭეშმარიტი, ჩვენ შეგვიძლია დასკვნის სახით გამოვიყვანოთ $(\exists x)\varphi(x)$ გამონათქვამი ანუ მისი ჭეშმარიტება. მაგალითად, თუ ჩვენ დანამდვილებით ვიცით, რომ **ჯონი არის ადამიანი** (ან, თუ დავუშვებთ, რომ ეს ასეა), მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არსებობს ობიექტი (საგანი), რომელიც ადამიანია, რაც დასკვნის სახით გვაძლევს იმას, რომ **ადამიანი არსებობს**. ეგზისტენციალური (არსებულობით) განზოგადების წესი ასე ყალიბდება:

ეგზისტენციალური განზოგადება (E.G.)

$$\frac{\varphi(c)}{\therefore\ (\exists x)\varphi(x)}$$

შემდეგ დამტკიცებაში გამოყენებულია E.G. წესი

(7-29) 1. $H(c)$
2. $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$
3. $H(c) \rightarrow M(c)$ **2, U.I.**
4. $M(c)$ **1, 3, M.P.**
5. $(\exists x)M(x)$ **4, E.G.**

თუ არსებობის კვანტორით კვანტიფიცირებული გამონათქვამი ჭეშმარიტია, მაშინ არსებობს ამ არსებობის კვანტორით დაბმული ცვლადის ერთი მაინც ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს ამ მატრიცის ჭეშმარიტ განკერძოებას. ამდენად, თუკი ფორმულა $(\exists x)\varphi(x)$ ჭეშმარიტია, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ დისკურსის განსაზღვრის არეში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ობიექტი (საგანი), რომ მისი გამომხატველი w კონსტანტისთვის φ(w) ჭეშმარიტია. ამ პირობებში, საზოგადოდ, φ(x) მატრიცის ზოგიერთი განკერძოებები შეიძლება მცდარიც იყოს, რაც, ცხადია, მაშინ მოხდება, თუკი x ცვლადის ის კერძო მნიშვნელობა, რომლითაც ეს განკერძოება გაკეთდა არ იძლევა ფორმულის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას. თუმცა, $(\exists x)\varphi(x)$ ფორმულის ჭეშმარიტება, ცხადია, განაპირობებს იმას, რომ არსებობს იგივე x ცვლადის სხვა ისეთი მნიშვნელობა, რომლის ჩასმითაც მიიღება მატრიცის ჭეშმარიტი კერძო

მაგალითი. ამგვარად, w არის U.I. წესში v კონსტანტის ანალოგიური იმ თვალსაზრისით, რომ ის არ გამოხატავს რაღაც ერთ კონკრეტულ ინდივიდს, მაგრამ განსხვავდება v კონსტანტისაგან იმით, რომ ინდივიდთა ის ჩამონათვალი, რომელსაც ის შეიძლება გამოხატავდეს, მოიცავს არა მთელ განსაზღვრის არეს, არამედ მის მხოლოდ იმ ქვესიმრავლეს, რომლის წევრებიც იძლევიან მოცემული მატრიცის ჭეშმარიტ კერძო შემთხვევებს. w სახის კონსტანტებს, მათი ამ თვისების გამო, ჩვენ განსაკუთრებული ყურადღებით უნდა მოვეპყრათ E.I. წესით სარგებლობისას. მაგალითად, დავუშვათ, რომ $(\exists x)\varphi(x)$ და $(\exists x)\psi(x)$ არიან ერთი მსჯელობის ორი განსხვავებული დაშვებები (წინაპირობები) და დამტკიცებაში E.I. წესის გამოყენებით მოხდა პირველი მათგანის განკერძოება $\varphi(w)$ კერძო ჭეშმარიტი მაგალითით. ასეთ პირობებში უკვე აღარ შეიძლება იგივე w კონსტანტას გამოყენება $(\exists x)\psi(x)$ გამონათქვამის $\psi(w)$ კერძო ჭეშმარიტი მაგალითის მისაღებად, რადგან ჩვენ არ გვაქვს იმის გარანტია, რომ დისკურსის ინტერპრეტაციის განსაზღვრის არეში ამ w კონსტანტით აღნიშნული ერთი და იგივე ობიექტი ერთდროულად უზრუნველყოფს ორივე მატრიცას ჭეშმარიტებას. ასეთ შემთხვევებში, თუ გვინდა რომ არ დაიკარგოს გამოყვანის მართებულობა (სისწორე, კორექტულობა) გამოყვანისას უნდა ვისარგებლოთ ორი განსხვავებული w_1 და w_2 კონსტანტით, რაც, შესაბამისად, საშუალებას მოგვცემს მივიღოთ ორი განსხვავებული $\varphi(w_1)$ და $\psi(w_2)$ ჭეშმარიტი კერძო მაგალითი. ამგვარად, E.I წესისთვის ვაწესებთ შემდეგ შეზღუდვას: ეგზისტენციალური განკერძოების წესის გამოყენებით შემოტანილი ახალი კონსტანტა არ უნდა ემთხვეოდეს იმავე დამტკიცებაში იმავე წესით მანამდე შემოტანილ თუნდაც რომელიმე კონსტანტას. ეგზისტენციალური განკერძოების წესი შემდეგნაირად ყალიბდება:

ეგზისტენციალური განკერძოება (E.I.)

$$\frac{(\exists x)\varphi(x)}{\therefore\ \varphi(w)}$$

(სადაც w ახალი კონსტანტაა).

ასეთ პირობებში $\varphi(w)$ მაგალითი, ცხადია, ვერ იქნება გამოყენებული უნივერსალური განზოგადების საფუძვლად და, შესაბამისად, $(\forall x)\varphi(x)$ დასკვნის მისაღებად, რადგან w შერჩეულ იქნა არა 'სრულიად ნებისმიერად', არამედ დისკურსის განსაზღვრის არის ინდივიდთა შესაძლოა იმ უფრო ვიწრო სიმრავლიდან, რომლის წევრებიც აკმაყოფილებენ ანუ ჭეშმარიტს ხდიან მოცემულ მატრიცას. ქვემოთ მოგვყავს დამტკიცება, რომელშიც გამოყენებულია E.I. წესი:

(7-30)	1.	$(\exists x)(P(x) \& Q(x))$	
	2.	$P(w) \& Q(w)$	**1, E.I.**
	3.	$P(w)$	**2, &-Simp.(&-გამარტ.)**
	4.	$(\exists x)P(x)$	**3, E.G.**

ეს ნაბიჯი დასაშვებია, რადგან ცნობილია, რომ w კონსტანტა P(w) სახით იძლევა P(x) ფორმულის ერთ რომელიღაც ჭეშმარიტ კერძო მაგალითს (ჭეშმარიტ განკერძოებას).

5. Q(w) **2, Simp.(&-გამარტ.)**
6. (∃x)Q(x) **5, E.G.**
7. (∃x)P(x) & (∃x)Q(x) **4, 6, Conj.(&-დაკავშირ.)**

შემდეგ დამტკიცებაში ყურადღება მახვილდება ეგზისტენციალური განკერძოებისა (E.I.) და უნივერსალური განკერძოების (U.I.) წესების გამოყენების მნიშვნელოვან ასპექტებზე:

(7-31) 1. (∃x)(T(x) & P(x))
2. (∀x)(P(x) → H(x))
3. T(w) & P(w) **1, E.I.**
4. P(w) → H(w) **2,U.I.**

რადგან P(x)→H(x) ჭეშმარიტია განსაზღვრის არის ყველა ინდივიდისთვის, დასაშვებია U.I. განკერძოების ოპერაციისთვის w კონსტანტას გამოყენება. დამტკიცება ტექნიკურად გაუმართავი იქნებოდა U.I. წესის გამოყენებით ჯერ მე-2 სტრიქონის განკერძოება რომ მოგვეხდინა P(w)→H(w) გამოსახულებით და, შემდეგ, E.I. წესით განგვეკერძოებია პირველი სტრიქონი T(w)&P(w) გამოსახულებით, რადგან, ასეთ შემთხვევაში, w იქნებოდა არა ახალი, არამედ უკვე წინა სტრიქონით შემოსული კონსტანტა.

5. P(w) **3, &-გამარტ.**
6. H(w) **4, 5, M.P.**
7. T(w) **3, &-გამარტ.**
8. T(w) & H(w) **6, 7, &-დაკავშირება**
9. (∃x)(T(x) & H(x)) **8, E.G.**

მიაქციეთ ყურადღება, რომ არასწორი იქნებოდა U.I. წესის გამოყენებით მე-8 სტრიქონიდან (∀x)(T(x)&H(x)) დასკვნის გამოყვანა, რადგან w შემოტანილი იყო E.I. წესის გამოყენებით.

ამ მსჯელობის ბუნებრივ ენობრივი შესატყვისია:

(7-32) **ზოგიერთი სოკო შხამიანია.**
ყველაფერი, რაც შხამიანია, მავნებელია.
∴ **ზოგიერთი სოკო მავნებელია.**

ქვემოთ მოყვანილი „დამტკიცება“ (მსჯელობა) არასწორია (არამართებულია), რადგან უგულვებელყოფილია E.I. წესის გამოყენებაზე გათვალისწინებული შეზღუდვები.

(7-33) 1. (∃x)(C(x) & V(x))
2. (∃x)(D(x) & V(x))
3. C(w) & V(w) **1, E.I.**
4. D(w) & V(w) **2, E.I.** (არასწორი გამოყვანა)
5. C(w) **3, &-გამარტ.**

6. D(w) **4, &-გამარტ.**
7. C(w) & D(w) **5, 6, &-დაკავშირება**
8. (∃x)(C(x) & D(x)) **7, E.G.**

მსჯელობის ასეთი ზოგადი ფორმა (სქემა) რომ არასწორია (არამართებულია), ჩანს მისი შემდეგი კერძო ბუნებრივ ენობრივი შესატყვისიდანაც:

(7-34) **ზოგიერთი კატა ავია.**
ზოგიერთი ძაღლი ავია.

∴ **ზოგიერთი კატა ძაღლია.**

იმისათვის, რომ გამონათქვამს (ფორმულას) ან E.I., ან U.I. წესის გამოყენებით კვანტორი მოვაცილოთ, მას (ე.ი. კვანტორს) უნდა ეკავოს გამოსახულების უკიდურესი მარცხენა ადგილი და წინ არ უნდა უძღოდეს არც ერთი სხვა კვანტორი ან ლოგიკური კავშირი. ეს იმას ნიშნავს, რომ გამონათქვამის მისგან (ე.ი. ამ კვანტორისგან) განსხვავებული გამოსახულებითი ნაწილი მთლიანად უნდა შედიოდეს მის (ე.ი. ამ კვანტორის) მოქმედების არეში. ამდენად, ~(∀x)(P(x)&Q(x)) ფორმულა არ შეიძლება U.I. წესით განკერძოებულ იქნას როგორც ~(P(v)&Q(v)), რადგან უარყოფის ნიშანი წინ უძღვის კვანტორს. ამ გამოსახულების განსაკერძოებლად თავდაპირველად ის უნდა გარდაიქმნას კვანტორთა უარყოფის წესის გამოყენებით (∃x)~(P(x)&Q(x)) გამონათქვამად და მხოლოდ ამის შემდეგ გვეძლევა შესაძლებლობა E.I. წესის გამოყენებით მისი ~(P(w)&Q(w)) სახის კერძო მაგალითის აგების. ანალოგიურად ზემოაღნიშნულისა, არ შეიძლება E.I. წესის გამოყენებით P(c)→(∃x)Q(x) ფორმულის პირდაპირი განკერძოება და მის კერძო მაგალითად P(c)→Q(w) გამონათქვამის გამოცხადება, რადგან არსებობის კვანტორი არ არის გამოსახულების უკიდურესი მარცხენა შემადგენელი. მაგრამ, იგივე კერძო მაგალითის მიღება შესაძლებელია (ე.ი. ლეგიტიმურია) (∃x)(P(c)→Q(x)) გამონათქვამიდან, რომელიც თავდაპირველი ფორმულის იგივურია და მისგან კვანტორთა წინსართად გატანის მე-9 კანონის ერთჯერადი გამოყენებით მიიღება. ასევე არ შეიძლება ზოგადობის კვანტორის პირდაპირი მოცილების გზით (∀x)P(x)&(∃y)Q(y) გამოსახულების უნივერსალური განკერძოება. მართალია, (∀x) კვანტორს ფორმულის უკიდურესი მარცხენა ადგილი უკავია, მაგრამ ფორმულის დანარჩენი გამოსახულებითი ნაწილი სრულად არ შედის ამ კვანტორის მოქმედების არეში. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად ეს გამონათქვამი თავდაპირველად უნდა მივიყვანოთ მის პრენექსულ ნორმალურ ფორმამდე (PNF ფორმამდე), და მხოლოდ შემდეგ უნდა იქნეს გამოყენებული E.I. და U.I. წესებიდან შესაბამისი.

პირუკუ ოპერაციის დროს კვანტორი მარცხნიდან ეწერება განსაზოგადებელ გამონათქვამს და მთლიანად მოიცავს მას თავის მოქმედების არეში. ამდენად, P(v)∨Q(v) გამონათქვამი არ შეიძლება განვაზოგადოთ კვანტორის შუაში ჩასმით და ვთქვათ P(v)∨(∃x)Q(x) ფორმულის მიღებით, ისევე როგორც არ შეიძლება P(v)∨Q(v) გამონათქვამის U.G. წესით განზოგადებისას შედეგად მივიღოთ (∀x)P(x)∨Q(v) ფორმულა, რადგან, ამ შემთხვევაში, უნივერსალური კვანტორის მოქმედების არეში არ შედის Q(v).

შევახსენებთ, რომ პირობითი მტკიცების მეთოდი საშუალებას იძლევა დამხმარე წინაპირობის სახით გავაკეთოთ დაშვება P, რომელიც დროებით ჭეშმარიტად მიიჩნევა, ხოლო P დაშვებიდან და თავდაპირველი წინაპირობებიდან თუ გამოიყვანება Q, მაშინ ვასკვნით, რომ თავდაპირველი წინაპირობებიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს (ე.ი. თავდაპირველი წინაპირობების ლოგიკური შედეგია) P→Q ფორმულა. რამდენადაც, პირობით დამტკიცებაში P მხოლოდ იმ მიზნით ცხადდება პირობით ჭეშმარიტებად, რომ ამის გათვალისწინებით

დასაბუთდეს $P\rightarrow Q$ გამონათქვამი და რამდენადაც პირობითი მტკიცებისას, სინამდვილეში, P გამონათქვამი არც მტკიცდება და არც უარიყოფა, და რამდენადაც დამტკიცების დასრულების შემდეგ მისი ჭეშმარიტულობის საკითხი მნიშვნელობას კარგავს, უნდა ვივარაუდოთ, რომ სინამდვილეში, ამგვარი პირობითი მტკიცებებისას, იგი (ე.ი. P ანუ დამხმარე წინაპირობა) შეიძლება იყოს სრულიად ნებისმიერი ანუ, როგორც ჭეშმარიტი, ისე მცდარი. პრედიკატთა აღრიცხვაში მტკიცების პირობითი ნაწილის პირველი სტრიქონი შეიძლება იყოს კვანტიფიცირებული ფორმულაც, მაგ., $(\forall x)P(x)$ ან $(\forall x)(\exists x)Q(x,y)$, ან პრედიკატი კონსტანტური ტერმებით, მაგ., $P(s)$ ან $L(a,b)$. კერძოდ, პირობითი წინაპირობა შეიძლება შეიცავდეს v და w სახის კონსტანტურ ტერმებსაც, მაგ., $P(v)$, $L(w,v)$, სადაც v კონსტანტა, როგორც ადრე განისაზღვრა, არის საინტერპრეტაციო დისკურსში (ე.ი. არეში) სრულიად ნებისმიერად შერჩეული კონსტანტა, ხოლო w კონსტანტა კი არის კონსტანტა, რომელიც უზრუნველყოფს არსებობის კვანტორით კვანტიფიცირებული გარკვეული გამონათქვამის ჭეშმარიტ გაკერძოებას, რაც საინტერპრეტაციო არეში (ე.ი. დისკურსში) მის ერთგვარ შეზღუდულობას განაპირობებს. ქვემოთ მოყვანილ მაგალითში მტკიცების პირობითი ნაწილი იწყება $P(v)$ გამონათქვამით.

(7-35)

1.	$(\forall x)((P(x)\vee Q(x)) \rightarrow R(x))$	
2.	$(P(v)\vee Q(v)) \rightarrow R(v)$	**1, U.I.**
3.	$\mid P(v)$	**დამხ. დაშვება**
4.	$\mid P(v)\vee Q(v)$	**3, Add.** (∨-გაფართოება)
5.	$\mid R(v)$	**2, 4, M.P.**
6.	$P(v) \rightarrow R(v)$	**3-5, პირობ. დამტკიცება**
7.	$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$	**6, U.G.**

გთავაზობთ ამ მსჯელობის ერთ-ერთ შესაძლო ბუნებრივ ენობრივ კერძო შემთხვევას:

(7-36) **ყველა, ვინც მშვიდია ან ჩხუბისთავი, მემარჯვენეა**

∴ ყველა, ვინც მშვიდია, მემარჯვენეა.

ქვემოთ მოყვანილ დამტკიცებაში პირობით მიღებული დაშვება არის $P(c)$, სადაც c არის კონკრეტული კონსტანტური ტერმი.

(7-37)

1.	$(\forall x)(P(c) \rightarrow Q(x))$	
2.	$P(c) \rightarrow Q(v)$	**1, U.I.**
3.	$\mid P(c)$	**დამხ. დაშვება**
4.	$\mid Q(v)$	**2, 3, M.P.**
5.	$\mid (\forall x)Q(x)$	**4, U.G.**
6.	$P(c) \rightarrow (\forall x)Q(x)$	**3-5, პირობ. დამტკიცება**
7.	$(\exists y)(P(y) \rightarrow (\forall x)Q(x))$	**6, E.G.**

ყურადღება მიაქციეთ, რომ მე-7 სტრიქონში არსებობის კვანტორის მოქმედების არე მოიცავს მთელ პირობით გამონათქვამს. ტექნიკურად არასწორი იქნებოდა, E.G. წესით მე-6 სტრიქონიდან რომ გამოგვეყვანა $(\exists y)P(y)\rightarrow(\forall x)Q(x)$, რადგან ასეთ შემთხვევაში არსებობის

კვანტორით დაბმული იქნებოდა პირობითი გამონათქვამის მხოლოდ პირობითი ნაწილის ცვლადი და, შესაბამისად, ეგზისტენციალურად განმაზოგადებელი $(\exists y)$ კვანტორის ქვეშ არ მოექცეოდა მთლიანი განსაზოგადებელი ფორმულა, რაც, როგორც უკვე აღინიშნა, E.G. წესის ლოგიკური აღნაგობიდან გამომდინარე დაუშვებელია. მაგალითად, დავუშვათ, რომ $(\forall x)Q(x)$ მცდარი, $(\exists y)P(y)$ და $(\exists y)\sim P(y)$ კი ჭეშმარიტი გამონათქვამებია. ასეთ პირობებში, ცხადია, რომ $(\exists y)(P(y)\rightarrow(\forall x)Q(x))$ ჭეშმარიტი გამონათქვამია, მაშინ როდესაც $(\exists y)P(y)\rightarrow(\forall x)Q(x)$ გამონათქვამი მცდარია.

განვიხილოთ ზემომოყვანილი მსჯელობის ერთი ბუნებრივ ენობრივი მაგალითი:

(7-38) **თუკი ჯონსი მღვდელია, მაშინ ყველა ყოფილა ამის შემძლე.**

∴ **არსებობს ვიღაც ისეთი, რომ თუკი ის მღვდელია, მაშინ ყველა ყოფილა ამის შემძლე.**

ცხადია, არასწორი იქნებოდა დაგვესკვნა, რომ თუკი არსებობს ერთი მღვდელი მაინც, მაშინ ყველა ყოფილა ამის შემძლე.

(7-39) არის კვანტორთა დისტრიბუციის ერთ-ერთი კანონის დამტკიცების ერთი ნაწილი.

(7-39)

1.	$(\forall x)(P(x)\ \&\ Q(x))$	**დამხმ. დაშვება**
2.	$P(v)\ \&\ Q(v)$	**1, U.I.**
3.	$P(v)$	**2, &-გამარტ.**
4.	$(\forall x)P(x)$	**3, U.G.**
5.	$Q(v)$	**2, &-გამარტ.**
6.	$(\forall x)Q(x)$	**5, U.G.**
7.	$(\forall x)P(x)\ \&\ (\forall x)Q(x)$	**4,6, Conj.(&-დაკავშირება)**
8.	$(\forall x)(P(x)\ \&\ Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x)\ \&\ (\forall x)Q(x))$	**1-7, პირობ. დამტკიცება**

როგორც ამ მაგალითიდანაც ჩანს, პირობითი დამტკიცება შეიძლება არც ეყრდნობოდეს რაიმე წინაპირობას გარდა იმ დამხმარე წინაპირობისა, რომლითაც უშუალოდ იწყება ასეთი უწინაპირობო პირობითი დამტკიცება. ასეთი მტკიცებებისას მიღებული პირობითი გამონათქვამის ჭეშმარიტება არაა დამოკიდებული რაიმე სხვა წინაპირობაზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ ასეთი დასკვნა არის ტავტოლოგიური (ე.ი. ზოგადმართებული) გამონათქვამი. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, გავიხსენოთ, რომ შემდეგი სახის ნებისმიერი მართებული მტკიცებითი სქემისათვის

(7-40)

$$\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \hline \therefore\ \psi \end{array}$$

პირობითი გამონათქვამი $(\varphi_1\&\varphi_2\&\varphi_3 \dots)\to\psi$ არის ტავტოლოგია. (7-39) მტკიცების პირველი შვიდი სტრიქონი შეგვიძლია განვიხილოთ არა როგორც პირობითი მტკიცება, არამედ როგორც $(\forall x)(P(x)\&(\forall x)Q(x)$ გამონათქვამის პირდაპირი მტკიცება $(\forall x)(P(x)\&Q(x))$ წინაპირობის საფუძველზე და, ამდენად, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ გამონათქვამი $(\forall x)(P(x)\&Q(x))\to(\forall x)(P(x)\&(\forall x)Q(x)$ არის ტავტოლოგია. საზოგადოდ, ცხადია, რომ (7-40) მტკიცებითი სქემით აგებულ ნებისმიერ პირდაპირ დამტკიცებას შეესაბამება შემდეგი სქემით აგებული პირობითი დამტკიცება

(7-41)			
	1.	$(\varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \dots)$	**დამხმ. დაშვება**
	2.	φ_1	**1, &-გამარტ.(Simp.)**
	3.	φ_2	**2, &-გამარტ.(Simp.)**
	4.	φ_3	**3, &-გამარტ.(Simp.)**
		.	. . .
		.	. . .
		.	. . .
	n.	ψ	**წინა რიგების ლოგიკური შედეგი**
	n + 1.	$(\varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \dots) \to \psi$	**1, n, პირობ. დამტკიცება**

რომელშიც ყველა წინაპირობა განიხილება უფრო როგორც პირობითი წინაპირობა და არა როგორც თავიდანვე მოცემული არაპირობითი წინაპირობა და დასკვნის სახით გამოიყვანება ტავტოლოგიური პირობითი გამონათქვამი. ცხადია, რომ ეს ორი განსხვავებული მტკიცებითი სქემა საბოლოო ჯამში იძლევა ერთი და იგივე გამონათქვამის მტკიცებას: კერძოდ კი იმისა, რომ $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$, ... წინაპირობებიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს ψ დასკვნა. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ პირველ შემთხვევაში ვიცით ამ წინაპირობების ჭეშმარიტება, მეორე შემთხვევაში კი - არა.

მრავალჯერ კვანტიფიცირებული, მაგ., $(\forall x)(\exists x)P(x,y)$ ან $(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(y)$ სახის გამონათქვამების, მამტკიცებელი მსჯელობების (დასაბუთებების) ასაგებად ჩვენ არსებითად იგივე წესებსა და იგივენაირ პროცედურებს ვიყენებთ, როგორებითაც ვსარგებლობდით ერთგზის კვანტიფიცირებული გამონათქვამების მტკიცებებისას: ჯერ U.I. და E.I წესებით ვიშორებთ კვანტორებს. მერე უკვე მიღებული უკვანტორო ფორმულის მიმართ ვიყენებთ ზემოგანხილულ გამოყვანის წესებს და შემდეგ ისევ ვაბრუნებთ კვანტორებს E.G. და U.G. წესების გამოყენებით. მრავალჯერ კვანტიფიცირებულ გამონათქვამებში U.I. და E.I. წესების გამოყენებით კვანტორებს თანდათან, ერთმანეთის მიყოლებით იშორებენ. პროცესი იწყება უკიდურესი მარცხენა კვანტორით; ამ შემთხვევაშიც, ისევე როგორც ადრე, მხოლოდ იმ კვანტორის მოცილება შეიძლება, რომლის მოქმედების არეც მოიცავს მთელ გამონათქვამს. ამისთვის შესაძლოა თავდაპირველად საჭირო გახდეს 7.3 პარაგრაფში აღწერილი კანონების მიხედვით დასამუშავებელი გამონათქვამის გარდაქმნა პრეფიქსული ფორმის იგივურ გამონათქვამად. სირთულეს იწვევს ის მოთხოვნა, რომ U.I. და E.I წესების თანამიმდევრული გამოყენებისას ერთმანეთში არ უნდა აირიოს განსხვავებული ცვლადები. მაგალითად, U.I. წესით $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ გამონათქვამიდან ვიღებთ $(\forall y)P(v,y)$, მაგრამ თუ ამის შემდეგ ამ ფორმულას ისევ v კონსტანტის გამოყენებით დავაკონკრეტებთ, და $P(v,v)$ გამონათქვამს დაკონკრეტების შედეგად გამოვაცხადებთ, მაშინ ჩვენ დაგვეკარგება მონაცემი იმის თაობაზედ, რომ $P(x,y)$ არის ორცვლადიანი, და არა ერთცვლადიანი პროპოზიციული ფუნქცია. U.G. წესის გამოყენებით $P(v,v)$ გამონათქვამის განზოგადების შედეგი შეიძლება იყოს მხოლოდ $(\forall x)P(x,x)$ და არა

$(\forall x)(\forall y)P(x,y)$, რადგან ჩვენ არ გვაქვს უფლება $P(v,v)$ ფორმულაში v კონსტანტას ზოგი შემოსვლა დავაბათ ერთი კვანტორით, ზოგი შემოსვლა კი – მეორეთი. $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ ფორმულის განკერძოებისას ჩვენ შეგვეძლო გამოგვეყენებინა ორი განსხვავებული v_1 და v_2 სიმბოლო ისე, რომ თითოეულს გამოეხატა ნებისმიერად შერჩეული კონსტანტა, რომლებიც, სწორედ იმიტომ, რომ განსხვავებულნი არიან, $P(x,y)$ პროპოზიციულ ფუნქციას უნარჩუნებენ მის ზოგად ორადგილიან ფორმას. მიუხედავად იმისა, რომ განსხვავებული ცვლადების განკერძოების ასეთ შემთხვევებში **დასაშვებია ანუ ლოგიკურად მიზანშეწონილი და არაწინააღმდეგობრივია** განსხვავებულ სიმბოლოთა გამოყენება, ეს არაა **აუცილებელი**. მაგალითად, $P(v,v)$ არის $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ ფორმულის ერთ-ერთი ლეგიტიმური განკერძოება და, ამდენად, $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ ფორმულიდან, ცხადია, ლოგიკურად გამომდინარეობს $(\forall x)P(x,x)$. მაგრამ, პირიქით, ამ უკანასკნელიდან არ გამომდინარეობს პირველი და, ამიტომაც, თუკი დამტკიცებაში ჩვენ უკვე მოვახდინეთ განსხვავებული ცვლადების შერწყმა, უნდა გვახსოვდეს, რომ ცვლადების თავდაპირველი განსხვავებულობა ველარ აღდგება განზოგადების ბიჯებში.

განვიხილოთ შემდეგი დამტკიცება:

(7-42)	1.	$(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow Q(y, x))$	
	2.	$(\forall x)(\forall y)(Q(y, x) \rightarrow R(x))$	
	3.	$(\forall y)(P(v_1, y) \rightarrow Q(y, v_1))$	**1, U.I.**
	4.	$P(v_1, v_2) \rightarrow Q(v_2, v_1)$	**3, U.I.**
	5.	$(\forall y)(Q(y, v_1) \rightarrow R(v_1))$	**2, U.I.**
	6.	$Q(v_2, v_1) \rightarrow R(v_1)$	**5, U.I.**

მე-5 და მე-6 სტრიქონებში განკერძოება შეიძლებოდა განხორციელებულიყო სხვა ნებისმიერი კონსტანტებითაც, მაგრამ v_1 და v_2 კონსტანტების, ანუ იმავე კონსტანტების შერჩევამ, რომლებიც მე-3 და მე-4 სტრიქონებში გვხვდებოდა, საშუალება მოგვცა მე-4 და მე-6 სტრიქონების მიმართ გამოგვეყენებინა H.S. წესი

7.	$P(v_1, v_2) \rightarrow R(v_1)$	**4, 6, H.S.**
8.	$(\forall y)(P(v_1, y) \rightarrow R(v_1))$	**7, U.G.**
9.	$(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow R(x))$	**8, U.G.**

მე-8 და მე-9 სტრიქონებში v_1 და v_2 კონსტანტების გასწვრივ განზოგადების რიგითობას არანაირი მნიშვნელობა არ აქვს, რადგან ორივე კვანტორი არის ზოგადობის კვანტორი. ასევე, v_1 და v_2 კონსტანტებისათვის, ცხადია, x და y ცვლადების შერჩევა მოხდა სრულიად ნებისმიერად. – დასკვნა შეიძლებოდა ასეც ჩაგვეწერა $(\forall y)(\forall x)(P(y,x)\rightarrow R(y))$.

წინაპირობები ყველგან რომ ერთი და იგივე v კონსტანტით ყოფილიყო დაკონკრეტებული, მაშინ მე-7 სტრიქონი იქნებოდა $P(v,v)\rightarrow R(v)$, რომლის განზოგადება და, შესაბამისად, $(\forall x)(P(x,x)\rightarrow R(x))$ გამონათქვამის მიღება შესაძლებელია ერთი უნივერსალურად განმაზოგადებელი ბიჯით, რომელიც, ცხადია, ამ წინაპირობებიდან ასევე მართებულად მიღებული დასკვნაა, მაგრამ ეს დასკვნა უფრო კერძოა და, შესაბამისად, უფრო სუსტიცა ზემოთ (7-42) მსჯელობით გამოყვანილ დასკვნაზე.

გთავაზობთ კიდევ ერთ მაგალითს მართებული მსჯელობისა, რომელიც ამუშავებს მრავალგზის კვანტიფიცირებულ გამონათქვამებს:

(7-43) **ყველა, ვისაც ოდესმე ერთი ადამიანისთვის მაინც შეუნდვია, წმინდანია.**
წმინდანები არ არსებობენ.

∴ არასდროს არავის არავისთვის არ შეუნდვია.

'xს შეუნდვია yისთვის' პრედიკატული ფრაზა აღვნიშნოთ ორადგილიანი $F(x,y)$ პრედიკატით, ხოლო 'x წმინდანია' გამოთქმას ერთადგილიანი $S(x)$ პრედიკატი შევუსაბამოთ.

(7-44)

1.	$(\forall x)(\forall y)(F(x, y) \rightarrow S(x))$	
2.	$\sim(\exists x)S(x)$	
3.	$(\forall y)(F(v_1, y) \rightarrow S(v_1))$	**1, U.I.**
4.	$F(v_1, v_2) \rightarrow S(v_1)$	**3, U.I.**
5.	$(\forall x) \sim S(x)$	**2, კვანტ. უარყ.**
6.	$\sim S(v_1)$	**5, U.I.**
7.	$\sim F(v_1, v_2)$	**4, 6, M.T.**
8.	$(\forall y) \sim F(v_1, y)$	**7, U.G.**
9.	$(\forall x)(\forall y) \sim F(x, y)$	**8, U.G.**

გამონათქვამები, რომლებიც შეიცავენ როგორც ზოგადობის, ისე არსებობის კვანტორებს, ქმნიან დამატებით სირთულეებს იმ რიგითობასთან დაკავშირებით, რომლის დაცვითაც ეს კვანტორები გამონათქვამებში კვლავ უნდა აღდგენ E.G და U.G. წესების გამოყენებით. დავუშვათ, რომ $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$ ჯერ განკერძოვდა E.I. და შემდეგ კი - U.I. წესის გამოყენებით და რომ ამ გზით მიღებულ იქნა $L(w,v)$ გამონათქვამი. ახლა შეიძლება ავადგინოთ ეს კვანტორები, და რა რიგითობითაც არ უნდა გამოვიყენოთ E.G. და U.G. წესები მივიღებთ მართებულ დასკვნას. ჯერ U.G. წესის, ხოლო შემდეგ კი E.G. წესის გამოყენება მოგვცემს თავდაპირველ გამონათქვამს, ხოლო თუ განზოგადება და, შესაბამისად, კვანტორების აღდგენა მოხდება შებრუნებული რიგით, მივიღებთ $(\forall y)(\exists x)L(x,y)$ გამონათქვამს, რომელიც ლოგიკურად გამომდინარეობს $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$ გამონათქვამიდან. (გამონათქვამიდან **არსებობს ისეთი ადამიანი, რომელსაც ყველა უყვარს** გამომდინარეობს, რომ **ნებისმიერი ადამიანი ერთ ვიღაცას მაინც უყვარს**). მაგრამ, თუ ჩვენ მოგვიწევს $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ გამონათქვამის განკერძოება, რომელშიც ზოგადობის კვანტორი წინ უსწრებს არსებობის კვანტორს, ხოლო შემდეგ მოვახდენთ მის განზოგადებას და კვანტორებს აღვადგენთ მათი განკერძოების რიგის მიხედვით (ანუ თუ ჯერ აღვადგენთ პირველად განკერძოებულ ზოგადობის კვანტორს, ხოლო შემდეგ მეორედ განკერძოებულ არსებობის კვანტორს) მივიღებთ არასწორ დასკვნას. $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ სახის გამონათქვამიდან (მაგ., **ყველას უყვარს ერთი მაინც ადამიანი**), ლოგიკურად არ გამომდინარეობს $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$ სახის გამონათქვამი (მაგ., **ვიღაც ერთი ადამიანი ყველას უყვარს**). ამგვარად, იმისთვის, რომ განვაზოგადოთ გამონათქვამი, რომელიც შეიცავს როგორც v, ისე w სახის კონსტანტებს აუცილებლად უნდა ვიცოდეთ ის რიგითობა, რომლითაც ეს კონსტანტები თავდაპირველად იქნენ შემოყვანილი U.I. და E.I. წესების გამოყენებით. თუკი ჯერ გამოყენებულ იქნა U.I. წესი, შემდეგ კი E.I. წესი, მაშინ განზოგადება უნდა მოხდეს ასეთი რიგით: ჯერ E.G. წესით და მხოლოდ ამის შემდეგ უნდა განზოგადდეს U.G. წესით, ხოლო თუკი E.I. წესის გამოყენება წინ უსწრებდა U.I. წესის

გამოყენებას, მაშინ დასაშვებია E.G. და U.G. წესების გამოყენების ნებისმიერი რიგი. აქ განხილული შეზღუდვის ილუსტრირება ხდება ქვემოთ მოცემული მსჯელობის დამტკიცებაში.

(7-45) **ყველა ადამიანს ჰყავს მამა.**
ყველა ბულგარელი ადამიანია.
$\therefore$ **ყველა ბულგარელს ჰყავს მამა.**

მომდევნო დამტკიცებაში ‘xი ადამიანია’ გამოიხატება ერთადგილიანი H(x) პრედიკატით; ორადგილიანი F(x,y) პრედიკატით აღნიშნულია გამოთქმა ‘xი არის yის მამა’; ერთადგილიანი B(x) პრედიკატი კი აღნიშნავს ‘xი ბულგარელია’ ჩანაწერს.

(7-46)	1.	$(\forall y)(\exists x)(H(y) \rightarrow F(x, y))$	
	2.	$(\forall x)(B(x) \rightarrow H(x))$	
	3.	$(\exists x)(H(v) \rightarrow F(x, v))$	**1, U.I.**
	4.	$H(v) \rightarrow F(w, v)$	**3, E.I.**
	5.	$B(v) \rightarrow H(v)$	**2, U.I.**
	6.	$B(v) \rightarrow F(w, v)$	**4, 5, H.S.**

რამდენადაც v შემოყვანილ იქნა U.I. წესის გამოყენებით იქამდე, ვიდრე E.I. წესის გამოყენებით w კონსტანტას შემოვიყვანდით (მე-3 და მე-4 სტრიქონები), მათი განზოგადება საპირისპირო რიგით უნდა მოხდეს.

7.	$(\exists x)(B(v) \rightarrow F(x, v))$	**6, E.G.**
8.	$(\forall y)(\exists x)(B(y) \rightarrow F(x, y))$	**7, U.G.**

მათი პირიქითი რიგით განზოგადების შემთხვევაში მივიღებდით $(\exists x)(\forall y)(B(y)\rightarrow F(x,y))$ გამონათქვამს, რაც ჩვენი ბუნებრივ ენობრივი მაგალითისთვის, შემდეგ დასკვნას იძლევა: **არსებობს ერთი ისეთი ადამიანი მაინც, რომელიც არის ყველა ბულგარელის მამა**.

7.5 ბეთსის ცხრილები

არაპრედიკატულ გამონათქვამთა ლოგიკაში ბეთსის ცხრილური მეთოდით ჩვენ ვეძებდით გამონათქვამების შემადგენელი ატომალური ქვეფორმულების ისეთ ჭეშმარიტულ შეფასებებს (დამნიშვნელობებს), რომელთათვისაც გამონათქვამის პირობითი ნაწილი ხდებოდა ჭეშმარიტი, ხოლო დასკვნითი ნაწილი – მცდარი. ამით ჩვენ ვაგებდით მთელი გამონათქვამის იგივურად ჭეშმარიტობის უარმყოფელ მაგალითს, რომელსაც განსახილველი გამონათქვამის ზოგადმართებულობის უარმყოფელი მაგალითი ვუწოდეთ. ახლა შევეცდებით ეს მეთოდი განვავრცოთ კვანტიფიცირებულ ფორმულებზე და მოვძებნოთ ინდივიდური ცვლადების ისეთი შეფასებები (დამნიშვნელობები), რომელთათვისაც მთლიანი დასამტკიცებელი ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ხდება მცდარი. მოქმედების პრინციპი აქაც ისეთივეა, როგორიც გამონათქვამთა ლოგიკის გამონათქვამების შემთხვევაში იყო. კვანტიფიცირებული დასაბუთება (მსჯელობა) მართებულია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, თუკი, საბოლოოდ, ამ დასაბუთების **ყველა ქვეცხრილი იკეტება**. კვანტიფიცირებული ფორმულებისთვის ცხრილების შესადგენად

დაგვჭირდება ოთხი ახალი წესი, ორ-ორი თითოეული კვანტორისთვის, და ეს იმისდამიხედვით, ეს კვანტორი არის ცხრილის **ჭეშმარიტ** თუ **მცდარ** სვეტში. თავდაპირველად გავარჩევთ რამდენიმე მაგალითს და შემდეგ უკვე ზუსტად ჩამოვაყალიბებთ ამ წესებს.

განვიხილოთ მართებული მსჯელობა, რომლის წინაპირობაა $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(c))$, ხოლო დასკვნა - $(\exists x)F(x) \rightarrow G(c)$.

როგორც ვიცით, ზოგადი გამონათქვამის (ე.ი. უნივერსალურად კვანტიფიცირებული ფორმულის) ჭეშმარიტება მოწმდება ყველა იმ ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის გადამოწმებით, რომლებიც მიიღებიან ამ ფორმულაში შემავალი ცვლადებისათვის ყველა შესაძლო მნიშვნელობების მინიჭებით და თუ განსახილველი შემთხვევის დისკურსის შესაბამისი საინტერპრეტაციო განსაზღვრის არე უსასრულოა, მაშინ, ცხადია, აღნიშნული პროცესი დაუსრულებლად გაგრძელდება. ამიტომ, ჩვენს შემთხვევაში, უმჯობესი იქნებოდა, თუ თავდაპირველად შევეცდებოდით განსახილველი ფორმულის ბეთსის ცხრილის ჩაკეტვას იმ დასკვნის დახურდავებით (ანუ დაშლით, დახლეჩით), რომელიც თავიდანვე, ცხრილური მეთოდის შესაბამისად, მცდარად განისაზღვრა (ჩაითვალა), რათა ამ გზით გვეპოვნა ცვლადების მნიშვნელობათა ისეთი განაწილება (სისტემა, შეფასება), რომლისთვისაც მთლიანი გამონათქვამი მიიღებდა მცდარ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. მიაქციეთ ყურადღება, რომ განსახილველი მაგალითის დასკვნაში არსებობის კვანტორის მოქმედების არე მთლიანად არ მოიცავს დასკვნის გამომხატველ ფორმულას და რომ გამომდინარეობა ამ დასკვნის მთავარი კავშირია. ამდენად, **მცდარ** სვეტში ჩაწერილი გამონათქვამის მიმართ ჩვენ ვიყენებთ პირობითი გამოსახულების დახურდავების ანუ გამომდინარეობის დაშლის შემდეგ წესს: მცდარი პირობითი გამონათქვამის წინაპირობა უნდა შეფასდეს ჭეშმარიტად, დასკვნა კი – მცდარად. აქედან გამომდინარე, მე-2 სტრიქონად, **ჭეშმარიტ** სვეტში შეტანილ იქნა $(\exists x)F(x)$, ხოლო **მცდარ** სვეტში კი – $G(c)$. რადგან უკვე დავუშვით, რომ $(\exists x)F(x)$ ჭეშმარიტია, მაშინ, ცხადია, უნდა დავუშვათ ისიც, რომ დისკურსის ანუ ინტერპრეტაციის განსაზღვრის არეში უნდა იყოს ისეთი ობიექტი (საგანი), რომელსაც ექნება F თვისება. აღვნიშნოთ ეს ობიექტი a სიმბოლოთი, ჩავთვალოთ $F(a)$ ჭეშმარიტ გამოსახულებად და განვაგრძოთ ცხრილის შევსება. ახლა დასახურდავებელი (დასამუშავებელი) დარჩა მხოლოდ თავდაპირველი ზოგადობის კვანტორიანი წინაპირობა. U.I. გამოყვანის წესის თანახმად, ამ კვანტორიანი წინაპირობის მატრიცა უნდა იყოს ჭეშმარიტი დისკურსის არის ნებისმიერი ობიექტისთვის (საგნისთვის); ამდენად, ის ჭეშმარიტი უნდა იყოს a სიმბოლოთი აღნიშნული ობიექტისათვისაც. ამგვარად, ზოგადობის კვანტორის განსაკერძოებლად ჩვენ ვიყენებთ a გამოსახულებას და ცხრილის **ჭეშმარიტ** სვეტში ვწერთ $F(a) \rightarrow G(c)$ გამოსახულებას. ახლა უკვე შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჭეშმარიტი პირობითი გამონათქვამის დახურდავების წესი, რომელიც ამავდროულად ახურდავებს საწყის ცხრილს ორ ქვეცხრილად და რომლის თანახმადაც $F(a)$ ჯდება პირველი ქვეცხრილის **მცდარ** სვეტში, ხოლო $G(c)$ კი – მეორე ქვეცხრილის **ჭეშმარიტ** სვეტში. მაგრამ, რადგან $F(a)$, ისევე როგორც $G(c)$ ერთდროულად გვხდება ცხრილის როგორც **ჭეშმარიტ**, ისე **მცდარ** სვეტში, ჩვენ ვასკვნით, რომ ამ დახურდავების შედეგად მიღებული ცხრილის ნაწილები (ე.ი. ქვეცხრილები) ჩაიკეტა და რომ ინტერპრეტაციის ანუ დისკურსის განსაზღვრის არეში არ არსებობს ცვლადების ისეთი შინაარსული დამნიშვნელება, რომელიც პირობას ჭეშმარიტ და დასკვნას კი - მცდარ გამონათქვამად აქცევს. აქედან გამომდინარე, განსახილველი მსჯელობა (ანუ მტკიცება) მართლაც მართებულია (ანუ სწორია). (7-47) არის ამ მსჯელობის სრული ცხრილი:

(7-47) $D = \{c, a\}$

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
1.	$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(c))$	$(\exists x)F(x) \rightarrow G(c)$
2.	$(\exists x)F(x)$	$G(c)$

3.	F(a)		
4.	F(a) → G(c)		
5.	5_1 | 5_2 G(c)	5_1 F(a)	5_2
	––––– | ––––––––––	–––––––––	––––––––
	––––– | ––––––––––	–––––––––	––––––––

დისკურსის განსაზღვრის არის ნაწილი (ე.ი, ქვესიმრავლე), რომელიც ამ მტკიცებისას გამოვიყენეთ, შეიცავს მხოლოდ a და c ინდივიდური კონსტანტებით აღნიშნულ ობიექტებს. მაგრამ, რამდენადაც a შეირჩა გარკვეულ შეზღუდვაში სრულიად ნებისმიერად, ჩვენ შეგვეძლო ზუსტად ასეთივე ცხრილის აგება ამავე შეზღუდვაში ნებისმიერი სხვა ოღონდ c კონსტანტისგან განსხვავებული კონსტანტისთვისაც. ცხადია, მტკიცება სხვანაირად წარიმართებოდა, ჩვენ რომ წინაპირობის უნივერსალური განკერძოებისას c კონსტანტა გამოგვეყენებინა, რადგან c თავიდანვეა მოცემული და იგი აშკარად არაა შერჩეული განსაკერძოებელი ფორმულის მოთხოვნებისგან განსხვავებული მოთხოვნებისადმი ნებისმიერობის მიხედვით. კვანტიფიცირებული ფორმულების ცხრილების შედგენისას ჩვენ მხედველობის არიდან არ ვკარგავთ მტკიცებაში გამოყენებულ ობიექტთა (საგანთა) სიმრავლეს და ვწერთ ამ საგნების აღმნიშვნელი კონსტანტების ჩამონათვალს ცხრილის გვერდით; ეს მეტად მოსახერხებელია იმ შემთხვევაში, როცა გვიწევს ისეთი წესის გამოყენება, რომელიც ითვალისწინებს გარკვეულ შეზღუდვებს დასამუშავებელ ფორმულაში შემავალ კონსტანტებთან დაკავშირებით.

მოვიყვანოთ მართებული მსჯელობის ოდნავ უფრო გართულებული მაგალითი. ამ მსჯელობის წინაპირობებია (წანამძღვრებია) (∀x)(F(x)→~G(x)) და ~(∀x)~F(x), დასკვნა კი არის (∃x)~G(x). თავდაპირველად შევეცდებით გამოვიყენოთ წესები ლოგიკური კავშირებისათვის. ამგვარად, ვიყენებთ რა ჭეშმარიტის უარყოფის წესს ~(∀x)~F(x) წინაპირობის მიმართ (∀x)~F(x) ფორმულას ვწერთ **მცდარ** სვეტში. შემდგომ ამისა, გამომდინარე იქიდან, რომ ეს ფორმულა შეფასებულია მცდარ ზოგად გამონათქვამად, ჩვენ ვასკვნით, რომ უნდა არსებობდეს ისეთი ობიექტი, რომელიც ამცდარებს ~F(x) მატრიცას. დავუშვათ, რომ ეს ობიექტი არის a. ამდენად, ~F(a) არის მცდარი და ვიყენებთ რა მცდარის უარყოფის წესს, ვწერთ F(a) გამოსახულებას **ჭეშმარიტ** სვეტში. ახლა მივუბრუნდეთ არსებობის კვანტორიან დასკვნას. გასაგებია, რომ მისი მცდარად გამოცხადება ამავდროულად ნიშნავს (ამტკიცებს) ისეთი ობიექტის არ არსებობას, რომელიც დააკმაყოფილებდა ე.ი. ჭეშმარიტად აქცევდა ~G(x) ფორმულას. ამგვარად, ~G(a) მცდარად და, შესაბამისად, G(a) ჭეშმარიტად უნდა შეფასდეს. ამის შემდეგ ვამუშავებთ პირველ წინაპირობას და, შესაბამისად, a სიმბოლოს ვიყენებთ ჭეშმარიტი ზოგადური გამონათქვამის განსაკერძოებლად, რაც იმას ნიშნავს, რომ F(a)→~G(a) არის ჭეშმარიტი. ჭეშმარიტი იმპლიკაციური ანუ პირობითი გამონათქვამის დახურდავების წესის თანახმად, F(a) ფორმულას ვწერთ **მცდარ** ქვესვეტში, ხოლო ~G(a) ფორმულას ვწერთ **ჭეშმარიტ** ქვესვეტში. შემდეგ G(a) **ჭეშმარიტი** ქვესვეტიდან გადაგვაქვს **მცდარ** ქვესვეტში და ვკეტავთ ცხრილის ორივე ნაწილს.

(7-48) D = {a}

	ჭეშმარიტი	**მცდარი**
1.	(∀x)(F(x) → ~G(x))	(∃x)~G(x)
	~(∀x)~F(x)	
2.		(∀x)~F(x)
3.		~F(a)
4.	F(a)	
5.		~G(a)

6. G(a)

7. F(a) → ~G(a)

8. 8.$_1$ | 8.$_2$ ~G(a) 8.$_1$ F(a) | 8.$_2$ G(a)

     ----- | ------ ------- | -----

     ----- | ------ ------- | -----

ამ ცხრილიდან კარგად ჩანს, რომ ფორმულის გამამცდარებელი დამნიშვნელების (ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემის, განაწილების) ძიებისას კარგი მეთოდია იმ კონსტანტების გამოყენება, რომლებიც ერთხელ უკვე გამოყენებული გვაქვს და, შესაბამისად, უკვე შეტანილი გვაქვს დისკურსის საინტერპრეტაციო განსაზღვრის არეში. მე-7 ნაბიჯზე ახალი კონსტანტა რომ შეგვერჩია, ჩვენ მოგვიწევდა ცხრილის შევსების გაგრძელება და, შესაბამისად, ცხადია, შემდეგ ბიჯში ვერ მივაღწევდით მის ჩაკეტვას. თუმცა, ისიც ცხადია, რომ, ასეთ შემთხვევაში, ჩვენ უნდა გვემოწმებინა პირველი წინაპირობის ცვლადების ყველა შესაძლო მნიშვნელობები და ადრე თუ გვიან მაინც მოგვიწევდა a კონსტანტის ჩასმა. ასე რომ, ახალი კონსტანტების შემოყვანამდე ჯობია სრულად შემოწმდეს ,,ძველი‘‘ კონსტანტებით გაკეთებადი ყველა შესაძლო განკერძოება (კერძო ჩასმითი მაგალითი). ასეთი მეთოდი საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ ,,უმცირესი‘‘ ანუ ,,უმარტივესი’’ უარმყოფელი მაგალითი, თუ კი ის საერთოდ არსებობს.

შემდეგი მაგალითით ვნახავთ, რომ მაშინაც კი, როცა ცხრილი იკეტება უკვე შერჩეული კონსტანტებისათვის, ზოგადი გამონათქვამის ჭეშმარიტება-მცდარობის საკითხის გასარკვევად ჩვენ უნდა განვაგრძოთ ახალი კონსტანტების შემოტანა და მატრიცის დამუშავება (ე.ი. ახალი კერძო ჩასმითი მაგალითების აგება). – იმ პირობებში, როცა ჯერ კიდევ შესაძლებელია ახლი კონსტანტის შემოტანა, იქამდე, ვიდრე არ ვიპოვით ჩვენი დაშვების გამაბათილებელ მაგალითს, ვერ ვიქნებით დარწმუნებულნი იმაში, რომ ასეთი კონტრმაგალითი არ არსებობს. გასაგებია, რომ ეს განპირობებულია იმ პოტენციური შესაძლებლობებით, რასაც პროცედურაში ახალი კონსტანტის შემოტანა იძლევა. დავსვათ კითხვა: მართებულია თუ არა გამოყვანა (∃x)F(x)→(∀x)F(x)? – რა თქმა უნდა არა, რადგან თუკი რაღაცას აქვს რაღაც თვისება, ჩვენ ჯერ კიდევ ვერ დავასკვნით იმას, რომ ეს თვისება აქვს ყველაფერს. შევადგინოთ ცხრილი, რომელიც გვაპოვნინებს ამ მსჯელობის გამაბათილებელ მაგალითს. თუ (∃x)F(x) წინაპირობა ჭეშმარიტია, მაშინ არსებობს ისეთი a, რომლისთვისაც F(a) ჭეშმარიტია. ახლა, თუ ზოგადობის კვანტორიანი (∀x)F(x) დასკვნის მატრიცის დასაკონკრეტებლად ჩვენ გამოვიყენებთ იგივე a კონსტანტას ცხრილი ჩაიკეტება. მაგრამ ეს არ ნიშნავს იმას, რომ ჩვენ ვერ ვიპოვით კონტრმაგალითს და რომ ასეთი საერთოდ არ არსებობს; ჩვენ უბრალოდ ძალზე შეზღუდული ვითარების მონაწილენი გავხდით, კერძოდ, ჩვენ აღმოვჩნდით ,,სამყაროში‘‘, რომელშიც მხოლოდ ერთი ობიექტი (საგანი) შედიოდა, რაც, ბუნებრივია, შეიძლება არც ემთხვეოდეს ,,მთლიან სამყაროს’’ და, აქედან გამომდინარე, ამომწურავი დასკვნის გაკეთებამდე ჩვენ კიდევ შესამოწმებელი გვაქვს დისკურსის განსაზღვრის არის ყველა დანარჩენი ობიექტიც (საგანიც). ამრიგად, ჩვენ შემოგვყავს ახალი ობიექტი b და ვახდენთ ზოგადობის კვანტორის განკერძოებას ამ b კონსტანტის მეშვეობით. ეს გვაძლევს უარმყოფელი მაგალითის აგების საშუალებას, რაც ნიშნავს იმას, რომ ცხრილი არ იკეტება! – ამდენად, მსჯელობის არამართებულობის დამადასტურებელ ანუ მსჯელობის მართებულობის უარმყოფელ მაგალითს წარმოადგენს მოდელი, რომლის განსაზღვრის არეა D={a,b} და რომელშიც F პრედიკატის ინტერპრეტაციაა სიმრავლე {a}.

(7-49) D = {a, b}

ჭეშმარიტი | **მცდარი**

1. $(\exists x)(F(x)$ $(\forall x)F(x)$
2. $F(a)$
3. $F(a)$

– – – – – – – – – –

– – – – – – – – – –

4. $F(b)$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ნებისმიერი ერთწევრიანი განსაზღვრის არის შემთხვევაში ჩვენ ვერ ავაგებდით გამაბათილებელ მაგალითს და რომ უმცირესი გამაბათილებელი მაგალითის ასაგებად საჭიროა სულ ცოტა ორწევრიანი განსაზღვრის არე. შესაძლოა გაჩნდეს კითხვა, თუ რატომ არ შემოვიყვანეთ ახალი ობიექტი პირდაპირ მე-3 ბიჯზე. ამის მიზეზი ისაა, რომ ჩვენ იმთავითვე ავირჩიეთ მეთოდი, რომლის მიხედვითაც ვიდრე ახალ ობიექტს შემოვიყვანთ, უნდა შევამოწმოთ ყველა „ძველი" ობიექტი. მართალია, ჩვენ შეგვეძლო წინდაწინ განგვეჭვრიტა, რომ პირველ მცდელობაზე ცხრილი არ ჩაიკეტებოდა და რომ მოგვიწევდა ახალი ობიექტის შემოყვანა, მაგრამ ბეთსის ცხრილური მეთოდის მთავარი თვისება ისაა, რომ ის იძლევა მსჯელობათა (დასაბუთებათა, მტკიცებათა) შემოწმების მექანიკურ ანუ ავტომატურ პროცედურას და ასეთ დროს ამა თუ იმ სახის „წინათგრძნობას" ვერ დავემყარებით. ახლა უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ახალი წესები ბეთსის ცხრილებისთვის.

კვანტორთა წესები ბეთსის ცხრილებისთვის

კვანტორთა დასახელება	კვანტორი ჩაწერილია სვეტში **ჭეშმარიტი**	კვანტორი ჩაწერილია სვეტში **მცდარი**
ზოგადობის	კერძო მაგალითი (განკერძოება) აწარმოეთ D არის ნებისმიერი ობიექტით*	ჯერ აწარმოეთ კერძო მაგალითები (განკერძოება) ძველი ობიექტებით და მხოლოდ ამის შემდეგ დაამატეთ D არეს ახალი ობიექტი
არსებობის	ჯერ აწარმოეთ კერძო მაგალითები (განკერძოება) ძველი ობიექტებით და მხოლოდ ამის შემდეგ დაამატეთ D არეს ახალი ობიექტი	კერძო მაგალითი (განკერძოება) აწარმოეთ D არის ნებისმიერი ობიექტით*

* თუ D ცარიელია და თუ თქვენ არ შეგიძლიათ პროცესის გაგრძელება სხვა წესების (მცდარი ზოგადობის კვანტორის ან ჭეშმარიტი არსებობის კვანტორის წესების) გამოყენებით, მაშინ შემოიტანეთ ახალი ობიექტი; ასევე, აუცილებელია უკვე დამუშავებული კვანტორების ხელმეორე გააქტიურება ანუ მათი „განახლება" ყოველთვის, როცა კი ახალი ობიექტი შემოგვაქვს.

მიაქციეთ ყურადღება ჭეშმარიტი ზოგადობის კვანტორისა და მცდარი არსებობის კვანტორის დამუშავების წესების მსგავსებას; ამ ორი წესის თანახმად, ახალი ობიექტი მხოლოდ იმ შემთხვევაში ემატება D არეს, როცა ეს არე ცარიელია და, ამასთან, როცა არ შეგვიძლია ობიექტების სხვა წესებით შემოტანა. თუ D ცარიელია, ამ წესების გამოყენებამდე ახალი ობიექტი სრულიად ნებისმიერად შემოგვყავს. ხოლო, თუ მათ ვიყენებთ არაცარიელი არეების მიმართ, ყოველთვის ვამოწმებთ ყველა ძველ ობიექტს. მაგრამ თუ დანარჩენი ორი წესით (მცდარი ზოგადობისა და ჭეშმარიტი არსებობის წესებით) მოგვიანებით შემოვიდა ახალი ობიექტი, ჩვენ ისევ უნდა შევამოწმოთ, ხომ არ იკეტება ცხრილი ამ ახლად შემოსული ობიექტით, რაც იმას ნიშნავს, რომ უნდა „განვაახლოთ" ჭეშმარიტი ზოგადობის და მცდარი

არსებობის კვანტორთა დამმუშავებელი წესების გამოყენება. წესების მეორე წყვილით (ე.ი. მცდარი ზოგადობის და ჭეშმარიტი არსებობის დამამუშავებელი წესებით) შეიძლება და უნდა შემოტანილ იქნას ახალი ობიექტები მაშინაც კი, როცა ცხრილი უკვე ჩაკეტილია ყველა ძველი ობიექტისათვის.

ბეთსის ცხრილური მეთოდისთვის სტრატეგიულად გამართლებულია ჯერ კავშირების წესების გამოყენება და მხოლოდ ამის შემდეგ სარგებლობა კვანტორთა წესებით, ამ შემთხვევაში არც ის უნდა დავივიწყოთ, რომ ცხრილის დახურდავების (გახლეჩის) შედეგად მიღებული ქვეცხრილი შემოწმდეს მისი ჩაკეტვადობა არ ჩაკეტვადობის თვალსაზრისებით. უნდა გავითვალისწინოთ ისიც, რომ ცხრილის თითოეულ ქვეცხრილს აქვს საკუთარი დისკურსის საინტერპრეტაციო განსაზღვრის არე. მოსალოდნელია, რომ ორი გამაბათილებელი (უარმყოფელი) მაგალითი ერთმანეთისგან განსხვავდებოდეს მათში D სიმრავლის წევრთა მონაწილეობის ოდენობით. თუ მსჯელობა შეიცავს ინდივიდურ კონსტანტებს, მაშინ ცხრილის აგება შეგიძლიათ დაიწყოთ ისეთი განსაზღვრის არით, რომელიც იმდენივე განსხვავებულ ობიექტს შეიცავს, რამდენი განსხვავებული ინდივიდური კონსტანტაც შედის გადასამოწმებელი მსჯელობის ფორმულებში. თუმცა, უნდა გახსოვდეთ, რომ ეს მიდგომა არ იძლევა იმის გარანტიას, რომ თქვენ შეძლებთ **უმარტივესი (ანუ უმცირესი)** უარმყოფელი მაგალითის პოვნას.

გთავაზობთ კიდევ ორ მაგალითს, რომელთა გაცნობისა და გააზრების შემდეგ თქვენ შეძლებთ ცხრილების შედგენას პრედიკატულ ლოგიკაში ფორმალიზებადი ნებისმიერი მსჯელობისათვის.

(7-50) $D = \{a, b\}$

	ჭეშმარიტი	მცდარი
1.	$(\exists x)(\forall y)R(x, y)$	$(\forall x)R(x, x)$
2. $\exists$T	$(\forall y)R(a, y)$	
3. $\forall$T	$R(a, a)$	
4. $\forall$F		$R(a, a)$
	=========	=========
მაგრამ!		
5. $\forall$F		$R(b, b)$
6. $\forall$T	$R(a, b)$	

ამგვარად, ჩვენ აღარ დაგვრჩა წესები, რომლებიც შეიძლება იქნენ გამოყენებულნი და, ამასთან, უკვე მივიღეთ უარმყოფელი მაგალითი, რომელიც განთავსებულია მოდელში, რომლის განსაზღვრის არეა $D=\{a,b\}$, რომელშიც $g(x)=a$, $g(y)=a$ და $g'(x)=b$, $g'(y)=b$ ტოლობებით მოიცემა ცვლადების სხვადასხვა დამნიშვნელება და რომელშიც R პრედიკატის გაშლაა $R=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle\}$. იგულისხმება, რომ ყველაფერი რაც კი არ შედის R პრედიკატის გაშლაში (ანუ ინტერპრეტაციაში) შევა ამ R პრედიკატის დამატებაში. ეს შეიძლებოდა მოცემული ყოფილიყო ექსპლიციტურადაც, თუკი კი შევთანხმდებოდით, რომ წარმოვადგენდით ნებისმიერი პრედიკატის ან მხოლოდ დადებით ან მხოლოდ უარყოფით გაშლებს. ყურადღება მიაქციეთ იმას, რომ მე-6 სტრიქონში ჩვენ „ვაახლებთ“ მე-2 სტრიქონის ჭეშმარიტ ზოგადურ კვანტიფიკაციას და მე-2 სტრიქონის ფორმულის განკერძოებას ვახდენთ მე-5 სტრიქონში შემოტანილი ახალი b კონსტანტით.

(7-51) $D = \{a, \ldots\}$

	ჭეშმარიტი		მცდარი	
1.	$(\forall x)(F(x) \rightarrow {\sim}G(x))$		$(\exists x){\sim}G(x)$	
	$(\exists x){\sim}F(x)$			
2.∃T	${\sim}F(a)$			
3.∀T	$(F(a) \rightarrow {\sim}G(a))$			
4.∃F			${\sim}G(a)$	
5.~T			$F(a)$	
6.~F	$G(a)$			
7.	$7._1$	$7._2$ ${\sim}G(a)$	$7._1$ $F(a)$	$7._2$
		=======		=======

8.3 პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ზოგიერთ ნიშანს, რომლებიც თვისობრივად განასხვავებს ერთმანეთისაგან არაპრედიკატული და კვანტიფიცირებული მსჯელობების ბეთსის ცხრილებს.

7.6 ფორმალური და არაფორმალური მტკიცებები

ზემოთ განხილული ბუნებრივი გამოყვანების პრინციპები შეიძლება გამოყენებულ იქნას სიმრავლეების შესახებ გამონათქვამების დასამტკიცებლად. მიაქციეთ ყურადღება, რომ, მაგალითად, $A \subseteq B$ არის გამონათქვამი, რომელიც ამტკიცებს, რომ სიმრავლეთა A და B წყვილს შორის ძალისმიერია ორადგილიანი პრედიკატული მიმართება, რომელიც გამოითქმება ფრაზით 'არის ქვესიმრავლე'. ის, რომ ამ გამონათქვამს ვწერთ $A \subseteq B$ ფორმით და არა როგორც $\subseteq(A,B)$, განპირობებულია მხოლოდ და მხოლოდ სიმრავლეთა თეორიაში ტრადიციულად მიღებული შეთანხმებებით. ანალოგიურად, $x \in A$ არის ღია გამონათქვამი, რომელიც შეიცავს x ცვლადს და რომელშიც „$\in A$" ასრულებს ერთადგილიანი პრედიკატის ფუნქციას. ამ პირობებში $(\exists x)(x \in A)$ არის გამონათქვამი, რომელიც ამტკიცებს, რომ A არ არის ცარიელი სიმრავლე. გავრცობულობის (ანუ ერთიდაიგივეობის) აქსიომა (ორი სიმრავლე ერთმანეთის ტოლია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ისინი ერთსა და იმავე წევრებს შეიცავენ) შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$(\forall X,Y)(X = Y \leftrightarrow (\forall x)(x \in X \leftrightarrow x \in Y))$$

ქვემოთ ფორმალურად მტკიცდება, რომ $(\forall X,Y)(X=Y \leftrightarrow (X \subseteq Y \& Y \subseteq X))$ (ორი სიმრავლე ტოლია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული მათგანი არის მეორის ქვესიმრავლე) გამომდინარეობს გავრცობულობის აქსიომიდან, როგორც წინაპირობიდან.

(7-52)

1.	$(\forall X, Y)(X = Y \leftrightarrow (\forall x)(x \in X \leftrightarrow x \in Y))$	
2.	$V_1 = V_2 \leftrightarrow (\forall x)(x \in V_1 \leftrightarrow x \in V_2)$	**1, U.I.** (ორჯერ)
3.	$V_1 = V_2 \leftrightarrow (\forall x)((x \in V_1 \rightarrow x \in V_2) \& (x \in V_2 \rightarrow x \in V_1))$	**2, ბიკონდ.**
4.	$V_1 = V_2 \leftrightarrow ((\forall x)(x \in V_1 \rightarrow x \in V_2) \& (\forall x)(x \in V_2 \rightarrow x \in V_1))$	**3, კვანტ. დისტრ.**
5.	$V_1 = V_2 \leftrightarrow (V_1 \subseteq V_2 \& V_2 \subseteq V_1)$	**4, ⊆ განსაზღვრებით**

მე-5 ნაბიჯზე ჩვენ უბრალოდ ჩავანაცვლეთ მე-4 სტრიქონის ორი ქვეგამოსახულება მათი შემოკლებული ფორმებით.

6. $(\forall X, Y)(X = Y \leftrightarrow (X \subseteq Y \ \&\ Y \subseteq X))$ **5, U.G. (ორჯერ)**

ამდენად, მე-6 სტრიქონის გამოსახულება შეგვიძლია მივუმატოთ სიმრავლეების შესახებ არსებულ ჭეშმარიტ გამონათქვამთა ჩამონათვალს (იხ. ცხრილი 1-7).

გთავაზობთ სიმრავლურ-თეორიული გამონათქვამის დამტკიცების მორიგ მაგალითს, რომელიც დამტკიცების გარეშე მოცემული იყო 1 თავის მე-4 პარაგრაფში:

ნებისმიერი X, Y, და Z სიმრავლეებისათვის თუ X არის Y-ის ქვესიმრავლე და Y არის Z-ის ქვესიმრავლე, მაშინ X არის Z-ის ქვესიმრავლე.

სიმბოლურად იგივე შემდეგნაირად ჩაიწერება,

(7-53) $(\forall X,Y,Z)((X\subseteq Y \& Y\subseteq Z)\rightarrow X\subseteq Z)$

ჩვენ მაგალითში გამოყენებულია პირობითი დამტკიცება:

(7-54)	1.	$V_1 \subseteq V_2 \ \&\ V_2 \subseteq V_3$	**დამხმარე წინაპირობა**
	2.	$(\forall x)(x\in V_1 \rightarrow x\in V_2) \ \&\ (\forall x)(x\in V_2 \rightarrow x\in V_3)$	**1, $\subseteq$ განსაზღვრებით**
	3.	$(\forall x)((x\in V_1 \rightarrow x\in V_2) \ \&\ (x\in V_2 \rightarrow x\in V_3))$	**2, კვანტ. დისტრ.(III კანონი)**
	4.	$(v\in V_1 \rightarrow v\in V_2) \ \&\ (v\in V_2 \rightarrow v\in V_3)$	**3, U.I.**
	5.	$v\in V_1 \rightarrow v\in V_2$	**4, &-გამარტ.**
	6.	$v\in V_2 \rightarrow v\in V_3$	**5, &-გამარტ.**
	7.	$v\in V_1 \rightarrow v\in V_3$	**5, 6, H.S.**
	8	$(\forall x)(x\in V_1 \rightarrow x\in V_3)$	**7, U.G.**
	9.	$V_1 \subseteq V_3$	**8, $\subseteq$ განსაზღვრებით**
	10.	$(V_1 \subseteq V_2 \ \&\ V_2 \subseteq V_3) \rightarrow V_1 \subseteq V_3$	**1-9, პირობითი დამტკიცება**
	11.	$(\forall X, Y, Z)((X \subseteq Y \ \&\ Y \subseteq Z) \rightarrow X \subseteq Z)$	**10, U.G. (სამჯერ)**

7.7 მათემატიკური მტკიცებების არაფორმალური სტილი

მათემატიკოსები იშვიათად წარმოადგენენ ხოლმე დამტკიცებებს ისეთი მკაცრი (სრულად) ფორმალიზებული სტილით, როგორსაც ჩვენ ვიყენებდით, რადგან შეუძლიათ ივარაუდონ, რომ მათი მსმენელი საკმაოდ კარგად იცნობს ლოგიკურ იგივეობებს და გამოყვანის წესებს და, ამდენად, ივარაუდონ ისიც, რომ მათთვის საკმარისი იქნება ძირითადი ნაბიჯების მონახაზიც. ამ წიგნის წინა პარაგრაფებში ჩვენც ვიყენებდით მსგავს სტილს (იხ. მაგალითად მე-3 თავის მე-6 პარაგრაფი). გასაგებია, რომ ყოველთვის უნდა შეიძლებოდეს ასეთი არაფორმალური დამტკიცების შევსება ისეთ სრულად ფორმალიზებულ ვარიანტამდე, რომელიც, იმ შემთხვევაში, თუ დავეჭვდებით მის სისწორეში, ნაბიჯ-ნაბიჯ ადვილად შემოწმდება. ამდენად, ტერმინი „არაფორმალური“, როცა საქმე დამტკიცებებს ეხება, ნიშნავს „შეკუმშულს“ ანუ „შემოკლებულს“ და არა „დაუდევარს“.

ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანთ (7-54) მტკიცებას იმ ფორმით, როგორც ეს მათემატიკოსს შეეძლო დაეწერა:

(7-55) ვთქვათ, X, Y და Z ნებისმიერი ისეთი სიმრავლეებია, რომ $X \subseteq Y$ და $Y \subseteq Z$. დავუშვათ, x არის X სიმრავლის ნებისმიერი წევრი. რადგან $X \subseteq Y$, ე.ი. $x \in Y$; და რადგან $Y \subseteq Z$, ე.ი. $x \in Z$. ამდენად, $x \in X \rightarrow x \in Z$, ანუ $X \subseteq Z$.

როგორც ვხედავთ, აქ ღიად არ ახსენებენ U.I. და U.G. წესებს, და ის, რომ შედეგი ჭეშმარიტია ყველა სიმრავლისათვის, ნათელი ხდება კონტექსტისა და სიტყვა „ნებისმიერის" გამოყენების წყალობით. როგორც ამას დამტკიცების ბოლო ორი წინადადება მოწმობს, იგულისხმება, რომ მკითხველმა იცის $\subseteq$ პრედიკატის განსაზღვრება და ჰიპოთეტური სილოგიზმის წესი. მთელი მსჯელობა მოცემულია პირობითი დამტკიცების ფორმით, რომელიც იწყება $X \subseteq Y \& Y \subseteq Z$ გამონათქვამით, მაგრამ მკითხველმა თავად უნდა გამოიტანოს შემაჯამებელი დასკვნა $(X \subseteq Y \& Y \subseteq Z) \rightarrow (X \subseteq Z)$ და თავადვე უნდა მოახდინოს მისი უნივერსალური განზოგადება.

შემდეგ მაგალითში ჩვენ ვაყალიბებთ „საკუთრივი ქვესიმრავლის" განსაზღვრებას და გთავაზობთ იმ თეორემის ფორმალურ და არაფორმალურ დამტკიცებებს, რომელიც შეიცავს ამ პრედიკატს.

(7-56) $(\forall X,Y)(X \subset Y \leftrightarrow (X \subseteq Y \& X \neq Y))$

გამოსახულება $X \neq Y$ არის $\sim(X=Y)$ გამოსახულების ალტერნატიული აღნიშვნა. ანალოგიურად, $\sim(X \subseteq Y)$, $\sim(X \subset Y)$ და $\sim(x \in Y)$ გამოსახულებების ნაცვლად შეგვიძლია დავწეროთ ხოლმე შესაბამისად, $X \nsubseteq Y$, $X \not\subset Y$ და $x \notin Y$ გამოსახულებები. (7-56) იგივეობით (ეკვივალენტობით) $\subset$ პრედიკატი განისაზღვრება $\subseteq$ და $=$ პრედიკატების ტერმინებში, რაც, თავის მხრივ, $\in$ პრედიკატის მეშვეობით შეიძლება ასეც გამოიხატოს:

(7-57) $(\forall X,Y)(X \subset Y \leftrightarrow ((\forall x)(x \in X \rightarrow x \in Y) \& \sim(\forall x)(x \in X \leftrightarrow x \in Y)))$

ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ:

ნებისმიერი X და Y სიმრავლეებისათვის, თუ X არის Y სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე, მაშინ არსებობს Y სიმრავლის ისეთი წევრი, რომელიც არაა X სიმრავლის წევრი.

ანუ,

(7-58) $(\forall X,Y)(X \subset Y \rightarrow (\exists x)(x \in Y \& x \notin X))$

(7-59) **დამტკიცება** (ფორმალური):

1.	$V_1 \subset V_2$	**დამხმარე წინაპირობა**
2.	$V_1 \subseteq V_2 \& V_1 \neq V_2$	**1, $\subset$ განსაზღვრებით**
3.	$V_1 \neq V_2$	**2, &-გამარტ.**
4.	$\sim(V_1 \subseteq V_2 \& V_2 \subseteq V_1)$	**3, (7-52)**

5. $V_1 \not\subseteq V_2 \vee V_2 \not\subseteq V_1$ **4, დე მორგ.**

6. $V_1 \subseteq V_2$ **2, &-გამარტ.**

7. $V_2 \not\subseteq V_1$ **5, 6, D.S.**

8. $\sim(\forall x)(x \in V_2 \rightarrow x \in V_1)$ **7, $\subseteq$ განსაზღვრებით**

9. $(\exists x)\sim(x \in V_2 \rightarrow x \in V_1)$ **8, კვანტ. უარყ.**

10. $(\exists x)\sim(x \notin V_2 \vee x \in V_1)$ **9, გამომდ.**

11. $(\exists x)(x \in V_2 \ \&\ x \notin V_1)$ **10, დე მორგ.**

12. $V_1 \subset V_2 \rightarrow (\exists x)(x \in V_2 \ \&\ x \notin V_1)$ **1-11პირობითი დამტკიცება**

13. $(\forall X, Y)(X \subset Y \rightarrow (\exists x)(x \in Y \ \&\ x \notin X))$ **12, U.G. (ორჯერ)**

(7-60) **დამტკიცება** (არაფორმალური): ვთქვათ, X და Y ნებისმიერი სიმრავლეებია და, ამასთან, $X \subset Y$. ამ მიმართების განსაზღვრების თანახმად, $X \subseteq Y$ და $X \neq Y$. ცნობილია, რომ $X=Y$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \subseteq Y$ და $Y \subseteq X$. ამდენად, რადგან $X \neq Y$ და $X \subseteq Y$, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $Y \not\subseteq X$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი x, რომელიც შედის Y სიმრავლეში და არ შედის X სიმრავლეში.

ბოლოს, გთავაზობთ ბინარული მიმართების შემცველი ერთი მტკიცების ფორმალურ და არაფორმალურ ვარიანტებს:

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი R ბინარული მიმართებისათვის, $R=(R^{-1})^{-1}$.

ჩვენ აქ გამოვიყენებთ (7-52)-ში დამტკიცებულ დასკვნას, ანუ იმას, რომ ნებისმიერი X და Y სიმრავლეებისათვის $X=Y$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $(X \subseteq Y \ \&\ Y \subseteq X)$. ამრიგად, ჩვენ ჯერ დავამტკიცებთ $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$, შემდეგ კი იმას, რომ $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$ (ეს მიღებული პროცედურაა იმის საჩვენებლად, რომ ორი სიმრავლე ერთმანეთის ტოლია).

(7-61) **დამტკიცება** (ფორმალური):

1. $\langle v_1, v_2 \rangle \in V$ **დამხმარე წინაპირობა**

[$\langle v_1, v_2 \rangle$ არის ნებისმიერი ბინარული V მიმართების ნებისმიერი დალაგებული წყვილი]

2. $(\forall R)(\forall x, y)(\langle x, y \rangle \in R \leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1})$ **2, ინვერსიის განსაზღვრება**

3. $(\forall x, y)(\langle x, y \rangle \in V \leftrightarrow \langle y, x \rangle \in V^{-1})$ **2, U.I.**

4. $\langle v_1, v_2 \rangle \in V \leftrightarrow \langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1}$ **3, U.I. (ორჯერ)**

5. $(\langle v_1, v_2 \rangle \in V \rightarrow \langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1})\ \&$ **4, იგივურობა**
   $(\langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1} \rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \in V)$

6. $\langle v_1, v_2 \rangle \in V \rightarrow \langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1}$ **5, &-გამარტ.**

7. $\langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1}$ **1, 6, M.P.**

8. $(\forall x, y)(\langle x, y \rangle \in V^{-1} \leftrightarrow \langle y, x \rangle \in (V^{-1})^{-1}$ **2, U.I.**

[ისევ მე-2 სტრიქონის განზოგადება, ამ შემთხვევაში V^{-1}-ის მიმართ]

9. $\langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1} \leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \in (V^{-1})^{-1}$ **8, U.I. (ორჯერ)**

10. $(\langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1} \rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \in (V^{-1})^{-1})\&$ **9, იგივურობა.**
   $(\langle v_1, v_2 \rangle \in (V^{-1})^{-1} \rightarrow \langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1})$

11. $\langle v_2, v_1 \rangle \in V^{-1} \rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \in (V^{-1})^{-1}$ **10, &-გამარტ.**

12. $\langle v_1, v_2\rangle \in (V^{-1})^{-1}$ **7, 11, M.P.**

13. $\langle v_1, v_2\rangle \in V \rightarrow \langle v_1, v_2\rangle \in (V^{-1})^{-1}$ **1-12, პირობითი დამტკიცება**

14. $(\forall x, y)(\langle x, y\rangle \in V \rightarrow \langle x, y\rangle \in (V^{-1})^{-1})$ **13, U.G. (ორჯერ)**

15. $V \subseteq (V^{-1})^{-1}$ **14, $\subseteq$ განსაზღ**ვრებით

16. $(\forall R)R \subseteq (R^{-1})^{-1}$ **15, U.G.**

ანალოგიურად აიგება მტკიცების მეორე ნაწილი, ანუ ის, რომ $(R^{-1})^{-1}\subseteq R$, რაც მკითხველს თავადაც შეუძლია გააკეთოს.

დამტკიცების ზემოთ მოტანილი ნაწილის არაფორმალური ვარიანტი:

(7-62) **დამტკიცება** (არაფორმალური): ვთქვათ, R არის ნებისმიერი ბინარული მიმართება. დავუშვათ, $\langle x,y\rangle\in R$. მაშინ, ინვერსიის განსაზღვრის თანახმად, $\langle y,x\rangle\in R^{-1}$. ისევ და ისევ ინვერსიის განსაზღვრის თანახმად, თუ $\langle y,x\rangle\in R^{-1}$, მაშინ $\langle x,y\rangle\in(R^{-1})^{-1}$. ამრიგად, თუ $\langle x,y\rangle\in R$, მაშინ $\langle x,y\rangle\in(R^{-1})^{-1}$. ამდენად, $R\subseteq(R^{-1})^{-1}$.

თუ ეს მტკიცება განკუთვნილია მკითხველისთვის, რომელიც კარგად ერკვევა შესაბამის ცნებებში, ის შეიძლება კიდევ უფრო შეკვეცილი ფორმით წარმოვადგინოთ:

(7-63) **დამტკიცება:** ვთქვათ, R არის მიმართება და დავუშვათ, რომ $\langle x,y\rangle\in R$. მაშინ $\langle y,x\rangle\in R^{-1}$ და $\langle x,y\rangle\in(R^{-1})^{-1}$. $\therefore$ $R\subseteq(R^{-1})^{-1}$.

ან კიდევ, იგივე დამტკიცებას ასეთი ფორმაც კი შეიძლება ქონდეს:

(7-64) **დამტკიცება:** ტრივიალური.

დამტკიცება გარკვეულწილად არის იმის ჩვენება, რომ რაღაც გამონათქვამი ლოგიკურად გამომდინარეობს დაშვებული წინაპირობებიდან (წანამძღვრებიდან). მაგრამ, ის ასევე არის მცდელობა დავარწმუნოთ რეალური ან წარმოსახვითი მსმენელი ამ ლოგიკური კავშირის არსებობაში. ამიტომ ის, თუ რამდენად მიზნობრივია და გამართლებული ესა თუ ის მტკიცება, დამოკიდებულია იმაზე, თუ კონკრეტული მსმენელი რამდენად გათვითცნობიერებულია ამ სფეროში. თუმცა, ცხადია, რომ დამტკიცება ნებისმიერ შემთხვევაში სწორად უნდა იქნეს ჩამოყალიბებული. მტკიცება, რომლის დეტალიზაციის დონე შესაფერისი იქნებოდა ლოგიკის იმ სახელმძღვანელოსათვის, რომელიც დამწყებთათვისაა განკუთვნილი, ძალზე მომაბეზრებლად და პედანტურად მოეჩვენება გამოცდილ მათემატიკოსს, მაშინ როდესაც შეკუმშული დამტკიცებები, სადაც გამოტოვებულია არაერთი ლოგიკური ნაბიჯი, გაუგებარი იქნება დამწყებთათვის. ამ წიგნში შემდგომი დამტკიცებების აგებისას საორიენტაციოდ აღებულია ისეთი არაფორმალური დონე, რომელიც, ვიმედოვნებთ, არ იქნება არც მეტისმეტად დეტალური და არც გაუგებარი.

სავარჯიშოები

1. თარგმნეთ შემდეგი ქართული წინადადებები პრედიკატული ლოგიკის ენაზე; თავად აირჩიეთ ცვლადები და პრედიკატული ასოები და განმარტეთ თქვენი აღნიშვნები. თუ ფიქრობთ, რომ დასაშვებია ერთზე მეტი თარგმანი, ჩაწერეთ თქვენი ვარიანტები და გაარჩიეთ მათ შორის არსებული განსხვავებები. რაც შეიძლება სრულად წარმოადგინეთ დასაბუთება თარგმანის კვანტორული სტრუქტურის შესახებ.

(ა) ყოველი ობიექტი არის შავი ან თეთრი.
(ბ) ყველაფერი არის შავი ან ყველაფერი არის თეთრი.
(გ) ძაღლი ოთხფეხაა.
(დ) ფიდო ძაღლია.
(ე) ყველას უყვარს ვიღაც.
(ვ) ვიღაც უყვარს ყველას.
(ზ) არის ისეთი ვიღაც, ვინც ყველას უყვარს.
(თ) თუ ვინმეს უყვარს ვინმე, მაშინ ჯონს უყვარს თავისი თავი.
(ი) ჯონის გარდა, არავის არ უყვარს თავისი თავი.
(კ) ყველა კაცს უყვარს ან თვითონ თავისთავი, ან ვინმე ქალი.
(ლ) თუ გიყვარს ქალი, აკოცე ან დაანებე თავი.
(მ) თუ ჯონს არავინ არ კოცნის, მერი აკოცებს.
(ნ) ხალხს, რომელიც ნიუ-იორკში ცხოვრობს, უყვარს ეს ქალაქი.
(ო) თუ ჯონს არ უყვარს ნიუ-იორკი, ის იქ არ ცხოვრობს.
(პ) თუ ვინმეს არ უყვარს ნიუ-იორკი, ის არ იცნობს მას.
(ჟ) თუ ცხრილი ჩაიკეტა, ესე იგი არ არსებობს უარმყოფელი მაგალითი.
(რ) აჩვენე მას თითი და მთელ ხელს წაგართმევს (დანიური ანდაზა).
(ს) ის, ვინც ხმაურიანია, ყველას აწუხებს საკუთარი თავის გარდა.
(ტ) თუ ვინმე ხმაურიანია, ის ყველას აწუხებს.
(უ) თუმცა არავინ არ ხმაურობდა, ჯონი მაინც შეწუხდა.
(ფ) მას ჰყავს მანქანა, მაგრამ ის ველოსიპედითაც დადის.
(ქ) მარტო 18 წლამდე ასაკის ნასვამი მძღოლები იწვევენ მძიმე ავარიებს.
(ღ) არ ატარო მანქანა ნასვამმა!
(ყ) მანქანის მართვა საშიშია, თუ ნასვამი ხარ.
(შ) ყველაფერი კარგია, რაც კარგად მთავრდება.

2. გამონათქვამი $(\forall x)(\forall y)A(x,y)$, სადაც $A(x,y)$ აღნიშნავს 'xმა უპასუხა yს', არ იქნება **ყველამ უპასუხა ყველა კითხვას** წინადადების ადეკვატური თარგმანი, რადგან, როგორც ეს 7.3 პარაგრაფში ვნახეთ, განსაზღვრის არე უნდა შეიცავდეს როგორც ადამიანებს, ისე კითხვებს. ორი განსხვავებული სიმრავლე უნდა წარმოვადგინოთ ორი პრედიკატით, რომელიც იმპლიკაციური ფორმულის პირობაში იქნება ჩაწერილი. ამ ყველაფრის გათვალისწინებით, თარგმნეთ შემდეგი წინადადებები.

(ა) არავის არ უპასუხია ყველა კითხვისთვის.
(ბ) ნებისმიერ კითხვას ერთმა ვიღაცამ მაინც უპასუხა.
(გ) ერთ კითხვას მაინც ყველამ უპასუხა.
(დ) ზოგიერთმა არცერთ კითხვას არ უპასუხა.
(ე) ყველას უყვარს მერი, გარდა თავად მერისა. (გამოიყენეთ $I(x,y)$ იგივურობის მიმართების აღსანიშნავად)
(ვ) ფრედის გარდა ყველამ უპასუხა ერთ კითხვას მაინც.

(ზ) ყველამ, ვინც ერთ კითხვას მაინც გასცა პასუხი, სცადა კიდევ რომელიმე კითხვაზე პასუხის გაცემა.
(თ) არავის არ გაუცია პასუხი იმ კითხვაზე, რომელზეც პასუხის გაცემა ყველამ სცადა.
(ი) ყველამ, ვინც კი სცადა რომელიმე კითხვაზე პასუხის გაცემა, უპასუხა კიდეც მას.

3. გაარკვიეთ, რომელი ცვლადია დაბმული და რომელი თავისუფალი ქვემოთ მოცემულ გამოსახულებებში და ხაზი გაუსვით თითოეული კვანტორის მოქმედების არეს.

(ა) $(\forall x)P(x) \vee Q(x,y)$
(ბ) $(\forall y)(Q(x) \rightarrow (\forall z)P(y,z))$
(გ) $(\forall x)\sim(P(x) \rightarrow (\exists y)(\forall z)Q(x,y,z))$
(დ) $(\exists x)Q(x,y)\ \&\ P(y,x)$
(ე) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists x)Q(y) \rightarrow (\forall z)R(y,z)))$

4. ამ სავარჯიშოს თითოეული ნაწილი შედგება ქართული ფრაზისაგან, ამ ფრაზის თარგმანისაგან პრედიკატული ლოგიკის ენაზე და რამოდენიმე დამატებითი ფორმულისაგან. მიუთითეთ, მათგან რომელი ფორმულა არის მოცემული თარგმანის იგივური (ეკვივალენტური) და ჩამოწერეთ ის კანონები და წესები, რომლებიც საჭიროა ამ იგივურობის (ეკვივალენტურობის) საჩვენებლად. თუ ფორმულა არაა მოცემული თარგმანის ეკვივალენტური, დაწერეთ მისი შესაბამისი ქართული წინადადება.

(ა) ყველას ყავს მამა და ყველა კენტი რიცხვი მთელია.

(**შენიშვნა:** მართალია, დიდია იმის ცდუნება, რომ მოცემული ფორმულა წავიკითხოთ როგორც **'ყველა ადამიანს ყავს მამა ...'**, მაგრამ ეს უზუსტო წაკითხვა იქნებოდა, რადგან ჩვენ არ შეგვიზღუდავს განსაზღვრის არე მხოლოდ ადამიანებით და არც შეგვეძლო ამის გაკეთება, თუ გვინდოდა, რომ პრედიკატები **'კენტი'** და **'მთელი'** გამოგვეყენებინა განსაზღვრის არის ზოგიერთი ელემენტის მიმართ. **ყველა ადამიანი** რომ გვეთარგმნა პრედიკატული ლოგიკის ენაზე, ჩვენ უნდა დაგვემატებინა პირობად პრედიკატი **'ადამიანი'**.)

$$(\forall x)(\exists y)F(y, x)\ \&\ (\forall z)(O(z) \rightarrow I(z))$$

(1) $(\forall z)(\forall x)(\exists y)(F(y, x)\ \&\ (O(z) \rightarrow I(z)))$
(2) $(\forall z)(\exists y)(\forall x)(F(y, x)\ \&\ (O(z) \rightarrow I(z)))$
(3) $(\forall x)(\forall z)(\exists y)(F(y, x)\ \&\ (O(z) \rightarrow I(z)))$

(ბ) თუ ადამი უცოლოა, მაშინ ყველა კაცი არაა ქმარი.

$$B(a) \rightarrow \sim(\forall x)(M(x) \rightarrow H(x))$$

(1) $(\forall x)(B(a) \rightarrow \sim(M(x) \rightarrow H(x)))$
(2) $(\exists x)(B(a) \rightarrow \sim(M(x) \rightarrow H(x)))$
(3) $\sim(B(a) \rightarrow (\forall x)(M(x) \rightarrow H(x)))$
(4) $B(a) \rightarrow (\exists x)(M(x)\ \&\ \sim H(x))$

(გ) მცდარია ის, რომ თუ არსებობს რაღაც ბოროტება, მაშინ ღმერთი არაა მოწყალე.

$\sim ((\exists x)E(x) \rightarrow \sim B(g))$

(1) $((\exists x)E(x) \& B(g))$
(2) $\sim (\forall x)(E(x) \rightarrow \sim B(g))$

5. იპოვეთ ისეთი ორი იგივური (ეკვივალენტური), მაგრამ ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფორმულა, რომელიც იქნება ქვემოთ მოცემული წინადადებების თარგმანი; გამოიყენეთ მოცემული პრედიკატები.

(ა) ყოველი მთელი რიცხვისთვის არსებობს მასზე დიდი მთელი რიცხვი.
$(I(x), L(x, y))$

(ბ) ან ყველა მარტივი რიცხვი კენტია, ან ზოგიერთი მთელი რიცხვი ლუწია, ან ორივე ერთად.
$(P(x), I(x), O(x))$

(გ) თუ არსებობს ისეთი მარტივი რიცხვი, რომელიც არის ლუწი, მაშინ ყველა მარტივი რიცხვი, რომელიც 7-ზე მეტია, არის კენტი.
$(P(x), O(x), G(x, y))$

(დ) თუ ყველა კაცი მოკვდავია, მაშინ სოკრატე მოკვდავია.
$(H(x), M(x))$

6. დაწერეთ შემდეგი ფორმულების ნორმალური პრენექსული ფორმები:

(ა) $((\exists x)A(x) \& (\exists x)B(x)) \rightarrow C(x)$
(ბ) $(\forall x)A(x) \leftrightarrow (\exists x)B(x)$

7. დაამტკიცეთ შემდეგ განსჯათა სისწორე:

(ა)
$$\begin{array}{l} \sim(\exists x)(P(x) \& Q(x)) \\ \underline{(\exists x)(P(x) \& R(x))} \\ \therefore (\exists x)(R(x) \& \sim Q(x)) \end{array}$$

(ბ)
$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \underline{(\exists x)(R(x) \& \sim Q(x))} \\ \therefore (\exists x)(R(x) \& \sim P(x)) \end{array}$$

(გ)
$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \underline{(\exists x)(P(x) \& R(x))} \\ \therefore (\exists x)(R(x) \& Q(x)) \end{array}$$

(დ)
$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \underline{\sim(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))} \\ \therefore (\exists x)(\sim R(x) \& Q(x)) \end{array}$$

(ე) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

$$\begin{array}{l} P(a) \\ R(a) \\ \hline \therefore (\exists x)(R(x) \,\&\, Q(x)) \end{array}$$

(ვ)
$$\begin{array}{l} (\forall x)((P(x) \lor Q(x)) \rightarrow R(x)) \\ (\forall x)((R(x) \lor S(x)) \rightarrow T(x)) \\ \hline \therefore (\forall x)(P(x) \rightarrow T(x)) \end{array}$$

8. ააგეთ დამტკიცებები შემდეგი მსჯელობათა მართებულობისა (მაგალითები (ა) – (გ) აღებულია, **ალისა საოცრებათა ქვეყანაში** ავტორის, **ლუის კეროლის [კ. ლ. დოჯსონის]** წიგნიდან **სიმბოლური ლოგიკა (1896).**)

(ა) ბავშვები არალოგიკურები არიან. ვერცერთი მათგანი, ვინც კი პატივისცემით არ სარგებლობს, ვერ დაიმორჩილებს ნიანგებს. არალოგიკური ადამიანები არ სარგებლობენ პატივისცემით. ამდენად, ბავშვებს არ შეუძლიათ ნიანგების დამორჩილება.

(ბ) ყველას, ვინც შეურაცხადი არაა, შეუძლია იყოს ლოგიკური. შეურაცხადნი არ გამოდგებიან ნაფიც მსაჯულებად. არცერთ შენს ვაჟს არ შეუძლია იყოს ლოგიკური. ამდენად, არცერთი შენი ვაჟი არ გამოდგება ნაფიც მსაჯულად.

(გ) იხვები არ ცეკვავენ. არცერთი ოფიცერი არასდროს უარს არ ამბობს ცეკვაზე. შინაური ფრინველებიდან მხოლოდ იხვები მყავს. ამდენად, ჩემი შინაური ფრინველები არ არიან ოფიცრები.

(დ) ყველა ხმოვანი სონორულია. ყველა ხშული ჩქამიერია. არაფერი არ არის ერთდროულად სონორულიც და ჩქამიერიც. ამდენად, არაფერი არაა ერთდროულად ხმოვანიც და ხშულიც.

(ე) არც ერთ ლინგვისტს არ სჯერა ანალოგიის პრინციპის. ყველას, ბიჰევიორისტების გარდა, სჯერა ანალოგიის პრინციპის. არც ერთი დიეტოლოგი არ არის ბიჰევიორისტი. დეიდაჩემი დიეტოლოგია. ამდენად, არსებოს ისეთი ვიღაც, ვინც არც ლინგვისტია და არც ბიჰევიორისტი.

9. ბეთსის ცხრილური მეთოდით დაასაბუთეთ შემდეგი გამონათქვამების (ფორმულების) ზოგადმართებულება. იმ შემთხვევაში, თუ ფორმულა არაზოგადმართებულია, ააგეთ მისი უარმყოფელი მაგალითი.

(ა) $\sim(\exists x)F(x) \Rightarrow (\forall x)\sim F(x)$
(ბ) $(\forall x)(\exists y)R(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)R(x, y)$
(გ) $(\exists y)(\forall x)R(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y) R(x, y)$

10. ააგეთ შემდეგი გამონათქვამების ფორმალური დამტკიცებები:

(ა) თუ $A \subseteq B$ და $B \subset C$, მაშინ $A \subset C$.

(ზ) თუ $A \subseteq B$ და $A \not\subseteq C$, მაშინ $B \not\subseteq C$.

11. ააგეთ შემდეგი გამონათქვამების არაფორმალური დამტკიცებები:

(ა) $A - B \subseteq A$
(ბ) $((A - B) \cup (B - A) = \&)$ მმმ, როცა $A = B$
(გ) $A \subseteq B'$ მმმ, როცა A და B არიან ურთიერთ არათანამკვეთები
(დ) $A \subseteq B$ მმმ, როცა $A \cup (B - A) = B$
(ე) $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$
(ვ) $\wp(A) \cup \wp(B) \subseteq \wp(A \cup B)$

12. ააგეთ 3-2 ცხრილით მოცემული ორადგილიანი მიმართებების თვისებების არაფორმალური დამტკიცებები. იმ შემთხვევაში, თუ რომელიმე თვისება არ არის ცალსახად განსაზღვრული, ააგეთ მაგალითები, რომლებითაც ცალსახად იხსნება აღნიშნული არაცალსახად განსაზღვრულობის მიზეზები.