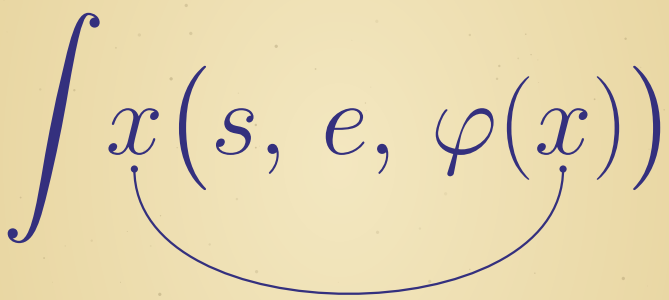
შალვა ფხაკაძე

ალნიშვნათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი



$$\exists_1 \mathsf{x}\, \mathbb{A} \text{ ——— } \exists \mathsf{x}\, \mathbb{A} \wedge \forall \mathsf{x} \forall \mathsf{y}\, [\mathbb{A} \wedge (\mathsf{y}/\mathsf{x})\mathbb{A} \longrightarrow \mathsf{x} = \mathsf{y}]$$

თბილისი • 1977

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი
სახელმწიფო უნივერსიტეტი
გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი

შალვა ფხაკაძე

ალნიშვნათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1977

გამოიცემა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის
სამეცნიერო საბჭოს დადგენილებით.

საწყისი რუსული გამოცემის რედაქტორი: მ. რ. თეთრუაშვილი

რუსულიდან სარედაქციო თარგმანი მოამზადა დავით გეგიამ

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1977.

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს საქართველოს დამსახურებული მეცნიერის, გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსის შალვა ფხაკაძის ნაშრომის „აღნიშვნათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი“ (თბილისი, 1977, რუსულ ენაზე) ქართული თარგმანის წინასარედაქციო ვერსიას. ქართულ ტექსტს საფუძვლად დაედო მთარგმნელ-რედაქტორთა გუნდის მიერ მომზადებული თარგმანი. შემდგომი რედაქტირების მიზნით გამოყენებულ იქნა გენერაციული ხელოვნური ინტელექტის ინსტრუმენტები.

მთარგმნელ-რედაქტორები:

დავით გეგია
ალექსანდრე მასხარაშვილი
კონსტანტინე ფხაკაძე

შინაარსი

1 შესავალი **1**

2 ძირითადი განსაზღვრებები **3**
2.1 ზოგადი ფორმალური $\mathscr{T}$ თეორიის განსაზღვრა 3
2.2 $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიები. მაგალითები 7
2.3 ზოგადი შენიშვნები შემამოკლებელი სიმბოლოების შესახებ 11
2.4 შეცვლა და ჩანაცვლება 14
2.5 შემდგომი შენიშვნები შემამოკლებელი სიმბოლოების შესახებ 25

3 ზოგიერთი ცნება, რომელიც საჭიროა შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების სხვადასხვა ტიპის შემოსატანად **31**
3.1 მეტაცვლადებისა და ჩანაცვლებების გამოყენებით შედგენილი ფორმები 31
3.2 ჩანაცვლებისა და პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორები 33

4 შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების ტიპები **39**
4.1 I ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები 39
4.2 II და II′ ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები 42
4.3 III ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები 45
4.4 IV და IV′ ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები 48
4.5 V, VI, VI′, VII ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები და კავშირები სხვადასხვა ტიპის განსაზღვრებებს შორის 52

5 განსაზღვრება-სქემები და შემოკლებული ფორმები **57**
5.1 შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და წარმოებული ოპერატორების განსაზღვრებების კერძო შემთხვევები 57
5.2 შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების გამოყენებები და შემოკლებული ფორმები 63

6 შემოკლებული ფორმებიდან ფორმების აღდგენის ძირითადი პროცესები **67**
6.1 ფორმის აღდგენის β-, β'-, γ-, γ'-პროცესები 67
6.2 β-, β'-, γ-, γ'-პროცესების ძირითადი თვისებები 69

7 შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და შემოკლებული ფორმების ძირითადი თვისებები. შემოკლებული ფორმებიდან ფორმების აღდგენის α- და α^*-პროცესები **75**

7.1 შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და შემოკლებული ფორმების ძირითადი თვისებები 75
7.2 შემოკლებული ფორმებიდან ფორმების აღდგენის α- და α^*-პროცესები . 86

8 წარმოებული ოპერატორებისა და შემოკლებული ფორმების ზოგიერთი რიცხვითი მახასიათებელი, მათი გამოთვლისა და შემოკლებული ფორმიდან ფორმის აღდგენის ალგორითმული პროცესები 97
8.1 წარმოებული ოპერატორებისა და შემოკლებული ფორმების ზოგიერთი რიცხვითი მახასიათებელი და მათი ძირითადი თვისებები 97
8.2 შემოკლებული ფორმებიდან ფორმების აღდგენისა და წარმოებული ოპერატორებისა და შემოკლებული ფორმების რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლის ალგორითმები 104

ტერმინებისა და აღნიშვნების საძიებელი 107

ლიტერატურა 113

რეზიუმე 115

ავტორის ინგლისური რეზიუმე 117

გამოცემის საიდენტიფიკაციო მონაცემები 119

პირველი ქართული წინასარედაქციო გამოცემის მთარგმნელ-რედაქტორების დასკვნითი სიტყვა 121

თავი 1

შესავალი

ფორმალური მათემატიკის განვითარებამ მიგვიყვანა მნიშვნელოვან აღმოჩენებამდე — მნიშვნელოვან შედეგებამდე, რომლებიც ეხება არა მხოლოდ მათემატიკის საფუძვლებს, არამედ მის სპეციალურ დარგებსაც. ამჟამად ასეთი შედეგების მიღება ფორმალური მათემატიკის მეთოდების გამოყენების გარეშე უიმედო საქმედ ითვლება. ამიტომ ფორმალური მათემატიკის მეთოდების დაუფლებას დიდი მნიშვნელობა აქვს მთელი მათემატიკის განვითარებისთვის. მიუხედავად ამისა, მათემატიკის დარგების უმეტესობა დღესაც შინაარსულ, არაფორმალურ დონეზე ვითარდება. ამის მიზეზია ფორმალური მათემატიკის მეთოდების დაუფლების სირთულე, რაც უმთავრესად იმითაა გამოწვეული, რომ ჯერ კიდევ არ არსებობს ფორმალური მათემატიკური სისტემების სრულყოფილი გადმოცემა. არსებული გადმოცემების გასაუმჯობესებლად საჭიროა არაერთი ღრმა მეცნიერული გამოკვლევა.

ამჟამად გამოიყენება ფორმალური მათემატიკური თეორიების არაერთი სისტემა, რომლებსაც მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვს მეცნიერების სხვადასხვა დარგში. გრძელდება კვლევები უფრო სრულყოფილი ფორმალური მათემატიკური სისტემის შესაქმნელად. ოპტიმალური და მოხერხებული ფორმალური მათემატიკური სისტემის შექმნა და მასში უკვე არსებულ ფორმალურ სისტემებში მიღებული შედეგების გადატანა მნიშვნელოვანი და რთული პრობლემაა.

წინამდებარე ნაშრომში ამ პრობლემის ერთი ნაწილი შეისწავლება. კერძოდ, შემოგვაქვს და ვიკვლევთ შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრის წესებს.

ჩვეულებრივ, შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრის წესებს შეზღუდვები არ ედება ან მხოლოდ მცირე შეზღუდვები ედება. ამიტომ შეუძლებელია შემოკლებულ ფორმათა ისეთი ზოგადი თვისებების დადგენა, რომლებიც ამ ფორმებზე ოპერირებისას საკმარის თავისუფლებას მოგვცემდა. შემოკლებულ ფორმებზე უშუალო ოპერირების ნაცვლად იცავენ პრინციპს, რომლის თანახმადაც შემოკლებული ფორმა განიხილება როგორც მის მიერ აღნიშნული ფორმა. მაგრამ ამ პრინციპის სრულად განხორციელება შეუძლებელია, რადგან შემოკლებული ფორმებით აღნიშნული ფორმები თითქმის ყოველთვის ძალიან გრძელია. ამიტომ მეტად მნიშვნელოვანია შემოკლებულ ფორმებზე უშუალო ოპერირების შესაძლებლობა. ამისათვის საჭიროა როგორც შემოკლებულ ფორმებზე ოპერირების ზოგადი კანონები, ისე კანონები, რომლებიც დაადგენენ, რომ შემოკლებულ ფორმებზე მოქმედებებს შეესაბამება ანალოგიური მოქმედებები შესაბამის ფორმებზე. ეს, თავის მხრივ, მოითხოვს შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და შემოკლებული ფორმების ზოგადი თვისებების დადგენის შესაძლებლობას.

წარმოებული ოპერატორების (შემამოკლებელი სიმბოლოების) შემოტანას ზოგჯერ გაფართოებულ თეორიაზე გადასვლა ახლავს. ესეც დიდ სირთულეებს იწვევს.

ნაშრომში განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრის წესების ზოგადი და მოხერხებული სისტემის შექმნას. ასეთი სისტემა იმდენად ზოგადი უნდა იყოს, რომ სრულად აკმაყოფილებდეს ყველა ცნობილი ძირითადი ფორმალური მათემატიკური თეორიის მოთხოვნებს; ამავე დროს, ამ წესების გამოყენებით მიღებულ შემოკლებულ ფორმებს რაც შეიძლება კარგი თვისებები უნდა ჰქონდეს. გარკვეული აზრით, ეს ორი მოთხოვნა ერთმანეთს ეწინააღმდეგება. ამიტომ ძნელია განსაზღვრის წესების ოპტიმალური სისტემის პოვნა. მონოგრაფიებში [5] და [7] გადმოცემული შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრის წესების სისტემები სხვებთან შედარებით უფრო ახლოსაა სრულ სიმკაცრესთან, მაგრამ მათ საჭირო ზოგადობა არ აქვს.

შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრის წესების ოპტიმალური სისტემის შექმნას დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. მაგალითად, ასეთი წესების საფუძველზე მარტივდება მონოგრაფიებისა და სახელმძღვანელოების როგორც დაწერა, ისე შესწავლა.

ნაშრომში კლასიკური ფორმალური მათემატიკური თეორიებისთვის ნაპოვნია შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრის წესების საკმაოდ ოპტიმალური სისტემა. ეს სისტემა ოპტიმალურია შემდეგი აზრით: ერთი მხრივ, იგი იმდენად ზოგადია, რომ მისი საშუალებით შეიძლება კლასიკურ ფორმალურ მათემატიკურ თეორიებში გამოყენებული თითქმის ყველა შემამოკლებელი სიმბოლოს შემოტანა; მეორე მხრივ, მას იმდენად მდიდარი თვისებები აქვს, რომ შემოკლებულ ფორმებზე ოპერირებისას საკმარისი თავისუფლება გვაქვს.

კერძოდ, შემოგვაქვს შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრის წესების I–VII, II′, IV′ და VI′ ტიპები. I–IV, II′ და IV′ ტიპების შესაბამისი წესების სისტემა ოპტიმალურია ზემოთ აღნიშნული აზრით. V–VII და VI′ ტიპების განხილვა გვიჩვენებს, რომ I–IV, II′ და IV′ ტიპების განსაზღვრებებში მოცემული მოთხოვნების უმცირესი შესუსტებაც საკმარისია იმისათვის, რომ შემოკლებულ ფორმათა მრავალი მნიშვნელოვანი თვისება აღარ შესრულდეს.

გარდა ამისა, ვიკვლევთ შემოკლებული ფორმიდან ფორმის აღდგენის ალგორითმულ პროცესებს. ალგორითმთა გარკვეულ, საკმაოდ ფართო და ბუნებრივად შემოტანილ კლასში ნაპოვნია შემოკლებული ფორმიდან ფორმის აღდგენის ალგორითმი ბიჯების მინიმალური რაოდენობით. ვიკვლევთ აგრეთვე შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და შემოკლებული ფორმების სხვადასხვა რიცხვით მახასიათებელს და ვპოულობთ ამ მახასიათებლების გამოთვლის ალგორითმებს.

თავი 2

ძირითადი განსაზღვრებები

2.1 ზოგადი ფორმალური $\mathscr{T}$ თეორიის განსაზღვრა

განვიხილოთ ზოგადი ფორმალური მათემატიკური $\mathscr{T}$ თეორია. ვიგულისხმოთ, რომ $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანი შეიცავს ქვემოთ ჩამოთვლილ ყველა ან ზოგიერთ სიმბოლოს.

1. **პროპოზიციული ცვლადები**

$$\mathbb{P}_0,\ \mathbb{P}_1,\ \mathbb{P}_2,\ \ldots \tag{1}$$

და ძირითადი საკუთრივი პროპოზიციული კონსტანტები t **და** f **და ძირითადი არასაკუთრივი პროპოზიციული კონსტანტები**

$$\mathbb{P}'_0,\ \mathbb{P}'_1,\ \mathbb{P}'_2,\ \ldots \tag{2}$$

ამ უკანასკნელთა გარდა, შეიძლება არსებობდეს სასრული ან თვლადი რაოდენობის სხვა ძირითადი პროპოზიციული კონსტანტებიც. ტერმინი **პროპოზიციული ასო** პროპოზიციული ცვლადებისა და ძირითადი პროპოზიციული კონსტანტების საერთო სახელწოდებაა.

2. **საგნობრივი ცვლადები**

$$\mathbb{S}_0,\ \mathbb{S}_1,\ \mathbb{S}_2,\ \ldots \tag{3}$$

და **არასაკუთრივი ძირითადი საგნობრივი კონსტანტები**

$$\mathbb{S}'_0,\ \mathbb{S}'_1,\ \mathbb{S}'_2,\ \ldots \tag{4}$$

ამ უკანასკნელთა გარდა, შეიძლება არსებობდეს სასრული ან თვლადი რაოდენობის **სხვა ძირითადი საკუთრივი ან არასაკუთრივი საგნობრივი კონსტანტებიც**. ტერმინი **საგნობრივი ასო** საგნობრივი ცვლადებისა და ძირითადი საგნობრივი კონსტანტების საერთო სახელწოდებაა.

3. **ძირითადი მარტივი ლოგიკური ოპერატორები** (სასრული ან თვლადი რაოდენობით). თითოეული მათგანი ან **რელაციურია**, ან **სუბსტანციური**. ძირითად რელაციურ მარტივ ლოგიკურ ოპერატორებს ეწოდება აგრეთვე **ძირითადი ლოგიკური კავშირები** ან **ძირითადი პროპოზიციული კავშირები**.

4. n**-ადგილიანი პრედიკატული ცვლადები ან** n**-ადგილიანი რელაციური ფუნ-**

ქციონალური ცვლადები

$$\mathbb{P}_0^n,\ \mathbb{P}_1^n,\ \mathbb{P}_2^n,\ \ldots, \tag{5}$$

$n = 1, 2, \ldots$, **და ძირითადი არასაკუთრივი** n**-ადგილიანი პრედიკატული კონსტანტები ან ძირითადი** n**-ადგილიანი რელაციური ფუნქციონალური კონსტანტები**

$$\overline{\mathbb{P}}_0^n,\ \overline{\mathbb{P}}_1^n,\ \overline{\mathbb{P}}_2^n,\ \ldots, \tag{6}$$

$n = 1, 2, \ldots$. ამ უკანასკნელთა გარდა, შეიძლება არსებობდეს სასრული ან თვლადი რაოდენობის სხვა ძირითადი **საკუთრივი ან არასაკუთრივი** n**-ადგილიანი პრედიკატული კონსტანტებიც**. n-ადგილიანი პრედიკატული ცვლადებისა და ძირითადი n-ადგილიანი პრედიკატული კონსტანტების საერთო სახელწოდებად გამოიყენება ტერმინები: n**-ადგილიანი პრედიკატული ასო**, n**-ადგილიანი რელაციური ფუნქციონალური ასო**, **ძირითადი მარტივი** n**-ადგილიანი რელაციური სპეციალური ოპერატორი**, **ძირითადი** n**-ადგილიანი რელაციური ფუნქციონალური ოპერატორი** ან **ძირითადი** n**-ადგილიანი პრედიკატი**.

5. n**-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური ცვლადები**

$$\varphi_0^n,\ \varphi_1^n,\ \varphi_2^n,\ \ldots, \tag{7}$$

$n = 1, 2, \ldots$, **და ძირითადი არასაკუთრივი** n**-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური კონსტანტები**

$$\overline{\varphi}_0^n,\ \overline{\varphi}_1^n,\ \overline{\varphi}_2^n,\ \ldots, \tag{8}$$

$n = 1, 2, \ldots$. ამ უკანასკნელთა გარდა, შეიძლება არსებობდეს სასრული ან თვლადი რაოდენობის სხვა ძირითადი **საკუთრივი ან არასაკუთრივი** n**-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური კონსტანტებიც**. n-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური ცვლადებისა და ძირითადი n-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური კონსტანტების საერთო სახელწოდებად გამოიყენება ტერმინები: n**-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური ასო**, **ძირითადი მარტივი** n**-ადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორი**, **ძირითადი** n**-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური ოპერატორი** ან **ძირითადი** n**-ადგილიანი ფუნქცია**.

6. **ძირითადი მარტივი ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორები** (სასრული ან თვლადი რაოდენობით). თითოეული მათგანი ან **რელაციურია**, ან **სუბსტანციური**.

7. **ძირითადი ოპერატორული ნიშნები** (სასრული ან თვლადი რაოდენობით). თითოეული მათგანი არის: ა) ან **ლოგიკური**, ან **სპეციალური**, ან **ლოგიკო-სპეციალური**; ბ) ან **რელაციური**, ან **სუბსტანციური**; გ) ან **სრული**, ან **ნაწილობრივი**.

ამასთან, საჭიროა, რომ $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანი აკმაყოფილებდეს შემდეგი ორი პირობიდან სულ მცირე ერთს: ა) იგი შეიცავს პროპოზიციულ ცვლადებს (1) ან პროპოზიციულ კონსტანტებს (2), ხოლო $\mathscr{T}$ თეორიის ოპერატორების კლასი (ეს კლასი ქვემოთ განისაზღვრება) შეიცავს სულ მცირე ერთ არანულადგილიან ლოგიკურ ოპერატორს; ბ) იგი შეიცავს საგნობრივ ცვლადებს (3) ან საგნობრივ კონსტანტებს (4), ხოლო $\mathscr{T}$ თეორიის

ოპერატორების კლასი შეიცავს სულ მცირე ერთ არანულადგილიან სპეციალურ ოპერატორს. გარდა ამისა, საჭიროა შემდეგი ორი პირობის შესრულებაც: გ) თუ $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანი შეიცავს (1)–(8) მიმდევრობებიდან რომელიმეს ერთ წევრს, მაშინ იგი ამ მიმდევრობის ყველა წევრს შეიცავს; დ) თუ $\mathscr{T}$ თეორიის ოპერატორების კლასი შეიცავს სულ მცირე ერთ არანულადგილიან სპეციალურ ოპერატორს, მაშინ სრულდება ბ) პირობა.

$\mathscr{T}$ თეორიის სხვადასხვა ტიპის ცვლადების, შესაბამისად ძირითადი კონსტანტების, შესაბამისად სიმბოლოების საერთო სახელწოდებად გამოვიყენებთ ტერმინს **ცვლადი**, შესაბამისად **ძირითადი კონსტანტა**, შესაბამისად **ძირითადი სიმბოლო**.

(1)–(8) მიმდევრობებიდან რომელიმეთი განსაზღვრულ სიმბოლოთა რიგს ეწოდება **შესაბამისი სიმბოლოების ანბანური რიგი**, ხოლო თვით ამ მიმდევრობებს — შესაბამისი სიმბოლოების **ანბანური გადათვლა**. ამ განსაზღვრების აზრის დასაზუსტებლად შევნიშნოთ, რომ, მაგალითად, თუ $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანი შეიცავს (1) და (2) მიმდევრობებს, მაშინ პროპოზიციული ასოების ანბანურ გადათვლად უნდა მივიჩნიოთ ტრანსფინიტური მიმდევრობა

$$\mathbb{P}_0,\ \mathbb{P}_1,\ \mathbb{P}_2,\ \ldots;\ \mathbb{P}'_0,\ \mathbb{P}'_1,\ \mathbb{P}'_2,\ \ldots\ .$$

შესაბამისად, თუ p და q პროპოზიციული ასოებიდან ერთი ცვლადია, ხოლო მეორე კონსტანტა, მაშინ p-სა და q-ს შორის **მინიმალური ინდექსის მქონე ასოდ** მივიჩნევთ ცვლადს (სხვა შემთხვევებში ამ ტერმინის მნიშვნელობა ჩვეულებრივად გაიგება).

ამგვარად, გვაქვს შემდეგი (ძირითადი) ტიპების ასოები, შესაბამისად ცვლადები, შესაბამისად ძირითადი კონსტანტები: პროპოზიციული, საგნობრივი, n-ადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური, $n = 1, 2, \ldots$, და n-ადგილიანი რელაციური სპეციალური, $n = 1, 2, \ldots$.

$\mathscr{T}$ თეორიის ყოველ ძირითად ოპერატორულ ნიშანს მიეწერება არანულოვანი ნატურალური რიცხვების წყვილი, რომელსაც ეწოდება ამ **ოპერატორული ნიშნის წონა**. თუ ძირითადი σ ოპერატორული ნიშნის წონაა (n, m), მაშინ $\sigma\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ სახის ყველა სიტყვას, ან სპეციალური განსაზღვრების თანახმად მხოლოდ ზოგიერთ მათგანს, სადაც $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ ასოებია (1)–(8) მიმდევრობებიდან, ეწოდება **ძირითადი შედგენილი ოპერატორები** ან **ძირითადი კვანტორები**. იმის მიხედვით, თუ როგორია σ ოპერატორული ნიშანი, ამ ოპერატორებს შესაბამისად ეწოდება **ლოგიკური**, **სპეციალური**, **რელაციური**, **სუბსტანციური**, **ლოგიკო-სპეციალური**, **ნაწილობრივი**, **სრული**. ყოველ ძირითად ოპერატორს **წონად** მიეწერება არანულოვანი ნატურალური რიცხვი ისე, რომ (n, m) წონის მქონე ნიშნით აგებული ოპერატორის წონა იყოს n, ხოლო (5)–(8) მიმდევრობებში შემავალი ოპერატორის წონა — მისი ზედა ინდექსი. n წონის მქონე ოპერატორს ეწოდება **n-ადგილიანი**, ხოლო (n, m) წონის მქონე ოპერატორულ ნიშანს — **n-ადგილიანი m-არული**. ტერმინების 1-არული, 2-არული, 3-არული ნაცვლად გამოიყენება აგრეთვე ტერმინები **სინგულარული** ან **უნარული**, **ბინარული** და **ტერნარული**. ამგვარად, ყოველი ძირითადი ოპერატორი ან მარტივია, ან შედგენილი. $\sigma\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ სახის შედგენილ ოპერატორში $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ ასოებს (იგულისხმება ასოთა შემოსვლები) ეწოდება **ოპერატორული ასოები**; a_k-ს ეწოდება **k-ური ოპერატორული ასო** ($k = 1, 2, \ldots, m$). მოცემული თეორიის ასოების ანბანურ გადათვლაში შემავალ ასოებს ვუწოდებთ **კვანტორულ ასოებს**. ოპერატორული ასოებისგან განსხვავებით, კვანტორული ასოები თვით ასოებია და არა მათი შემოსვლები. ამასთან დაკავშირებით, ტერმინები **ოპერატორული ცვლადი**, **ოპერატორული კონსტანტა**, **კვანტორული ცვლადი** და

კვანტორული კონსტანტა გამოიყენება მათი ცხადი მნიშვნელობით.

კვანტორული a ასო შეიძლება არცერთი კვანტორის ოპერატორული ასო არ იყოს, მაგრამ არსებობს $\mathscr{T}$ ტიპის თეორიები, რომლებიც მოცემული თეორიის გაფართოებით მიიღება და შეიცავს კვანტორებს a ოპერატორული ასოთი. ამასთან, ეს თვისება მხოლოდ კვანტორულ ასოებს აქვს.

ყოველ ძირითად n-ადგილიან ლოგიკო-სპეციალურ ოპერატორულ ნიშანს, შესაბამისად ოპერატორს, წონის გარდა მიეწერება **ლოგიკურობის მაჩვენებელი** — ნატურალური რიცხვების არაცარიელი დალაგებული სისტემა $(n_1, \ldots, n_k)$, $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n$. n-ადგილიანი ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორული σ ნიშნით აგებული ოპერატორის (კვანტორის) ლოგიკურობის მაჩვენებლად მიიღება σ ნიშნის ლოგიკურობის მაჩვენებელი. გარდა ამისა, ყოველ ძირითად n-ადგილიან ნაწილობრივ ოპერატორულ σ ნიშანს მიეწერება **დაბმულობის მაჩვენებელი** — ნატურალური რიცხვების არაცარიელი დალაგებული სისტემა $(n_1, \ldots, n_k)$, $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n$. იგივე სისტემა მიეწერება დაბმულობის მაჩვენებლად σ ნიშნით აგებულ ყოველ შედგენილ ოპერატორს (კვანტორს). ვიგულისხმებთ (და ეს ბუნებრივია), რომ ნებისმიერი n-ადგილიანი ლოგიკური, შესაბამისად სპეციალური, ოპერატორული ნიშნისა თუ ოპერატორის ლოგიკურობის მაჩვენებელია $(1, 2, \ldots, n)$, შესაბამისად $(\ )$; აქ $(\ )$ აღნიშნავს ცარიელ დალაგებულ სისტემას, რომელიც ცარიელი სიმრავლეა. ასევე ვიგულისხმებთ, რომ ნებისმიერი n-ადგილიანი სრული ოპერატორული ნიშნისა თუ კვანტორის დაბმულობის მაჩვენებელია $(1, 2, \ldots, n)$.

$\mathscr{T}$ თეორიის ძირითადი ოპერატორების კლასს მოეთხოვება შემდეგი პირობების შესრულება:

1) თუ ძირითადი σ ოპერატორული ნიშნით აგებული ორი შედგენილი ოპერატორიდან ერთში k-ურ ოპერატორულ ასოს შევცვლით მეორე ოპერატორის k-ური ოპერატორული ასოთი, მივიღებთ შედგენილ ოპერატორს;
2) თუ შედგენილ ოპერატორში ოპერატორულ კონსტანტას შევცვლით იმავე ტიპის კვანტორული ასოთი (ეს ასო შეიძლება ცვლადიც იყოს), მივიღებთ ოპერატორს;
3) თუ შედგენილ ოპერატორში ოპერატორულ ცვლადს შევცვლით იმავე ტიპის ცვლადით, მაშინ მივიღებთ ოპერატორს.

ძირითად პროპოზიციულ კონსტანტებს ასევე უწოდებენ **ძირითად ნულადგილიან რელაციურ ლოგიკურ ოპერატორებს** და, მაშასადამე, ისინი **ძირითადი ნულადგილიანი პროპოზიციული (ლოგიკური) კავშირებია**. პროპოზიციულ ასოებს ასევე უწოდებენ **ძირითად ნულადგილიან რელაციურ სპეციალურ (ფუნქციონალურ) ოპერატორებს** ან **ძირითად ნულადგილიან პრედიკატებს,** ხოლო საგნობრივ ასოებს - **ძირითად ნულადგილიან სუბსტანციურ სპეციალურ (ფუნქციონალურ) ოპერატორებს.**

ქვემოთ, როცა ძირითად ოპერატორებზე საუბრისას გვინდა ძირითადი ნულადგილიანი ოპერატორებიც ვიგულისხმოთ, გამოვიყენებთ დამაზუსტებელ ფრაზებს, მაგალითად: „0 წონის ოპერატორების ჩათვლით“, „ნულადგილიანი ლოგიკური ოპერატორების ჩათვლით“ და ა.შ. ან სულ მცირე კონტექსტიდან ცხადად უნდა გამომდინარეობდეს, რომ იგულისხმება შესაბამისი ტიპის ძირითადი ნულადგილიანი ოპერატორებიც.

$\mathscr{T}$ თეორიაში **ფორმულისა და ტერმის** ცნებები შემდეგნაირად განისაზღვრება.

პროპოზიციული ასოები, განსაზღვრების თანახმად, **უმარტივესი ფორმულებია**, ხოლო საგნობრივი ასოები — **უმარტივესი ტერმები**. თუ σ არის ძირითადი n-

ადგილიანი ლოგიკური, შესაბამისად სპეციალური, შესაბამისად ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორი ლოგიკურობის მაჩვენებლით $(n_1, \ldots, n_k)$, ხოლო $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ არის ფორმულები, შესაბამისად ტერმები, შესაბამისად ისეთი ფორმები, რომ $\mathbb{A}_{n_1}, \ldots, \mathbb{A}_{n_k}$ არის $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მიმდევრობის მაქსიმალური სიგრძის ქვემიმდევრობა, რომლის თითოეული წევრი ფორმულაა, მაშინ $\sigma\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n$ არის ფორმულა ან ტერმი იმის მიხედვით, σ ოპერატორი რელაციურია თუ სუბსტანციური. აქაც და ქვემოთაც რეკურსიული განსაზღვრებებისას, როგორც წესი, ვასახელებთ მხოლოდ განსაზღვრების პირდაპირ პუნქტებს. ფორმულებისა და ტერმების საერთო სახელწოდებად ვიყენებთ ტერმინს **ფორმა**. ფორმულებს ეწოდება **პროპოზიციული ფორმები**, ხოლო ტერმებს — **საგნობრივი ფორმები**. ამასთან, ვიტყვით, რომ ფორმულები, შესაბამისად ტერმები, ერთი და იმავე ტიპის ფორმებია. უმარტივეს ფორმულებსა და $\sigma\,\mathbb{X}_1 \cdots \mathbb{X}_n$ სახის ფორმულებს, სადაც σ ძირითადი n-ადგილიანი მარტივი სპეციალური რელაციური ოპერატორია, ხოლო $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n$ საგნობრივი ასოებია, ეწოდება **ატომური ფორმულები**.

აქსიომებსა და დასკვნის წესებს არ დავაფიქსირებთ. დამტკიცებისა და თეორემის ცნებები ჩვეულებრივად შემოგვაქვს.

2.2 $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიები. მაგალითები

2.2.1 $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიები

$\mathscr{T}$ თეორიასთან ერთად განვიხილავთ $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიებს, რომლებიც გარკვეული აზრით $\mathscr{T}$ თეორიის ეკვივალენტურია. ისინი შემდეგნაირად განისაზღვრება: $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების ანბანები ერთმანეთს ემთხვევა; მათი საერთო ანბანი მიიღება $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანიდან „[“ და „]“ სიმბოლოების დამატებით. $\mathscr{T}''$-ში ფორმულისა და ტერმის ცნებების განსაზღვრებების მისაღებად საკმარისია $\mathscr{T}$-ში ამ ცნებების განსაზღვრებაში $\sigma\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n$ გამოსახულება შევცვალოთ $[\sigma\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n]$ გამოსახულებით. $\mathscr{T}'$-ში ამ ცნებების განსაზღვრებების მისაღებად საჭიროა ზოგიერთი ძირითადი ორადგილიანი ოპერატორი გამოვაცხადოთ **მონიშნულ ოპერატორად** და $\mathscr{T}$-ში ფორმულისა და ტერმის განსაზღვრებაში ფრაზა „$\sigma\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n$ არის ფორმულა ან ტერმი“ შევცვალოთ ფრაზით „$[\mathbb{A}_1\,\sigma\,\mathbb{A}_2]$ ან $[\sigma\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n]$, იმის მიხედვით, σ მონიშნული ოპერატორია თუ არა, არის ფორმულა ან ტერმი“. ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ მონიშნული ოპერატორებია ორადგილიანი მარტივი ოპერატორები, რომლებიც კვანტორული ასოები არ არის, და მხოლოდ ისინი.

$\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების ფორმებს შორის ბუნებრივად მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობები. ამასთან, თუ $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{A}''$ ამ თეორიების შესაბამისი ფორმებია, მაშინ ბუნებრივი ურთიერთცალსახა შესაბამისობები მყარდება ამ ფორმების ნაწილებს შორისაც. შესაბამისი ალგორითმების ცხადად ჩამოყალიბება რთული არ არის. მაგალითად, $\mathbb{A}''$-დან $\mathbb{A}$-ს მისაღებად საკმარისია ყველა ფრჩხილის მოცილება; ხოლო $\mathbb{A}$-დან $\mathbb{A}''$-ს მისაღებად $\mathbb{A}$ უნდა განვიხილოთ როგორც $\mathscr{T}''$ თეორიის ფორმისგან ყველა ფრჩხილის მოცილებით მიღებული „გამარტივებული სახე“ და აღვადგინოთ ფრჩხილები. ასეთი აღდგენის შედეგი, როგორც ადვილი დასანახია, ცალსახად განისაზღვრება. ვიგულისხმებთ, რომ ფრჩხილების მოცილება, შესაბამისად აღდგენა, ბიჯობრივად სრულდება და თითოეული ბიჯი ფრჩხილების ერთი წყვილის მოცილებას, შესაბამისად აღდგენას ნიშნავს. ამ პროცესებში მიღებულ შუალედურ გამოსახულებებს ვუწოდებთ **შუალედურ ფორმებს (შუალედურ ფორმულებსა და შუალედურ ტერმებს) $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების მიმართ**.

ადვილი დასანახია აგრეთვე, რომ როგორც $\mathbb{A}''$-დან $\mathbb{A}'$-ს, ისე $\mathbb{A}'$-დან $\mathbb{A}''$-ს მისაღებად საჭიროა ყოველი მონიშნული ოპერატორისა და მისი პირველი ოპერანდის ადგილების გაცვლა. ამ შემთხვევაშიც ადგილების გაცვლა ბიჯობრივად სრულდება და თითოეული ბიჯი ერთ ასეთ გაცვლას ნიშნავს. ამავე წესით განისაზღვრება **შუალედური ფორმები $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების მიმართ**. ყოველი შუალედური გამოსახულება ცალსახად განსაზღვრავს $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{A}''$ ფორმებიდან თითოეულს. დაბოლოს, $\mathbb{A}$-დან $\mathbb{A}'$-ს მისაღებად საკმარისია ჯერ $\mathbb{A}$ გარდავქმნათ $\mathbb{A}''$-ად, ხოლო შემდეგ $\mathbb{A}''$ — $\mathbb{A}'$-ად. ანალოგიურად მიიღება $\mathbb{A}'$-დან $\mathbb{A}$.

$\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების აქსიომები და დასკვნის წესები მიიღება $\mathscr{T}$ თეორიის აქსიომებისა და დასკვნის წესებისგან იმ ცხადი ცვლილებებით, რომლებიც ფორმულისა და ტერმის ცნებების შეცვლას უკავშირდება. კერძოდ, $\mathscr{T}'$, შესაბამისად $\mathscr{T}''$ თეორიის აქსიომებია ის და მხოლოდ ის ფორმულები, რომლებიც ზემოთ აღწერილი აზრით შეესაბამება $\mathscr{T}$ თეორიის აქსიომებს. ასევე, $\mathscr{T}'$, შესაბამისად $\mathscr{T}''$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმულა არის $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ ფორმულების უშუალო შედეგი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathscr{T}$ თეორიის შესაბამისი ფორმულებიც იმავე დამოკიდებულებაშია.

ვიგულისხმებთ, რომ $\mathscr{T}$ ძირითადი თეორიაა, ხოლო $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების ფორმებს გამოვიყენებთ $\mathscr{T}$ თეორიის შესაბამისი ფორმების აღსანიშნავად. $\mathscr{T}'$ თეორიის ფორმების გამოყენება ძირითადი თეორიის ფორმების აღსანიშნავად კონტექსტის შინაარსის გაგებას აადვილებს.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიებიდან თითოეულის ნებისმიერი ფორმა შეიძლება განვიხილოთ როგორც დანარჩენი ორი თეორიიდან ნებისმიერის შესაბამისი ფორმის აღნიშვნა. ეს საშუალებას გვაძლევს, ეს თეორიები შემდეგი აზრით გავაიგივოთ: შეიძლება საწყისად ავიღოთ ამ სამიდან ნებისმიერი თეორია, ხოლო განსაზღვრებები, მსჯელობები და დამტკიცებები ჩამოვაყალიბოთ ნებისმიერ მათგანში. მაგალითად, ერთ თეორიაში მოცემული დამტკიცება შეიძლება განვიხილოთ როგორც დამტკიცება სამიდან ნებისმიერ თეორიაში. გარდა ამისა, მსჯელობისას ამ თეორიების ფორმების ნაცვლად შეიძლება გამოვიყენოთ ფიქსირებული ტიპის შუალედური ფორმები. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების გაიგივება უფრო ბუნებრივი აზრითაც შეიძლება. კერძოდ, $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმები, ან, უფრო ზოგადად, $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების მიმართ შუალედური ფორმები, შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\mathscr{T}''$ თეორიის ფორმების გამარტივებული სახეები, რომლებიც ყველა ან რამდენიმე წყვილი ფრჩხილის მოცილებით მიიღება. პირიქით, $\mathscr{T}''$ თეორიის ფორმები ან აღნიშნული შუალედური ფორმები შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმების გამარტივებული სახეები, რომლებიც რამდენიმე წყვილი ფრჩხილის დამატებით მიიღება, ფორმის შინაარსისა და სტრუქტურის ცხადად გამოსავლენად.

სიცხადისთვის ძირითადად $\mathscr{T}$ თეორიაში ვიმსჯელებთ, თუმცა ადვილი დასანახია, რომ ყველაფერი ძალაში რჩება $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიებისთვისაც, იმ ცხადი ცვლილებებით, რომლებიც ფორმის ცნების შეცვლითაა გამოწვეული.

განსახილველი სახის ნებისმიერ თეორიას ვუწოდებთ **$\mathscr{T}$-თეორიას** ან **$\mathscr{T}$ ტიპის თეორიას**. ფორმალურ თეორიას ვუწოდებთ **განზოგადებულ $\mathscr{T}$-თეორიას** ან **განზოგადებული $\mathscr{T}$ ტიპის თეორიას**, თუ მისი განსაზღვრება მიიღება $\mathscr{T}$ თეორიის განსაზღვრებიდან შემდეგი ცვლილებით: მოთხოვნა, რომ თითოეული ტიპის სიმბოლოთა სიმრავლე სასრული ან თვლადი იყოს, იცვლება მოთხოვნით, რომ იგი სასრული ან ნებისმიერი სიმძლავრის უსასრულო სიმრავლე იყოს. ამასთან, (1)–(8) მიმდევრობებიდან თითოეულის

ნაცვლად აიღება შესაბამისი სიმძლავრის ტრანსფინიტური მიმდევრობა.

თითქმის ყველა განსაზღვრება და შედეგი, რომლებიც $\mathscr{T}$ ტიპის თეორიას ეხება, აგრეთვე ამ შედეგების დამამტკიცებელი მსჯელობები, ძალაში რჩება განზოგადებული $\mathscr{T}$-თეორიის შემთხვევაშიც.

2.2.2 მაგალითები

მოვიყვანოთ $\mathscr{T}$ ტიპის თეორიის რამდენიმე მაგალითი:

1. $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_1'$ და $\mathcal{P}_1''$ თეორიები.

$\mathcal{P}_1$ თეორიის ანბანი შედგება შემდეგი სიმბოლოებისგან:
პროპოზიციული ცვლადები $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots$;
ძირითადი პროპოზიციული კონსტანტა f;
ძირითადი ლოგიკური კავშირი $\longrightarrow$ (წონით 2).

ზოგადი შეთანხმების თანახმად, $\mathcal{P}_1'$ და $\mathcal{P}_1''$ თეორიების ანბანები დამატებით შეიცავს „[“ და „]“ სიმბოლოებს.

ვიგულისხმოთ, რომ p, q, s მეტასიმბოლოებით შესაბამისად აღინიშნება $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1$ და $\mathbb{P}_2$ პროპოზიციული ცვლადები. მაშინ $\mathcal{P}_1$ თეორიის აქსიომებია:

$\longrightarrow p \longrightarrow qp$ **(კონსეკვენტის დადგენის კანონი)**;

$\longrightarrow\longrightarrow s \longrightarrow p\,q \longrightarrow\longrightarrow s\,p \longrightarrow s\,q$ **(იმპლიკაციის თვითდისტრიბუტიულობის კანონი)**;

$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow p\,f\,f\,p$ **(ორმაგი უარყოფის კანონი).**

ფორმის, ფორმულისა და ტერმის ზოგადი განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathcal{P}_1$ თეორიაში ტერმები არ გვაქვს და, შესაბამისად, ფორმისა და ფორმულის ცნებები ერთმანეთს ემთხვევა.

დასკვნის წესები შემდეგია:

მოდუს პონენსის წესი. თუ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ნებისმიერი ფორმულებია, მაშინ $\mathbb{A}$-დან და $\longrightarrow \mathbb{A}\mathbb{B}$-დან გამომდინარეობს $\mathbb{B}$.

ჩანაცვლების წესი. თუ a პროპოზიციული ცვლადია, ხოლო $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ნებისმიერი ფორმულებია, მაშინ $\mathbb{A}$-დან გამომდინარეობს $(\mathbb{B}/\mathsf{a})\mathbb{A}$.[1]

ცხადია, რომ $\mathcal{P}_1'$ თეორიის შემთხვევაში აქსიომები იქნება:

$$[p \longrightarrow [q \longrightarrow p]]$$

$$[[s \longrightarrow [p \longrightarrow q]] \longrightarrow [[s \longrightarrow p] \longrightarrow [s \longrightarrow q]]]$$

$$[[[p \longrightarrow f] \longrightarrow f] \longrightarrow p]$$

2. $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^{1\prime}$ და $\mathcal{F}^{1\prime\prime}$ თეორიები.

$\mathcal{F}^1$ თეორიის ანბანი შეიცავს შემდეგ სიმბოლოებს:
ლოგიკური კავშირები $\longrightarrow$ და $\neg$ (წონებით 2 და 1);
ლოგიკური რელაციური ოპერატორული ნიშანი $\forall$ წონით $(1, 1)$;
საგნობრივი ცვლადები $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \ldots,$

[1] $(\mathbb{B}/\mathsf{a})\mathbb{A}$ გამოსახულების აზრი განისაზღვრება 2.4.1 განყოფილებაში.

ამ სიმბოლოების გარდა, $\mathcal{F}^1$ თეორიის ანბანი შეიცავს ქვემოთ ჩამოთვლილ ყველა ან ზოგიერთ სიმბოლოს, $\mathscr{T}$ თეორიის განსაზღვრებაში მოცემული ზოგადი შეთანხმებების დაცვით:

პროპოზიციული ცვლადები $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$;

n-ადგილიანი პრედიკატული ცვლადები

$$\mathbb{P}_0^n, \mathbb{P}_1^n, \mathbb{P}_2^n, \dots (n = 1, 2, \dots)$$

ძირითადი საგნობრივი კონსტანტები;

ძირითადი პრედიკატული კონსტანტები.

ამასთან, ანბანი შეიცავს ერთ პრედიკატს მაინც.

შედგენილი ოპერატორების კლასი შედგება $\forall \mathsf{a}$ სახის სიტყვებისგან, სადაც a საგნობრივი ცვლადია.

$(\mathbb{B}/\mathsf{a})\mathbb{A}$ გამოსახულების მნიშვნელობა განისაზღვრება ქვემოთ, ჩანაცვლებების შესახებ ქვეთავში.

დასკვნის წესებია მოდუს პონენსისა და განზოგადების წესები.

განზოგადების წესი. თუ $\mathbb{A}$ ნებისმიერი ფორმულაა, ხოლო a საგნობრივი ცვლადია, მაშინ $\mathbb{A}$-დან გამომდინარეობს $\forall \mathsf{a}\mathbb{A}$.

ამ თეორიის აქსიომების ფორმულირება შეიძლება ვიპოვოთ [5]-ში.

3. $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ და $\mathcal{S}''$ თეორიები.

$\mathcal{S}$ თეორიის ანბანი შეიცავს $\mathscr{T}$ თეორიის განსაზღვრებაში ცხადად წარმოდგენილ ყველა სიმბოლოს, ძირითად საკუთრივ ორადგილიან პრედიკატულ კონსტანტებს $=$ და $\in$, ძირითად ლოგიკურ კავშირებს $\neg, \longrightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge$ (პირველის წონაა 1, ხოლო დანარჩენების — 2), ძირითად რელაციურ ლოგიკურ ოპერატორულ ნიშნებს $\forall$, $\exists$ და ძირითად სუბსტანციურ ლოგიკურ ოპერატორულ ნიშანს τ. თითოეული მათგანის წონაა $(1, 1)$, ხოლო შესაბამისი კვანტორებია $\forall \mathsf{a}$, $\exists \mathsf{a}$ და $\tau \mathsf{a}$ სახის სიტყვები, სადაც a ნებისმიერი საგნობრივი კვანტორული ასოა. $\mathcal{S}$ თეორიაში საგნობრივი ცვლადები სხვადასხვა კატეგორიად იყოფა. კერძოდ, $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \dots$ მიმდევრობის ლუწინდექსიან წევრებს (წევრები ინომრება $0, 1, 2, \dots$ ნატურალური რიცხვებით) ეწოდება **უნივერსალური საგნობრივი ცვლადები**. დანარჩენი წევრებით შედგენილი ქვემიმდევრობიდან იმავე გზით თანმიმდევრულად გამოიყოფა **კლასური ცვლადები**, **ელემენტური ცვლადები** და **სიმრავლური ცვლადები**. დარჩენილ ცვლადებს ეწოდება **ინდივიდური ცვლადები**. ასევე, $\mathbb{S}'_0, \mathbb{S}'_1, \mathbb{S}'_2, \dots$ კვანტორული საგნობრივი კონსტანტების მიმდევრობიდან გამოიყოფა სხვადასხვა კატეგორიის კვანტორული საგნობრივი კონსტანტები. საგნობრივი ცვლადებისა და კვანტორული საგნობრივი კონსტანტების თითოეული კატეგორიისთვის ბუნებრივად განისაზღვრება **ანბანური გადათვლა** და **ანბანური რიგი**.

ეს თეორია მხოლოდ საილუსტრაციო მაგალითებისთვის გვჭირდება, ფორმების ზოგადი თვისებების განხილვისას. ამიტომ მისი აქსიომები და დასკვნის წესები არ შემოგვაქვს.

2.3 ზოგადი შენიშვნები შემამოკლებელი სიმბოლოების შესახებ

2.3.1 წინასწარი შენიშვნები

ნებისმიერ ფორმალურ მათემატიკურ თეორიაში სპეციალური მეტამათემატიკური განსაზღვრებებით შემოაქვთ დამხმარე სიმბოლოები, რომლებსაც **შემამოკლებელი სიმბოლოები** ეწოდება. მათ **წარმოებულ სიმბოლოებსაც** უწოდებენ.

შემამოკლებელი სიმბოლოების გარეშე იძულებული ვიქნებოდით, ძალიან გრძელი ფორმები დაგვეწერა. მხოლოდ ფორმების გამოყენება გადაულახავ ტიპოგრაფიულ და გონებრივ სირთულეებს გამოიწვევდა: სრულად დაწერილი ძალიან გრძელი ფორმის შინაარსს ვერ ვწვდებით, მაშინ როცა ხშირად საქმე გვაქვს შემოკლებული სახით დაწერილ ძალიან გრძელ ფორმებთან და მათი შინაარსის გაგება სირთულეს არ წარმოადგენს. მაგალითად, ნ. ბურბაკის თეორიულად მეტად მოხერხებულ თეორიაში [1] რიცხვი 1 შემოიტანება როგორც შემამოკლებელი სიმბოლო (წარმოებული კონსტანტა), რომელიც რამდენიმე ათეულ ათას სიმბოლოს შემცველ ტერმს აღნიშნავს.

ჩვენ განვიხილავთ შემდეგი ტიპის შემამოკლებელ სიმბოლოებს: **წარმოებული n-ადგილიანი m-არული ოპერატორული ნიშნები**, $m, n = 1, 2, \ldots$, და **წარმოებული მარტივი n-ადგილიანი ოპერატორები**, $n = 0, 1, 2, \ldots$. თითოეული მათგანი არის ან ლოგიკური რელაციური, ან ლოგიკური სუბსტანციური, ან სპეციალური რელაციური, ან სპეციალური სუბსტანციური, ან ლოგიკო-სპეციალური რელაციური, ან ლოგიკო-სპეციალური სუბსტანციური. ამასთან, ყოველი ოპერატორული ნიშანი ან სრულია, ან ნაწილობრივი. წარმოებული n-ადგილიანი ოპერატორული ნიშნები გამოიყენება შესაბამისი ტიპის **წარმოებული n-ადგილიანი შედგენილი ოპერატორების (კვანტორების)** ასაგებად. წარმოებულ მარტივ რელაციურ ლოგიკურ ოპერატორებს ეწოდება აგრეთვე **წარმოებული ლოგიკური** ან **პროპოზიციული კავშირები**. წარმოებულ ნულადგილიან მარტივ რელაციურ ოპერატორებს ეწოდება აგრეთვე **წარმოებული პროპოზიციული კონსტანტები**, ხოლო წარმოებულ ნულადგილიან სუბსტანციურ ოპერატორებს — **წარმოებული საგნობრივი კონსტანტები**.

განსაზღვრების თანახმად, წარმოებული n-ადგილიანი ოპერატორის წონაა n, ხოლო n-ადგილიანი m-არული ოპერატორული ნიშნის წონაა (n, m). ყოველ წარმოებულ n-ადგილიან ლოგიკო-სპეციალურ ოპერატორულ σ ნიშანს (შესაბამისად, σ ოპერატორს), წონის გარდა, მიეწერება **ლოგიკურობის მაჩვენებელი** — ნატურალური რიცხვების არაცარიელი დალაგებული სისტემა $(n_1, \ldots, n_k)$, $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n$. წარმოებული n-ადგილიანი ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორული σ ნიშნით აგებული ოპერატორის (კვანტორის) ლოგიკურობის მაჩვენებლად მიიღება σ ნიშნის ლოგიკურობის მაჩვენებელი. გარდა ამისა, ყოველ წარმოებულ n-ადგილიან ნაწილობრივ ოპერატორულ σ ნიშანს მიეწერება **დაბმულობის მაჩვენებელი** — ნატურალური რიცხვების არაცარიელი დალაგებული სისტემა $(n_1, \ldots, n_k)$, $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n$. იგივე სისტემა მიეწერება დაბმულობის მაჩვენებლად წარმოებული σ ნიშნით აგებულ ყოველ წარმოებულ ოპერატორს (კვანტორს). თუ σ ლოგიკო-სპეციალური ნაწილობრივი ოპერატორული ნიშანია, მას მიეწერება როგორც ლოგიკურობის, ისე დაბმულობის მაჩვენებელი.

შემოტანილი შედგენილი ტერმინებიდან ბუნებრივად მიიღება უფრო ზოგადი ცნებების აღმნიშვნელი ტერმინები. მაგალითად, ტერმინის „ძირითადი ოპერატორი“ მოხსენიება

მისი მნიშვნელობის პირდაპირი განსაზღვრის გარეშე უნდა გავიგოთ როგორც ამ ტერმინის არაპირდაპირი განსაზღვრა: იგი შემოტანილი ძირითადი ოპერატორების სხვადასხვა ტიპის საერთო სახელწოდებაა. ანალოგიურად უნდა გავიგოთ ტერმინების „ასო“, „ოპერატორული ნიშანი“, „ოპერატორი“, „კონსტანტა“, „სპეციალური კვანტორი“, „ძირითადი ლოგიკური ოპერატორი“, „პრედიკატი“, „n-ადგილიანი ფუნქცია“, „რელაციური სუბსტანციური ოპერატორი“ და სხვათა მნიშვნელობები. შედგენილ ტერმინებში ხშირად გამოვტოვებთ სიტყვებს „ძირითადი“ და „წარმოებული“, თუ გაუგებრობის საფრთხე არ არსებობს. მიღებული შეთანხმებით, ტერმინი „ძირითადი ოპერატორი“ მხოლოდ არანულადგილიან ოპერატორებს აღნიშნავს, თუ კონტექსტიდან საწინააღმდეგო არ გამომდინარეობს. წარმოებული ოპერატორებისთვის ანალოგიურ შეთანხმებას არ ვიღებთ: ტერმინი „წარმოებული ოპერატორი“ ნულადგილიან წარმოებულ ოპერატორებსაც მოიცავს.

2.3.2 თავისუფალი და დაბმული ასოები

ოპერატორის მოქმედების არე განისაზღვრება ჩვეულებრივად. თუ σ კვანტორია, ტერმინების „σ ოპერატორის მოქმედების არე“ და „σ კვანტორის მოქმედების არე“ შინაარსს განვასხვავებთ მხოლოდ მაშინ, როცა σ ნაწილობრივი კვანტორია. კერძოდ, თუ σ ნაწილობრივი კვანტორია დაბმულობის მაჩვენებლით $(n_1, \dots, n_k)$, მაშინ σ **კვანტორის მოქმედების არე**, განსაზღვრების თანახმად, შედგება მისი იმ ოპერანდებისგან, რომელთა ნომრებია $n_1, \dots, n_k$.

a ასოს მოცემულ შემოსვლას $\mathbb{A}$ ფორმაში ვუწოდებთ a **ასოს დაბმულ შემოსვლას** $\mathbb{A}$ **ფორმაში**, თუ ეს შემოსვლა ოპერატორული ასოა ან იმ კვანტორის მოქმედების არეშია, რომლის ოპერატორულ ასოებს შორის გვხვდება a. ეს ცნება შემდეგნაირად განზოგადდება: a ასოს მოცემულ შემოსვლას $\mathbb{A}$ სიტყვაში ვუწოდებთ a **ასოს დაბმულ შემოსვლას** $\mathbb{A}$ **სიტყვაში**, თუ არსებობს $\mathbb{A}$ სიტყვის ისეთი $\mathbb{A}_1$ ნაწილი, რომელიც ფორმაა და განსახილველი შემოსვლა არის a ასოს დაბმული შემოსვლა $\mathbb{A}_1$ ფორმაში (ნაწილში). წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ვუწოდებთ a **ასოს თავისუფალ შემოსვლას** $\mathbb{A}$ **სიტყვაში**. ცხადია, a ასოს მოცემული შემოსვლა $\mathbb{A}$ ფორმაში თავისუფალია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი არ არის დაბმული შემოსვლა ამ ფორმაში. ასევე ცხადია, რომ a ასოს ერთადერთი შემოსვლა a სიტყვაში თავისუფალია.

ვთქვათ $\sigma\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n$ არის $\mathbb{A}$ სიტყვის (კერძოდ, $\mathbb{A}$ ფორმის) ისეთი ნაწილი, რომელიც ფორმას წარმოადგენს; აქ σ ოპერატორული ნიშანია, $\sigma\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ არის n-ადგილიანი კვანტორი დაბმულობის მაჩვენებლით $(n_1, \dots, n_k)$, $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m$ ოპერატორული ასოებია, ხოლო $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$ ფორმებია. მაშინ $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m$ ასოების შემოსვლებს $\sigma\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ ოპერატორში და ამ ასოების თავისუფალ შემოსვლებს $\mathbb{A}$ სიტყვის (კერძოდ, ფორმის) $\mathbb{A}_{n_1}, \dots, \mathbb{A}_{n_k}$ ნაწილებში, და მხოლოდ მათ, ვუწოდებთ σ **ოპერატორული ნიშნით დაბმულ ასოებს** (იგულისხმება σ ნიშნის მოცემული შემოსვლა). გარდა ამისა, განსაზღვრების თანახმად, a_k ასოს შემოსვლა $\sigma\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ ოპერატორში მის $(k+1)$-ე წევრად და a_k ასოს თავისუფალი შემოსვლები ზემოთ აღნიშნულ $\mathbb{A}_{n_1}, \dots, \mathbb{A}_{n_k}$ ნაწილებში ითვლება σ **ოპერატორული ნიშნით დაბმულ** k**-ურ ასოებად** (იგულისხმება a_k ასოს შემოსვლები). ცხადია, როცა $k \neq j$, რომელიმე ასოს ერთი და იგივე შემოსვლა $\mathbb{A}$ ფორმაში შეიძლება იყოს როგორც σ ნიშნით დაბმული k-ური ასო, ისე იმავე ნიშნით დაბმული j-ური ასო. დაბოლოს, a ასოს ეწოდება $\mathbb{A}$ **ფორმის (სიტყვის) თავისუფალი ასო**, შესაბამისად **დაბმული ასო**, თუ მას ამ ფორმაში (სიტყვაში) აქვს თავისუფალი, შესაბამისად

დაბმული შემოსვლა.

2.3.3 ფორმის კონგრუენტულობა და ვარიანტულობა

ფორმებში ასოების თავისუფალი და დაბმული შემოსვლების ცნებებთან დაკავშირებით შემოგვაქვს ფორმების კონგრუენტულობისა და ვარიანტულობის ცნებები, რომლებიც შემდეგნაირად განისაზღვრება.

$\mathbb{A}$ **ფორმის ასოების დაბმული შემოსვლების ჯგუფი** ეწოდება $\mathbb{A}$ ფორმაში ერთი და იმავე ასოს შემოსვლების მაქსიმალურ $\{\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k\}$ სიმრავლეს, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: ა) არსებობს რომელიმე ოპერატორული ნიშნის ისეთი σ შემოსვლა, რომ ამ სიმრავლის ყოველი ელემენტი σ ნიშნით დაბმული შემოსვლაა (იგულისხმება ოპერატორული ნიშნის შემოსვლა). აქ $\{\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k\}$ სიმრავლის მაქსიმალურობა ნიშნავს, რომ იგი არ არის ა) თვისების მქონე რომელიმე სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი.

$\mathbb{A}$ **ფორმის თავისუფალი ასოების (შემოსვლების) ჯგუფი** ეწოდება $\mathbb{A}$ ფორმაში ერთი და იმავე კვანტორული ასოს ყველა თავისუფალი შემოსვლის არაცარიელ სიმრავლეს. დაბმული ასოების ჯგუფისა და თავისუფალი ასოების ჯგუფის საერთო სახელწოდებად გამოვიყენებთ ტერმინს **ფორმის ასოების (შემოსვლების) ჯგუფი**. ამგვარად, გვაქვს ფორმის ასოების ჯგუფის ორი *სახე*. **ასოების ჯგუფის ტიპი** განისაზღვრება მისი სახითა და შესაბამისი ასოს ტიპით: ფორმის ასოების ორ ჯგუფს ერთი და იგივე ტიპი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესაბამისი ასოები ერთი და იმავე ტიპისაა და ორივე ჯგუფი ან თავისუფალი ასოების ჯგუფია, ან დაბმული ასოების ჯგუფი.

ერთი და იმავე l სიგრძის $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ სიტყვების შემადგენელ სიმბოლოთა სიმრავლეებს შორის ურთიერთცალსახა f შესაბამისობას ვუწოდებთ **კანონიკურს**, თუ $\mathbb{A}$ სიტყვის i-ურ სიმბოლოს შეესაბამება $\mathbb{B}$ სიტყვის i-ური სიმბოლო ($i = 1, 2, \ldots, l$).

ვიტყვით, რომ $\mathbb{A}$ **ფორმა არის** $\mathbb{B}$ **ფორმის ვარიანტი**, ან, რაც იგივეა, $\mathbb{A}$ **და** $\mathbb{B}$ **ურთიერთვარიანტული ფორმებია**, თუ მათ ერთი და იგივე l სიგრძე აქვს (ანუ შეიცავს სიმბოლოთა შემოსვლების ერთსა და იმავე რაოდენობას) და მათ სიმბოლოთა სიმრავლეებს შორის კანონიკური შესაბამისობისას სრულდება შემდეგი პირობები: ა) $\mathbb{A}$ ფორმის ნებისმიერ სიმბოლოს, რომელიც კვანტორული ასო არ არის, შეესაბამება იგივე სიმბოლო $\mathbb{B}$-დან; ბ) $\mathbb{A}$ ფორმის თავისუფალი ასოების ყოველ ჯგუფს შეესაბამება $\mathbb{B}$ ფორმის იმავე ტიპის თავისუფალი ასოების ჯგუფი; გ) $\mathbb{A}$ ფორმის დაბმული ასოების ყოველ ჯგუფს შეესაბამება $\mathbb{B}$ ფორმის იმავე ტიპის დაბმული ასოების ჯგუფი. ვიტყვით, რომ $\mathbb{A}$ **ფორმა კონგრუენტულია** $\mathbb{B}$ **ფორმისა**, ან, რაც იგივეა, $\mathbb{A}$ **და** $\mathbb{B}$ **ფორმები ურთიერთკონგრუენტულია** (და ვწერთ $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), თუ მათ ერთი და იგივე l სიგრძე აქვს და მათ სიმბოლოთა სიმრავლეებს შორის კანონიკური შესაბამისობისას გ) პირობასთან ერთად სრულდება შემდეგი პირობაც: დ) $\mathbb{A}$ ფორმის ნებისმიერ სიმბოლოს, რომელიც ასოს დაბმული შემოსვლა არ არის, შეესაბამება იგივე სიმბოლო.

თუ კონსტანტები ოპერატორულ ასოებად არ გამოიყენება, ფორმების კონგრუენტულობის მოცემულ განსაზღვრებაში სიტყვა „ასო“ შეიძლება შევცვალოთ სიტყვით „ცვლადი“. ცხადია, (d) $\Rightarrow$ (a) $\wedge$ (b); ამიტომ ურთიერთკონგრუენტული ფორმები ურთიერთვარიანტულიცაა.

ასოების ჯგუფების, შესაბამისად **დაბმული ასოების ჯგუფების**, შესაბამისად **თავისუფალი ასოების ჯგუფების ერთდროული შეცვლა**

$$\{\mathsf{a}_1^1, \ldots, \mathsf{a}_{k_1}^1\}, \ \ldots, \ \{\mathsf{a}_1^n, \ldots, \mathsf{a}_{k_n}^n\},$$

ნიშნავს ამ ჯგუფების ყოველი შემოსვლის შეცვლას იმავე ტიპის ასოთი ისე, რომ ერთი და იმავე ჯგუფის ელემენტები ერთი და იმავე ასოთი შეიცვალოს, მიღებული სიტყვა ფორმა იყოს და ამ ფორმაში თითოეული საწყისი ჯგუფის ელემენტების შემცვლელ შემოსვლათა სიმრავლე იმავე ტიპის ასოების ჯგუფს წარმოადგენდეს. როცა $n = 1$, შემოტანილი ტერმინების ნაცვლად გამოვიყენებთ აგრეთვე ტერმინებს: **ასოების ჯგუფის შეცვლა**, **დაბმული ასოების ჯგუფის შეცვლა**, **თავისუფალი ასოების ჯგუფის შეცვლა**. ასოების ჯგუფების, შესაბამისად დაბმული ასოების ჯგუფების, შესაბამისად თავისუფალი ასოების ჯგუფების ერთდროული შეცვლა შეიძლება შესრულდეს თითოეული ჯგუფის თანმიმდევრული შეცვლით. ეს მტკიცდება იმავე მეთოდით, რომლითაც ერთდროული ჩანაცვლება მარტივი ჩანაცვლებების მიმდევრობამდე დაიყვანება. ადვილი დასანახია, რომ ორი ფორმა ურთიერთვარიანტულია, შესაბამისად ურთიერთკონგრუენტულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული მათგანი (ერთი მათგანი) მეორისგან მიიღება ასოების რამდენიმე ჯგუფის, შესაბამისად დაბმული ასოების რამდენიმე ჯგუფის, ერთდროული შეცვლით. ასევე, $\mathbb{A}$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფი არის $\mathbb{A}$ ფორმის $\mathbb{A}_1$ ნაწილის დაბმული ასოების ჯგუფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ჯგუფის სულ მცირე ერთი ელემენტი $\mathbb{A}_1$ ნაწილის დაბმული ასოა. ასოების ჯგუფი ცალსახად განისაზღვრება მისი ნებისმიერი ელემენტით. ჯგუფის თითოეულ ელემენტს ეწოდება ამ **ჯგუფის წარმომადგენელი**. დაბმული ასოების ჯგუფის წარმომადგენელს ეწოდება **კანონიკური წარმომადგენელი**, თუ იგი შესაბამის ოპერატორულ ნიშანთან უახლოესი ოპერატორული ასოა. ცხადია, დაბმული ასოების ყოველ ჯგუფს ერთადერთი კანონიკური წარმომადგენელი აქვს.

ადვილი დასანახია, რომ ურთიერთკონგრუენტული $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების შესაბამისი $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{B}_1$ ნაწილები ურთიერთვარიანტული ფორმებია. ამასთან, $\mathbb{A}_1$ ნაწილის თავისუფალი ასოების ნებისმიერი ჯგუფი არის ან $\mathbb{A}$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფის ის საკუთრივი ნაწილი, რომელიც $\mathbb{A}_1$ ნაწილშია მოთავსებული, ან $\mathbb{A}$ ფორმის თავისუფალი ასოების ჯგუფის ის ნაწილი, რომელიც $\mathbb{A}_1$ ნაწილშია მოთავსებული. დაბოლოს, კონგრუენტულობისა და ვარიანტულობის დამოკიდებულებებს აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტიულობის თვისებები.

2.4 შეცვლა და ჩანაცვლება

2.4.1 ჩანაცვლებები

ქვემოთ დაგვჭირდება ჩანაცვლების ნიშნები $(—/_{:}—)$, $(—/_{.}—)$ და $(—/—)$, რომლებიც შემდეგნაირად გამოიყენება:

თუ $\mathbb{A}$ ფორმაა, $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ სიტყვებია, ხოლო $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ განსხვავებული ასოებია, მაშინ

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \, /_{:} \, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A}, \tag{1}$$

შესაბამისად

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{/.} \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A} \tag{2}$$

ეს გამოსახულებები წაიკითხება: $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ ცვლის $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ ასოების ყველა შემოსვლას, შესაბამისად თავისუფალ შემოსვლებს, $\mathbb{A}$-ში. ისინი აღნიშნავს სიტყვას, რომელიც მიიღება, თუ ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის $\mathbb{B}_i$ სიტყვას ჩავსვამთ b_i ასოს ყოველი შემოსვლის, შესაბამისად ყოველი თავისუფალი შემოსვლის ნაცვლად $\mathbb{A}$-ში. (1), შესაბამისად (2) არის $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ **სიტყვების ერთდროული ჩანაცვლების შედეგი** $\mathbb{A}$**-ში** $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ **ასოების ყველა შემოსვლის, შესაბამისად თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად**. ასევე, $(\mathbb{B}_i \mathbin{/:} \mathsf{b}_i)\mathbb{A}$, შესაბამისად $(\mathbb{B}_i \mathbin{/.} \mathsf{b}_i)\mathbb{A}$ არის $\mathbb{B}_i$ **სიტყვის ჩანაცვლების შედეგი** $\mathbb{A}$**-ში** b_i **ასოს ყველა შემოსვლის, შესაბამისად თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად**. ამ უკანასკნელი სახის ჩანაცვლებას ეწოდება აგრეთვე **მარტივი ჩანაცვლება**. $(\mathbb{B}_i/\mathbin{:}\mathsf{b}_i)\mathbb{A}$ წაიკითხება: „$\mathbb{B}_i$ ცვლის b_i ასოს ყველა შემოსვლას $\mathbb{A}$-ში“, ხოლო $(\mathbb{B}_i \mathbin{/.} \mathsf{b}_i)\mathbb{A}$ — „$\mathbb{B}_i$ ცვლის b_i ასოს თავისუფალ შემოსვლებს $\mathbb{A}$-ში“.

ამგვარად, შემოვიტანეთ $\mathbb{A}$ ფორმაში $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ ასოების ყველა შემოსვლის, შესაბამისად თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად ერთდროული ჩანაცვლების ცნება იმ შემთხვევისთვის, როცა $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ წყვილ-წყვილად განსხვავებულია. თუ $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ მიმდევრობაში განმეორებული წევრები გვხვდება, მოსახერხებელია ამ ცნებების შემდეგნაირად განზოგადება. განსაზღვრების თანახმად,

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{/:} \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A} \rightleftharpoons (\mathbb{B}_{i_1}, \ldots, \mathbb{B}_{i_k} \mathbin{/:} \mathsf{b}_{i_1}, \ldots, \mathsf{b}_{i_k})\mathbb{A};$$
$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{/.} \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A} \rightleftharpoons (\mathbb{B}_{i_1}, \ldots, \mathbb{B}_{i_k} \mathbin{/.} \mathsf{b}_{i_1}, \ldots, \mathsf{b}_{i_k})\mathbb{A};$$

სადაც $\mathsf{b}_{i_1}, \ldots, \mathsf{b}_{i_k}$ მიიღება $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ მიმდევრობიდან განმეორებული წევრების წაშლით. მიმდევრობის წევრს ეწოდება **განმეორებული**, თუ იგი რომელიმე წინა წევრის ტოლია; $\rightleftharpoons$ არის **გრაფიკული ტოლობის** ნიშანი.

ვთქვათ $\mathbb{A}$ ფორმაა, $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ განსხვავებული ასოებია და ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის b_i და $\mathbb{B}_i$ ან ერთი და იმავე ტიპის ასოებია, ან ერთი და იმავე ტიპის ფორმები. მაშინ

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n/\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A}$$

(წაიკითხება: „$\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ ცვლის $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ ასოებს $\mathbb{A}$-ში“) განსაზღვრების თანახმად აღნიშნავს ფორმების შემდეგი მიმდევრობის ბოლო წევრს:

$$\mathbb{A}_0 \rightleftharpoons \mathbb{A},\ \mathbb{A}_1,\ \ldots,\ \mathbb{A}_k \rightleftharpoons (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{/.} \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A}_{k-1}.$$

ეს მიმდევრობა ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი პირობით. ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$-სთვის $\mathbb{A}_i$ ფორმა $\mathbb{A}_{i-1}$-დან შემდეგნაირად მიიღება. $\mathbb{A}_{i-1}$ ფორმაში $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ ასოების თავისუფალ შემოსვლებს შორის ვიპოვოთ პირველი ისეთი b შემოსვლა, რომელიც იმ კვანტორის მოქმედების არეშია, რომლის ოპერატორულ ასოებს შორის გვხვდება $\mathbb{B}_j$ სიტყვის თავისუფალი ასო; აქ j ისეთი ნატურალური რიცხვია, რომ b არის b_j. ასეთ კვანტორებს შორის ვირჩევთ ყველა დანარჩენის მარცხნივ მდებარეს, ხოლო მის მითითებული თვისების მქონე ოპერატორულ ასოებს შორის — ყველა დანარჩენის მარცხნივ მდებარე ასოს. ვთქვათ ეს არის რომელიმე ასოს a შემოსვლა. ასეთი შემოსვლა არსებობს $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_{k-2}$ მიმდევრობის თითოეულ წევრში, ხოლო $\mathbb{A}_{k-1}$-ში აღარ არსებობს.

$\mathbb{A}_i$-ს მისაღებად საკმარისია a შემოსვლის შემცველი დაბმული ასოების ჯგუფის ყოველი წევრი შევცვალოთ c ასოთი, სადაც c არის a ასოს ტიპის ასოთა ანბანურ გადათვლაში პირველი ასო, რომელიც არცერთი $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ სიტყვის თავისუფალი ასო არ არის; ამასთან, შესრულებული შეცვლა უნდა იყოს აღნიშნული დაბმული ასოების ჯგუფის შეცვლა. თუ გავითვალისწინებთ ქვემოთ მოცემულ განსაზღვრებას ტერმინისა „$\mathbb{B}$ სიტყვა თავისუფალია a ასოსთვის $\mathbb{A}$ ფორმაში“, ადვილად დავინახავთ, რომ $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_{k-1}$ ფორმებიდან თითოეული კონგრუენტულია $\mathbb{A}$ ფორმისა. ამასთან, $\mathbb{A}_{k-1}$-სთვის სრულდება შემდეგი პირობა: (a_n) ყოველი $i = 1, 2, \ldots, n$-სთვის $\mathbb{B}_i$ სიტყვა თავისუფალია b_i ასოსთვის $\mathbb{A}_{k-1}$-ში.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ (a_n) პირობა შესრულებულია $\mathbb{A}$-თვის, მაშინ $k = 1$ და შესაბამისად,

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n/\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A} = (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \,/_{\cdot}\, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A}.$$

ზოგად შემთხვევაში, როცა $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ ასოების განსხვავებულობას არ მოვითხოვთ, განსაზღვრების თანახმად გვაქვს

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n/\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A} = (\mathbb{B}_{i_1}, \ldots, \mathbb{B}_{i_k}/\mathsf{b}_{i_1}, \ldots, \mathsf{b}_{i_k})\mathbb{A},$$

სადაც $\mathsf{b}_{i_1}, \ldots, \mathsf{b}_{i_k}$ მიიღება $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ მიმდევრობიდან განმეორებული წევრების წაშლით.

$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n/\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A}$ ფორმას ვუწოდებთ $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ **სიტყვების $\mathbb{A}$ ფორმაში $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ ასოების ნაცვლად ერთდროული ჩანაცვლების შედეგს**. $(\mathbb{B}_i/\mathsf{b}_i)\mathbb{A}$ ფორმას ეწოდება აგრეთვე $\mathbb{B}_i$ **სიტყვის $\mathbb{A}$ ფორმაში b_i ასოს ნაცვლად მარტივი ჩანაცვლების შედეგი**.

ახლა ადვილად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.1. 1. *ვთქვათ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ურთიერთკონგრუენტული ფორმებია, ხოლო $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ ასოებია. დავუშვათ, რომ ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის ან a_i, $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ერთი და იმავე ტიპის ასოებია და $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ერთი და იგივე ასოა, ან a_i, $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ერთი და იმავე ტიპის ფორმებია და $\mathbb{A}_i \simeq \mathbb{B}_i$. მაშინ*

$$(\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n/\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{A} \simeq (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n/\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{B}.$$

კერძოდ, თუ ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის $\mathbb{A}_i$ სიტყვა თავისუფალია a_i-სთვის $\mathbb{A}$-ში, ხოლო $\mathbb{B}_i$ სიტყვა თავისუფალია a_i-სთვის $\mathbb{B}$-ში, მაშინ

$$(\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n \,/_{\cdot}\, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{A} \simeq (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \,/_{\cdot}\, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{B}.$$

2. *ვთქვათ $\mathbb{A}$ ფორმაა, $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ ასოებია და ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის $\mathbb{A}_i$ და a_i ერთი და იმავე ტიპის ასოებია ან ერთი და იმავე ტიპის ფორმებია. შემდეგ, ვთქვათ $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_m$ არის $\mathbb{A}$ ფორმის ყველა იმ დაბმული ასოს გადათვლა, რომელთაგან თითოეული $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ სიტყვებიდან ერთ-ერთის მაინც თავისუფალი ასოა. დაბოლოს, ვთქვათ $\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_m$ ასოების მიმდევრობაა, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი პირობით: d_i არის პირველი ასო იმ ასოების ანბანურ გადათვლაში, რომელთა ტიპი ემთხვევა*

b_i *ასოს ტიპს და რომლებიც არ გვხვდება შემდეგი მიმდევრობის არცერთ წევრში:*

$$\mathbb{A}, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

$\mathbb{A}^*$*-ით აღვნიშნოთ ფორმა, რომელიც მიიღება* $\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_m$ *ასოების* $\mathbb{A}$*-ში, შესაბამისად,* $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_m$ *ასოების დაბმული შემოსვლების ნაცვლად ჩანაცვლებით. მაშინ* $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}^*$*,* $\mathbb{A}_i$ *სიტყვა თავისუფალია* a_i*-სთვის* $\mathbb{A}^*$*-ში და, მაშასადამე,*

$$(\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n/\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{A} \simeq (\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n/\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{A}^* \\ = (\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n /_. \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{A}^*.$$

ამრიგად, გავეცანით $(\text{—} /_: \text{—})$, $(\text{—} /_. \text{—})$ და $(\text{—}/\text{—})$ გამოსახულებებსა და ჩანაცვლების შედეგების ჩასაწერად მათი გამოყენების წესებს. ამ გამოსახულებების შესაბამის ჩანაცვლებებს ვუწოდოთ, შესაბამისად, $(\text{—} /_: \text{—})$ **ტიპის ჩანაცვლება**, $(\text{—} /_. \text{—})$ **ტიპის ჩანაცვლება** და $(\text{—}/\text{—})$ **ტიპის ჩანაცვლება**. ამ ტერმინების ნაცვლად აგრეთვე გამოვიყენებთ შემოკლებულ სახელებს: $(\text{—} /_: \text{—})$*-ჩანაცვლება*, $(\text{—} /_. \text{—})$*-ჩანაცვლება* და $(\text{—}/\text{—})$*-ჩანაცვლება*.

2.4.2 ფარდობითი თავისუფლების თვისება

ვთქვათ $\mathbb{A}$ ფორმაა, $\mathbb{A}_1$ — $\mathbb{A}$ სიტყვის ნაწილი, a — ასო, ხოლო $\mathbb{B}$ — სიტყვა; ამასთან, $\mathbb{B}$ და $\mathbb{A}_1$ ერთი და იმავე ტიპის ასოები ან ფორმებია. ვიტყვით, რომ $\mathbb{B}$ **სიტყვა თავისუფალია**, შესაბამისად **სრულიად თავისუფალია** $\mathbb{A}_1$**-სთვის** $\mathbb{A}$**-ში**, თუ $\mathbb{A}_1$ არ არის იმ კვანტორის მოქმედების არეში, რომლის ოპერატორულ ასოებს შორის გვხვდება $\mathbb{B}$ სიტყვის ისეთი თავისუფალი ასო, რომელსაც $\mathbb{A}_1$-ში თავისუფალი შემოსვლა არ აქვს, შესაბამისად — რომლის ოპერატორულ ასოებს შორის გვხვდება $\mathbb{B}$ სიტყვის რომელიმე თავისუფალი ასო. სხვა სიტყვებით, „$\mathbb{B}$ სრულიად თავისუფალია (შესაბამისად, თავისუფალია) $\mathbb{A}_1$-სთვის $\mathbb{A}$-ში“ ნიშნავს, რომ $\mathbb{A}$-ში $\mathbb{A}_1$ ნაწილის ნაცვლად $\mathbb{B}$ სიტყვის ჩასმით მიღებულ ფორმაში ჩასმული $\mathbb{B}$ შემოსვლის ყველა თავისუფალი ასო თავისუფლად დარჩება (შესაბამისად, თავისუფლად დარჩება მისი ყველა ის თავისუფალი ასო, რომელიც $\mathbb{A}_1$ ნაწილის თავისუფალი ასო არ არის). გარდა ამისა, ვიტყვით, რომ $\mathbb{B}$ **სიტყვა თავისუფალია** a **ასოსთვის** $\mathbb{A}$ **ფორმაში**, თუ იგი თავისუფალია $\mathbb{A}$-ში a ასოს ყოველი თავისუფალი შემოსვლისთვის. ამ უკანასკნელი განსაზღვრების შინაარსი არ იცვლება, თუ თავისუფლების ნაცვლად $\mathbb{B}$-ს სრულ თავისუფლებას მოვითხოვთ. ცხადია, $\mathbb{B}$ სიტყვა თავისუფალია a ასოსთვის $\mathbb{A}$ ფორმაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathbb{B}$ სიტყვის ყოველი თავისუფალი ასო თავისუფალია $\mathbb{A}$-ში a ასოს ყოველი თავისუფალი შემოსვლისთვის.

უშუალოდ განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს შემდეგი.

ვთქვათ $\mathbb{A}$ ფორმაა, $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$ განსხვავებული ასოებია და ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის $\mathbb{B}_i$ და b_i ერთი და იმავე ტიპის ასოები ან ფორმებია. მაშინ $\mathbb{A}$ და $(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n /_. \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A}$ ერთი და იმავე ტიპის ფორმებია და შემდეგი ორი პირობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

(a_n). ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის სიტყვა $\mathbb{B}_i$ თავისუფალია b_i ასოსთვის $\mathbb{A}$-ფორმაში.

(a'_n). თუ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ და $\mathbb{B}'_i$ არის $(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n /_. \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A}$ ფორმაში ის შემოსვლა, რომელიც მიიღება $\mathbb{A}$ ფორმაში b_i ასოს რომელიმე თავისუფალი შემოსვლის ნაც-

ვლად $\mathbb{B}_i$ სიტყვის ჩასმით, ხოლო C_i არის რომელიმე C ასოს შემოსვლა $\mathbb{B}_i$-ში, მაშინ C_i არის C ასოს დაბმული შემოსვლა $\mathbb{B}_i$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა C_i-ს შესაბამისი შემოსვლა $\mathbb{B}'_i$-ში არის C ასოს დაბმული შემოსვლა $(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \,/_. \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n)\mathbb{A}$ ფორმაში.

2.4.3 ოპერატორული ასოს მოქმედების არე და მასთან დაკავშირებული ცნებები

ვთქვათ $\mathbb{A}$ ფორმაა, $\mathbb{A}_1$ — $\mathbb{A}$ ფორმის ნაწილი, შესაბამისად რომელიმე b ასოს შემოსვლა $\mathbb{A}$ ფორმაში, ხოლო a — $\mathbb{A}$ ფორმის σ კვანტორის ოპერატორული ასო (იგულისხმება კვანტორის შემოსვლა). ვიტყვით, რომ $\mathbb{A}_1$ **ნაწილი, შესაბამისად b ასოს განსახილველი $\mathbb{A}_1$ შემოსვლა, a ოპერატორული ასოს მოქმედების არეშია**, თუ $\mathbb{A}_1$ არის σ კვანტორის ოპერატორული ასო, ან $\mathbb{A}_1$ არის σ კვანტორის მოქმედების არეში და, ამასთან, $\mathbb{A}_1$ არც ოპერატორული ასოა და არც იმ σ' კვანტორის მოქმედების არეშია, რომელიც თვითონ σ კვანტორის მოქმედების არეშია და რომლის ოპერატორულ ასოებს შორისაც გვხვდება a. თუ დამატებით a, როგორც ასო, არის $\mathbb{A}_1$ ნაწილის თავისუფალი ასო, შესაბამისად ემთხვევა $\mathbb{A}_1$-ს, ვიტყვით, რომ a **ოპერატორული ასო მოქმედებს** $\mathbb{A}_1$**-ზე**. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ a **შემოსვლა არ მოქმედებს** $\mathbb{A}_1$**-ზე**. იგულისხმება, რომ ასოს შემოსვლა, რომელიც ოპერატორული ასო არ არის, არცერთ ნაწილზე და არც ასოს რომელიმე შემოსვლაზე არ მოქმედებს. ვიტყვით აგრეთვე, რომ σ **კვანტორი და σ კვანტორის ოპერატორული ნიშანი მოქმედებს** $\mathbb{A}_1$**-ზე**, თუ $\mathbb{A}_1$-ზე მოქმედებს σ კვანტორის რომელიმე ოპერატორული ასო. აქ იგულისხმება კვანტორისა და მისი ოპერატორული ნიშნის შემოსვლები. ცხადია, a ოპერატორული ასო მოქმედებს a-ს შემცველი დაბმული ასოების ჯგუფის ყოველ ელემენტზე და არ მოქმედებს ასოს არცერთ სხვა შემოსვლაზე.

ვთქვათ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმებია, $\mathbb{A}_1$ — $\mathbb{A}$ ფორმის ნაწილი, რომლის ტიპიც $\mathbb{B}$ ფორმის ტიპს ემთხვევა, ხოლო a — $\mathbb{A}$ ფორმის σ კვანტორის ოპერატორული ასო (იგულისხმება კვანტორის შემოსვლა). ვიტყვით, რომ a **ოპერატორული ასო მოქმედებს $\mathbb{B}$ ფორმაზე, რომელიც $\mathbb{A}_1$ ნაწილის ადგილზეა მოთავსებული**, თუ $\mathbb{B}$ ფორმა შეიცავს a ასოს თავისუფალ შემოსვლას და $\mathbb{A}$ ფორმის $\mathbb{A}_1$ ნაწილი a ოპერატორული ასოს მოქმედების არეშია.

2.4.4 ნაწილების შეცვლა

ახლა შემოვიტანოთ $(\text{—} \;//_: \text{—})$ და $(\text{—} \;// \text{—})$ ნიშნები. პირველს ეწოდება **უშუალო შეცვლის ნიშანი**, ხოლო მეორეს — **შეცვლის ნიშანი**.

$(\text{—} \;//_: \text{—})$ ნიშანი შემდეგნაირად გამოიყენება.

თუ $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n, \mathbb{A}$ სიტყვებია, ხოლო $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ — $\mathbb{A}$ სიტყვის ერთმანეთის არაგადამფარავი ნაწილები, მაშინ

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \;//_: \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\mathbb{A} \tag{1}$$

ეს გამოსახულება წაიკითხება: „$\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ უშუალოდ ცვლის $\mathbb{A}$ სიტყვის $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ ნაწილებს“ და აღნიშნავს სიტყვას, რომელიც $\mathbb{A}$-დან მიიღება $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ ნაწილების შესაბამისად $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ სიტყვებით შეცვლით. მას ვუწოდებთ $\mathbb{A}$ **სიტყვაში** $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ **ნაწილების ნაცვლად** $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ **სიტყვების უშუალო (ერთდროული) შეცვლის შედეგს**;

ზოგჯერ ამავე აზრით გამოვიყენებთ ტერმინს **უშუალო (ერთდროული) ჩანაცვლების შედეგი**.

(— // —) ნიშანი შემდეგნაირად გამოიყენება.

თუ $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ ფორმებია, $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ — $\mathbb{A}$ ფორმის ერთმანეთის არაგადამფარავი ნაწილები და ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ერთი და იმავე ტიპის ფორმებია, მაშინ

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{//} \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\mathbb{A}$$

ეს გამოსახულება წაიკითხება: „$\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ ცვლის $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ ნაწილებს $\mathbb{A}$-ში“ და აღნიშნავს შემდეგი მიმდევრობის ბოლო წევრს:

$$\mathbb{A}'_0 \rightleftharpoons \mathbb{A},\ \mathbb{A}'_1,\ \ldots,\ \mathbb{A}'_k \rightleftharpoons (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{//_:} \mathbb{A}^1_{k-1}, \ldots, \mathbb{A}^n_{k-1})\mathbb{A}'_{k-1}.$$

აქ $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_{k-1}$ მიმდევრობა და შესაბამისი ფორმების $\mathbb{A}^j_i$ ნაწილები ($j = 1, 2, \ldots, n; i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$) ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი ალგორითმული პროცესით.

ვიგულისხმოთ, რომ $\mathbb{A}^j_0 \rightleftharpoons \mathbb{A}_j (j = 1, 2, \ldots, n)$. დავუშვათ, სრულდება შემდეგი (a_m) პირობა, რომელიც დადებით ნატურალურ m რიცხვზეა დამოკიდებული.

<u>პირობა (a_m).</u> განსაზღვრულია $\mathbb{A}'_{m-1}$ ფორმა და მისი ერთმანეთის არაგადამფარავი $\mathbb{A}^1_{m-1}, \ldots, \mathbb{A}^n_{m-1}$ ნაწილები. მათ შორის არის ისეთი $\mathbb{A}^\alpha_{m-1}$ ნაწილი, რომელიც იმ კვანტორის მოქმედების არეშია, რომლის ოპერატორულ ასოებს შორის გვხვდება $\mathbb{B}_\alpha$ ფორმის თავისუფალი ასო, რომელიც $\mathbb{A}^\alpha_{m-1}$-ის თავისუფალი ასო არ არის. (a_1) პირობის პირველი ნაწილი შესრულებულია.

ვიგულისხმოთ, რომ $\mathbb{A}^\alpha_{m-1}$ მდებარეობს $\mathbb{A}^1_{m-1}, \ldots, \mathbb{A}^n_{m-1}$ ნაწილებიდან აღნიშნული თვისების მქონე ყველა სხვა ნაწილის მარცხნივ. ვთქვათ σ არის $\mathbb{A}^\alpha_{m-1}$-ის მიმართ აღნიშნული თვისების მქონე და ყველა სხვა ასეთი კვანტორის მარცხნივ მდებარე კვანტორი; a კი მისი ოპერატორული ასოა, რომელსაც აღნიშნული თვისება აქვს და σ-ს ყველა სხვა ასეთი ოპერატორული ასოს მარცხნივ მდებარეობს. a შემოსვლის შემცველი დაბმული ასოების ჯგუფის ყველა წევრი შევცვალოთ c ასოთი, სადაც c არის a ასოს ტიპის ასოთა ანბანურ გადათვლაში პირველი ასო, რომელიც არცერთი $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ ფორმის თავისუფალი ასო არ არის. შეცვლა უნდა შესრულდეს როგორც აღნიშნული დაბმული ასოების ჯგუფის შეცვლა. $\mathbb{A}'_m, \mathbb{A}^1_m, \ldots, \mathbb{A}^n_m$-ით აღვნიშნოთ ფორმა და მისი ერთმანეთის არაგადამფარავი ნაწილები, რომლებშიც ამ შეცვლის შედეგად გარდაიქმნება $\mathbb{A}'_{m-1}$ ფორმა და მისი $\mathbb{A}^1_{m-1}, \ldots, \mathbb{A}^n_{m-1}$ ნაწილები. m მეტაცვლადს თანმიმდევრობით მივანიჭოთ მნიშვნელობები $1, 2, 3, \ldots$. თუ შესაბამისი (a_m) პირობა სრულდება, ვიპოვოთ შესაბამისი ფორმა და მისი ნაწილები; წინააღმდეგ შემთხვევაში პროცესი წყდება.

ადვილი დასანახია, რომ ამ წესით განსაზღვრული ალგორითმული პროცესი დასრულებადია: k არის პირველი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც (a_k) პირობა არ სრულდება.

ცხადია, $\mathbb{A}'_0, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_{k-1}$ ფორმები კონგრუენტულია $\mathbb{A}$ ფორმისა. ამასთან, თუ $l \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, შემდეგი პირობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $l = k-1$:

<u>პირობა (b_l).</u> $\mathbb{B}_i$ ფორმა თავისუფალია $\mathbb{A}^i_l$-სთვის $\mathbb{A}'_l$-ში, $i = 1, 2, \ldots, n$.

ადვილი დასანახია, რომ თუ (b_0) შესრულებულია, მაშინ $k = 1$ და შესაბამისად,

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{//} \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\mathbb{A} \rightleftharpoons (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{//_:} \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\mathbb{A}.$$

$$(\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{//} \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\mathbb{A}$$

ფორმას ეწოდება $\mathbb{A}$**-ში** $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ **ფორმებით** $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ **ნაწილების ერთდროული შეცვლის შედეგი**. $(\mathbb{B}_i \mathbin{//} \mathbb{A}_i)\mathbb{A}$ ფორმას ეწოდება აგრეთვე $\mathbb{B}_i$ **ფორმით** $\mathbb{A}$**-ში** $\mathbb{A}_i$ **ნაწილის მარტივი შეცვლის შედეგი**. ამ ტერმინებში სიტყვა „შეცვლის“ ნაცვლად გამოვიყენებთ აგრეთვე სიტყვას „ჩანაცვლების“.

შენიშვნა. ადვილი დასანახია, რომ $n = 1$-ის შემთხვევაში გვაქვს $\mathbb{A}^1_{k-1} = \mathbb{A}_1$.

ვთქვათ ერთდროულად განიხილება ორი ან რამდენიმე $\mathscr{T}$ ტიპის თეორია, რომელთაგან თითოეული აღინიშნება $\mathscr{T}$ სიმბოლოთი ან ინდექსებიანი $\mathscr{T}$ სიმბოლოთი, და ერთი თეორიის ფორმები შეიძლება განვიხილოთ როგორც სხვა თეორიის ფორმების აღნიშვნები. გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად თითოეულ თეორიაში შეცვლებისა და ჩანაცვლებების შემოტანისას შესაბამის აღნიშვნებში / და // ნიშნებს მივაწერთ იმავე ინდექსებს, რომლებიც თეორიის აღმნიშვნელ სიმბოლოს აქვს. უფრო რთულ შემთხვევებში ქვედა ინდექსებად გამოვიყენებთ თვით თეორიების აღმნიშვნელ სიმბოლოებს. მაგალითად, $\mathscr{T}$ ტიპის თეორიაში, რომელიც $\widetilde{\mathscr{T}_a}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, გამოიყენება შემდეგი სახის გამოსახულებები:

$(—/_{\widetilde{\mathscr{T}_a}}—)$, $(—//_{\widetilde{\mathscr{T}_a}}—)$, $(—/_{\widetilde{\mathscr{T}_a}:}—)$ და ა.შ. ასევე, $\mathscr{T}$ ტიპის $\mathcal{P}_1$ თეორიაში გამოიყენება $(—/_{\mathcal{P}_1}—)$, $(—//_{\mathcal{P}_1}—)$, $(—/_{\mathcal{P}_1:}—)$ და ა.შ.

2.4.5 ჩანაცვლებისა და შეცვლის თვისებები

თეორემა 2.2. *ვთქვათ* $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2$ *ისეთი ფორმებია, რომ* $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ *და* $\mathbb{A}_2 \simeq \mathbb{B}_2$, *ხოლო* $\mathbb{A}_1$ *და* $\mathbb{B}_1$, *შესაბამისად,* $\mathbb{A}$ *და* $\mathbb{B}$ *ფორმების შესაბამისი ნაწილებია, რომელთა ტიპი ემთხვევა* $\mathbb{A}_2$ *და* $\mathbb{B}_2$ *ფორმების ტიპს. შემდეგ, ვთქვათ* $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ *არის* $\mathbb{A}$ *ფორმის დაბმული ასოების გარკვეული ჯგუფების კანონიკური წარმომადგენლების ისეთი გადათვლა, რომ* $\mathbb{A}$ *ფორმის დაბმულ ასოთა ჯგუფის კანონიკური წარმომადგენელი* a *შედის* $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ *მიმდევრობაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* a *მოქმედებს* $\mathbb{A}_1$*-ის ადგილას მოთავსებულ* $\mathbb{A}_2$ *ფორმაზე. ამასთან, ამ წარმომადგენლების მიმდევრობა* $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$*-ში ისეთივეა, როგორიც* $\mathbb{A}$ *ფორმაში.*

შემდეგ, ვთქვათ $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_n$ *არის* $\mathbb{B}$*-ში ასოების ის შემოსვლები, რომლებიც შეესაბამება* $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ *შემოსვლებს. შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:* α'_i, *შესაბამისად* α_i, *არის* a'_i, *შესაბამისად* a_i, *შემოსვლა, განხილული როგორც ასო,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *(*$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *ასოები წყვილ-წყვილად განსხვავებულია);* $\mathbb{B}'_2$ *არის* $\mathbb{B}_2$ *ფორმის კონგრუენტული ისეთი ფორმა, რომ ყოველი* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*-სთვის* α'_i *ასო თავისუფალია* α_i*-სთვის* $\mathbb{B}'_2$*-ში;*

$$\mathbb{B}^*_2 = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n /_. \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}'_2; \qquad \mathbb{A}' = (\mathbb{A}_2 //_: \mathbb{A}_1)\mathbb{A}; \qquad \mathbb{B}' = (\mathbb{B}^*_2 //_: \mathbb{B}_1)\mathbb{B}$$

($\mathbb{B}^*_2$*-ის როლში შეიძლება ავიღოთ* $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n/\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}_2$*).*

ამ პირობებში გვაქვს:

1. *დავუშვათ, რომ* (a) $\mathbb{B}$ *და* $\mathbb{B}^*_2$ *ფორმებსა და* $\mathbb{B}$ *ფორმის* $\mathbb{B}_1$ *ნაწილთან დაკავშირებული კანონიკური წარმომადგენლების მიმდევრობა, რომელიც* $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ *მიმდევრობის ანალოგიურად განისაზღვრება, ემთხვევა* $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_n$ *მიმდევრობას;* (b) $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ *ასოე-*

ბიდან ნებისმიერი ასოს ყოველი თავისუფალი შემოსვლა ფორმაში

$$\mathbb{B}_2^* = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \,/.\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}'_2$$

ჩანაცვლებით მიღებული შემოსვლაა. მაშინ $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{B}'$.

2. *დავუშვათ, რომ სრულდება* (a) *პირობა და* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *მიმდევრობა ემთხვევა* $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ *მიმდევრობას. მაშინ* $\mathbb{B}_2^* = \mathbb{B}'_2$ *და* $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{B}'$. *ამასთან,* $\mathbb{B}'_2$ *ფორმის და, მაშასადამე,* $\mathbb{B}_2^*$ *ფორმის როლში შეიძლება ავიღოთ* $\mathbb{B}_2$, *ანუ* $(\mathbb{A}_2 \,//.\, \mathbb{A}_1)\mathbb{A} \simeq (\mathbb{B}_2 \,//.\, \mathbb{B}_1)\mathbb{B}$.

3. *დავუშვათ, რომ* $\mathbb{A}_2$ *ფორმა თავისუფალია* $\mathbb{A}_1$*-სთვის* $\mathbb{A}$ *ფორმაში,* $\mathbb{B}_2^*$ *ფორმა თავისუფალია* $\mathbb{B}_1$*-სთვის* $\mathbb{B}$ *ფორმაში,* $\mathbb{A}_1$ *ნაწილის ყოველი თავისუფალი ასო, რომელიც* $\mathbb{A}$*-ში დაბმულია, თავისუფალია* $\mathbb{A}_2$ *ფორმაში, ხოლო* $\mathbb{B}_1$ *ნაწილის ყოველი თავისუფალი ასო, რომელიც* $\mathbb{B}$*-ში დაბმულია, თავისუფალია* $\mathbb{B}_2^*$ *ფორმაში. მაშინ სრულდება* (a) *პირობა. მაშასადამე, თუ დამატებით სრულდება* (b) *პირობაც, გვაქვს* $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{B}'$.

შენიშვნა. (a) და (b) პირობების შესრულება არ არის დამოკიდებული $\mathbb{B}'_2$ ფორმის არჩევაზე. თუ (a) პირობა სრულდება, ან, უფრო ზოგადად, $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ წყვილ-წყვილად განსხვავებული ასოებია, მაშინ (b) პირობა შემდეგი პირობის ეკვივალენტურია.

პირობა (b^*). $\mathbb{B}_2^*$ და $\mathbb{B}'_2$ ურთიერთვარიანტული ფორმებია. სხვა სიტყვებით, $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \,/.\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}'_2$ გამოსახულების შესაბამისი ჩანაცვლება ერთდროულად ცვლის $\mathbb{B}'_2$ ფორმის თავისუფალი ასოების იმ ჯგუფებს, რომლებიც $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ასოებს შეესაბამება.

აქვე შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{B}_2^*$ და $\mathbb{B}'_2$ ფორმების ურთიერთვარიანტულობა აუცილებელი და საკმარისი პირობაა $\mathbb{B}_2^*$ და $\mathbb{A}_2$ ფორმების ურთიერთვარიანტულობისთვის. თავის მხრივ, $\mathbb{B}_2^*$ და $\mathbb{A}_2$ ფორმების ურთიერთვარიანტულობა აუცილებელი პირობაა $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ფორმების კონგრუენტულობისთვის.

დამტკიცება. $1 \Rightarrow 2$. დავამტკიცოთ 1.

1. (a) პირობის ძალით $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ ასოები, ისევე როგორც $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, წყვილ-წყვილად განსხვავებულია. ამიტომ $\mathbb{B}_2^*$ მიიღება $\mathbb{B}'_2$-დან ჩანაცვლებით, რომელიც (b) პირობის ძალით მხოლოდ თავისუფალი ასოების ჯგუფებს ცვლის; კერძოდ, თავისუფალი ასოების ჯგუფები, რომელთა წარმომადგენლებია $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, შესაბამისად იცვლება თავისუფალი ასოების ჯგუფებით, რომელთა წარმომადგენლებია $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$. რადგან $\mathbb{A}_2 \simeq \mathbb{B}'_2$, აქედან ადვილად ვასკვნით, რომ $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{B}'_2$ და $\mathbb{B}_2^*$ ურთიერთვარიანტული ფორმებია. ასევე, $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$-დან გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ სიმბოლოთა ერთსა და იმავე რაოდენობას შეიცავს; ეს რაოდენობა l-ით აღვნიშნოთ. ვთქვათ f არის $\mathbb{A}'$ ფორმის შემადგენელ სიმბოლოთა შემოსვლების სიმრავლის კანონიკური ასახვა $\mathbb{B}'$ ფორმის შემადგენელ სიმბოლოთა შემოსვლების სიმრავლეზე. ამ ასახვის მიმართ $\mathbb{A}_2$ და $\mathbb{B}_2^*$ ნაწილები, უფრო ზუსტად, შეცვლების შედეგად მიღებული მათი შემოსვლები $\mathbb{A}'$-სა და $\mathbb{B}'$-ში, ერთმანეთს შეესაბამება. $\mathbb{A}'$ ფორმის $\mathbb{A}_2$ ნაწილის თავისუფალი ასოების ჯგუფების ელემენტები, რომელთა წარმომადგენლებია $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$, დაბმული ასოებია $\mathbb{A}'$-ში. ანალოგიურად, $\mathbb{B}'$ ფორმის $\mathbb{B}_2^*$ ნაწილის შესაბამისი ჯგუფების ელემენტები, წარმომადგენლებით $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_n$, დაბმულია $\mathbb{B}'$-ში. ამ ნაწილების დანარჩენი თავისუფალი, შესაბამისად დაბმული, ასოები თავისუფალია, შესაბამისად დაბმულია, მთლიან ფორმებშიც. ამიტომ f-სთვის კონგრუენტულობის განსაზღვრების (d) პირობა სრულდება: მითითებული ნაწილების გარეთ ყოველი ასოს დაბმულობა ან თავისუფლება იგივეა, რაც $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების შესაბამისი ასოსი; თვით

ნაწილებში კი (d) პირობა შეიძლება დარღვეულიყო მხოლოდ აღნიშნული თავისუფალი შემოსვლებისთვის, რომლებიც მთლიან ფორმებზე გადასვლისას დაბმული ხდება. ამრიგად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ f-ის მიმართ $\mathbb{A}'$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფებს შეესაბამება $\mathbb{B}'$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფები. მაშინ $\mathbb{B}'$ მიიღება $\mathbb{A}'$-დან დაბმული ასოების ჯგუფების ერთდროული შეცვლით. $\mathbb{A}'$-ისა და $\mathbb{B}'$-ის ის დაბმული ჯგუფები, რომლებიც მთლიანად $\mathbb{A}_2$ და $\mathbb{B}_2^*$ ნაწილებშია მოთავსებული, იგივეა, რაც ამ ნაწილების, როგორც ფორმების, დაბმული ჯგუფები. ამ ნაწილების ურთიერთვარიანტულობის ძალით შესაბამისობა ასეთი ჯგუფებისთვის სრულდება. ახლა განვიხილოთ $\mathbb{A}'$ ფორმის დაბმული ასოების $\mathcal{A}_i$ ჯგუფი კანონიკური წარმომადგენლით a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; უფრო ზუსტად, წარმომადგენლით, რომელიც a_i შემოსვლას შეესაბამება. ვთქვათ $\mathcal{B}_i$ არის $\mathbb{B}'$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფი კანონიკური წარმომადგენლით a'_i. ადვილი დასანახია, რომ

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}'_i \cup C_i \qquad \text{და} \qquad \mathcal{B}_i = \mathcal{B}'_i \cup D_i,$$

სადაც $\mathcal{A}'_i$ არის $\mathbb{A}$ ფორმის იმ დაბმული ჯგუფის $\mathbb{A}_1$ ნაწილის გარეთ მდებარე ნაწილი, რომლის კანონიკური წარმომადგენელია a_i. აქ $\mathbb{A}'$-ში სიმბოლოს შემოსვლას ბუნებრივად ვაიგივებთ $\mathbb{A}$-ში იმავე სიმბოლოს შესაბამის შემოსვლასთან. C_i არის $\mathbb{A}_2$ ნაწილის თავისუფალი ასოების ჯგუფი, რომლის წარმომადგენელია α_i ასოს შემოსვლა ამ ნაწილში. $\mathcal{B}'_i$ და D_i ანალოგიურად განისაზღვრება, $\mathbb{A}_2$-ის როლში $\mathbb{B}_2^*$-ის აღებით. ადვილი დასანახია, რომ f ასახვის მიმართ $\mathcal{B}_i$ სიმრავლე შეესაბამება $\mathcal{A}_i$ სიმრავლეს. ახლა ვთქვათ E არის $\mathbb{A}'$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფი, რომლის კანონიკური წარმომადგენელიც არცერთი a_i არ არის ($i = 1, 2, \ldots, n$) და რომელიც მთლიანად $\mathbb{A}_2$ ნაწილში არ არის მოთავსებული. ამ შემთხვევაში E მთლიანად $\mathbb{A}_2$-ის გარეთაა. იგი არის $\mathbb{A}$ ფორმის რომელიმე დაბმული E_1 ჯგუფის ის ნაწილი, რომელიც $\mathbb{A}_1$-ის გარეთ მდებარეობს და $\mathbb{A}'$-ში გადადის. თუ E'_1 არის $\mathbb{B}$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფი, რომელიც E_1-ს შეესაბამება, მაშინ E'_1-ის $\mathbb{B}_1$-ის გარეთ მდებარე ნაწილის შესაბამისი E' ნაწილი $\mathbb{B}'$-ში იქნება E-ს შესაბამისი დაბმული ჯგუფი. სხვა შემთხვევები არ არსებობს.

მესამე პუნქტის დასამტკიცებლად საკმარისია შემდეგი გარემოების შენიშვნა. რადგან $\mathbb{A}_2$ თავისუფალია $\mathbb{A}_1$-სთვის $\mathbb{A}$ ფორმაში და $\mathbb{A}_1$ ნაწილის ყოველი თავისუფალი ასო, რომელიც $\mathbb{A}$-ში დაბმულია, $\mathbb{A}_2$ ფორმის თავისუფალი ასოა, $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ მიმდევრობა შეიძლება ასე განისაზღვროს: $\mathbb{A}$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფის კანონიკური წარმომადგენელი a არის $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ მიმდევრობის წევრი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a მოქმედებს $\mathbb{A}_1$ ნაწილზე. ასევე, $\mathbb{B}$ და $\mathbb{B}_2^*$ ფორმებთან და $\mathbb{B}_1$ ნაწილთან დაკავშირებული კანონიკური წარმომადგენლების მიმდევრობა, რომელიც თავდაპირველად $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ მიმდევრობის ანალოგიურად განისაზღვრა, შეიძლება განისაზღვროს $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ მიმდევრობის ამ უკანასკნელი განსაზღვრების სრული ანალოგიით. აქედან ადვილად გამომდინარეობს (a) პირობა.

შენიშვნა. 3 პუნქტის მოთხოვნა, რომ $\mathbb{A}_1$, შესაბამისად $\mathbb{B}_1$ ნაწილის ყოველი თავისუფალი ასო, რომელიც $\mathbb{A}$-ში, შესაბამისად $\mathbb{B}$-ში დაბმულია, იყოს $\mathbb{A}_2$, შესაბამისად $\mathbb{B}_2^*$ ფორმის თავისუფალი ასო, შეიძლება შესუსტდეს. მის ნაცვლად საკმარისია მოვითხოვოთ: თუ a არის $\mathbb{A}_1$ ნაწილის თავისუფალი ასო, რომელიც $\mathbb{A}$-ში დაბმულია და $\mathbb{A}_2$ ფორმის თავისუფალი ასო არ არის, მაშინ $\mathbb{B}$-ში a-ს შესაბამისი a' ასო არ უნდა იყოს $\mathbb{B}_2^*$ ფორმის თავისუფალი ასო.

□

თეორემა 2.3. *ვთქვათ $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2$ ისეთი ფორმებია, რომ $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ და $\mathbb{A}_2 \simeq \mathbb{B}_2$. ამასთან, ვთქვათ $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{B}_1$, შესაბამისად, $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების ურთიერთშესაბამისი ნაწილებია, რომელთა ტიპი ემთხვევა $\mathbb{A}_2$ და $\mathbb{B}_2$ ფორმების ტიპს. შემდეგ, ვთქვათ $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ არის $\mathbb{A}$ ფორმის დაბმული ასოების გარკვეული ჯგუფების კანონიკური წარმომადგენლების ისეთი გადათვლა, რომ $\mathbb{A}$ ფორმის დაბმულ ასოთა ნებისმიერი ჯგუფის კანონიკური წარმომადგენელი a შედის $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ მიმდევრობაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a მოქმედებს $\mathbb{A}_1$ ნაწილზე და a მოქმედებს $\mathbb{A}_1$-ის ადგილას მოთავსებულ $\mathbb{A}_2$ ფორმაზე (ანუ ასოდ განხილული a არის $\mathbb{A}_2$ ფორმის თავისუფალი ასო). ამასთან, ამ წარმომადგენლების მიმდევრობა $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$-ში ისეთივეა, როგორიც $\mathbb{A}$ ფორმაში. შემდეგ, ვთქვათ $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_n$ არის $\mathbb{B}$-ში ასოების ის შემოსვლები, რომლებიც შეესაბამება $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ შემოსვლებს. შემოვიტანოთ აღნიშვნები: α'_i, შესაბამისად α_i, არის a'_i, შესაბამისად a_i, შემოსვლა, განხილული როგორც ასო, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ასოები წყვილ-წყვილად განსხვავებულია; იგივე ითქმის $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ ასოებზე);*

$$\mathbb{B}_2^* \rightleftharpoons (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n/\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}_2 \rightleftharpoons (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n /_. \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}'_2,$$

სადაც $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n /_. \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}'_2$ არის იმ მიმდევრობის ბოლო წევრი, რომელიც განიხილება $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n/\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}_2$ გამოსახულების მნიშვნელობის განსაზღვრებაში; $\mathbb{A}' \rightleftharpoons (\mathbb{A}_2 \mathbin{//} \mathbb{A}_1)\mathbb{A}$; $\mathbb{B}' \rightleftharpoons (\mathbb{B}_2^* \mathbin{//} \mathbb{B}_1)\mathbb{B}$. მაშინ $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{B}'$ შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (a′) *$\mathbb{B}$ და $\mathbb{B}_2^*$ ფორმებსა და $\mathbb{B}$ ფორმის $\mathbb{B}_1$ ნაწილთან დაკავშირებული კანონიკური წარმომადგენლების მიმდევრობა, რომელიც $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ მიმდევრობის მსგავსად განისაზღვრება, ემთხვევა $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_n$ მიმდევრობას და* (b′) *$\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ ასოებიდან ნებისმიერი ასოს ყოველი თავისუფალი შემოსვლა $\mathbb{B}_2^* \rightleftharpoons (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n/_.\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}'_2$ ფორმაში ჩანაცვლებით მიღებული შემოსვლაა.*

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია (a') და (b') პირობების აუცილებლობა.

(a') და (b') პირობების საკმარისობის დამტკიცება ეყრდნობა 2.2 თეორემას. გვაქვს:

$$\mathbb{A}' \rightleftharpoons (\mathbb{A}_2 \mathbin{//_:} \mathbb{A}_1^*)\mathbb{A}^* \qquad \text{და} \qquad \mathbb{B}' \rightleftharpoons (\mathbb{B}_2^* \mathbin{//_:} \mathbb{B}_1^*)\mathbb{B}^*, \tag{1}$$

სადაც ამ გრაფიკული ტოლობების მარჯვენა ნაწილები არის $(\mathbb{A}_2 \mathbin{//} \mathbb{A}_1)\mathbb{A}$ და $(\mathbb{B}_2^* \mathbin{//} \mathbb{B}_1)\mathbb{B}$ გამოსახულებების მნიშვნელობების განსაზღვრებაში განხილული მიმდევრობების ბოლო წევრები. ამ განსაზღვრებების, მათ შორის $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n/\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{B}_2$ გამოსახულების მნიშვნელობის განსაზღვრებისა და შესაბამისი შენიშვნების გათვალისწინებით ადვილად ვრწმუნდებით შემდეგში: $\mathbb{B}'_2$ კონგრუენტულია $\mathbb{B}_2$ ფორმისა და ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის α'_i თავისუფალია α_i-სთვის $\mathbb{B}'_2$-ში; $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}^*$ და $\mathbb{B}^* \simeq \mathbb{B}$; $\mathbb{A}_2$ თავისუფალია $\mathbb{A}_1^*$-სთვის $\mathbb{A}^*$-ში, ხოლო $\mathbb{B}_2^*$ თავისუფალია $\mathbb{B}_1^*$-სთვის $\mathbb{B}^*$-ში; $\mathbb{A}_1^* \rightleftharpoons \mathbb{A}_1$ და $\mathbb{B}_1^* \rightleftharpoons \mathbb{B}_1$. ამასთან, $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_1^*$, $\mathbb{B}_1$ და $\mathbb{B}_1^*$ არის ურთიერთკონგრუენტული $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^*$, $\mathbb{B}$ და $\mathbb{B}^*$ ფორმების შესაბამისი ნაწილები.

თუ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{A}^*$, შესაბამისად $\mathbb{B}$ და $\mathbb{B}^*$ ურთიერთკონგრუენტული ფორმების ერთი და იმავე სიმბოლოს ურთიერთშესაბამის შემოსვლებს გავაიგივებთ, მაშინ დაბმული ასოების ჯგუფების კანონიკური წარმომადგენლების მიმდევრობა, რომელიც $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ მიმდევრობის ანალოგიურად განისაზღვრება $\mathbb{A}^*$ და $\mathbb{A}_2$ ფორმებთან და $\mathbb{A}^*$ ფორმის $\mathbb{A}_1^*$ ნაწილთან დაკავშირებით, ემთხვევა $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ მიმდევრობას. ანალოგიურად, $\mathbb{B}^*$ და $\mathbb{B}_2^*$ ფორმებთან და $\mathbb{B}^*$ ფორმის $\mathbb{B}_1^*$ ნაწილთან დაკავშირებული მიმდევრობა ემთხვევა $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_n$ მიმდევრობას.

ახლა ადვილი დასანახია, რომ თუ 2.2 თეორემაში

$$\mathbb{A},\ \mathbb{A}_1,\ \mathbb{A}_2,\ \mathbb{B},\ \mathbb{B}_1,\ \mathbb{B}_2,\ \mathbb{B}'_2$$

სიმბოლოების ნაცვლად ავიღებთ სიმბოლოებს

$$\mathbb{A}^*,\ \mathbb{A}^*_1,\ \mathbb{A}_2,\ \mathbb{B}^*,\ \mathbb{B}^*_1,\ \mathbb{B}_2,\ \mathbb{B}'_2$$

(ამ დროს $\mathbb{B}^*_2$-ის როლში კვლავ $\mathbb{B}^*_2$ იქნება, ხოლო $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ და $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_n$ მიმდევრობების როლში — იგივე

$$\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n \quad \text{და} \quad \mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_n$$

მიმდევრობები, რადგან, მაგალითად, $\mathbb{A}^*, \mathbb{A}^*_1, \mathbb{A}_2$ შემთხვევაში, თუ დაბმული ასოების ჯგუფის კანონიკური წარმომადგენელი მოქმედებს $\mathbb{A}_2$ ფორმაზე, რომელიც $\mathbb{A}^*_1$ ნაწილის ადგილზეა მოთავსებული, მაშინ იგი აუცილებლად მოქმედებს თვით $\mathbb{A}^*_1$ ნაწილზეც), შესრულდება (a) და (b) პირობები. ამიტომ (1) გრაფიკული ტოლობებისა და 2.2 თეორემის ძალით გვაქვს $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{B}'$.

□

თეორემა 2.4. *ვთქვათ $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2$ ისეთი ფორმებია, რომ $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ და $\mathbb{A}_2 \simeq \mathbb{B}_2$. შემდეგ, ვთქვათ $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{B}_1$, შესაბამისად, $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების ურთიერთშესაბამისი ნაწილებია, რომელთა ტიპი ემთხვევა $\mathbb{A}_2$ და $\mathbb{B}_2$ ფორმების ტიპს.*

1. *თუ $\mathbb{A}_2$ ფორმა სრულიად თავისუფალია $\mathbb{A}_1$-სთვის $\mathbb{A}$-ში, ხოლო $\mathbb{B}_2$ სრულიად თავისუფალია $\mathbb{B}_1$-სთვის $\mathbb{B}$-ში, მაშინ*

$$(\mathbb{A}_2 \,//\, \mathbb{A}_1)\mathbb{A} \eqsim (\mathbb{A}_2 \,//_: \mathbb{A}_1)\mathbb{A} \simeq (\mathbb{B}_2 \,//_: \mathbb{B}_1)\mathbb{B} \eqsim (\mathbb{B}_2 \,//\, \mathbb{B}_1)\mathbb{B}. \tag{2}$$

2. *თუ $\mathbb{A}_2$ ფორმა თავისუფალია $\mathbb{A}_1$-სთვის $\mathbb{A}$-ში, ხოლო $\mathbb{B}_2$ თავისუფალია $\mathbb{B}_1$-სთვის $\mathbb{B}$-ში და, ამასთან, $\mathbb{A}_1 \simeq \mathbb{B}_1$, მაშინ სრულდება* (2).

3. *თუ $\mathbb{A}_1 \simeq \mathbb{B}_1$, მაშინ $(\mathbb{A}_2 \,//\, \mathbb{A}_1)\mathbb{A} \simeq (\mathbb{B}_2 \,//\, \mathbb{B}_1)\mathbb{B}$.*

დამტკიცება. პირველი და მეორე პუნქტების გრაფიკული ტოლობები ცხადია. ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ შემდეგი კონგრუენტულობა (ეს ამტკიცებს როგორც 1, ისე 2 პუნქტს):

$$(\mathbb{A}_2 \,//\, \mathbb{A}_1)\mathbb{A} \simeq (\mathbb{B}_2 \,//\, \mathbb{B}_1)\mathbb{B}.$$

ეს კონგრუენტულობა წინა თეორემიდან გამომდინარეობს. მართლაც, მის ფორმულირებაში მოცემული წესით განსაზღვრული აღნიშვნები ჩვენს შემთხვევაში აკმაყოფილებს (a') და (b') პირობებს. მე-2 და მე-3 პუნქტების შემთხვევაში ეს ადვილად გამომდინარეობს $\mathbb{A}_1 \simeq \mathbb{B}_1$ კონგრუენტულობიდან, ხოლო პირველი პუნქტის შემთხვევაში — იმ ცხადი ფაქტიდან, რომ მითითებული მიმდევრობები ცარიელია.

შენიშვნა. 2.1 თეორემის პირველი პუნქტი შეიძლება განვიხილოთ როგორც 2.4 თეორემის შედეგი, რადგან ამ უკანასკნელის დამტკიცება 2.1 თეორემაზე არ არის დამოკიდებული. კერძოდ, ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ a_i, $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ერთი და იმავე ტიპის ფორმებია. ვთქვათ

$$\mathbb{A}' \rightleftharpoons (\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n \mathbin{/.} \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{A}^* \quad \text{და} \quad \mathbb{B}' \rightleftharpoons (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{/.} \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{B}^*,$$

სადაც ამ გრაფიკული ტოლობების მარჯვენა ნაწილები არის

$$(\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n/\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{A} \quad \text{და} \quad (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n/\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{B}.$$

გამოსახულებების მნიშვნელობების განსაზღვრებაში განხილული მიმდევრობების ბოლო წევრები. მაშინ ცხადია, $\mathbb{A}^* \simeq \mathbb{B}^*$ და ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის $\mathbb{A}_i$ ფორმა სრულიად თავისუფალია a_i-სთვის $\mathbb{A}^*$-ში, ხოლო $\mathbb{B}_i$ ფორმა სრულიად თავისუფალია a_i-სთვის $\mathbb{B}^*$-ში. ამიტომ საჭირო კონგრუენტულობა

$$(\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n \mathbin{/.} \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{A}^* \simeq (\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n \mathbin{/.} \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)\mathbb{B}^*$$

მიიღება წინა თეორემის პირველი პუნქტის რამდენჯერმე გამოყენებით: ერთდროული ჩანაცვლება შეიძლება შესრულდეს მარტივი ჩანაცვლებების მიმდევრობით. ამისთვის წინასწარ უნდა მოინიშნოს შესაცვლელი ასოების ყველა შემოსვლა; ყოველი მარტივი შეცვლის შემდეგ დარჩენილი შესაცვლელი შემოსვლების მიმართ სრული თავისუფლების პირობა შენარჩუნდება.

□

თეორემა 2.5. *თუ $\mathbb{A}$ ფორმის $\mathbb{A}_1$ ნაწილს შევცვლით $\mathbb{A}_1$ ნაწილის კონგრუენტული $\mathbb{A}_2$ ფორმით, მივიღებთ $\mathbb{A}$ ფორმის კონგრუენტულ $\mathbb{A}'$ ფორმას. ამასთან, $\mathbb{A}$ ფორმიდან $\mathbb{A}'$ ფორმის მისაღებად საკმარისია $\mathbb{A}_1$ ნაწილში მოთავსებული დაბმული ასოების რამდენიმე ჯგუფის შეცვლა.*

მართლაც, საკმარისია ვივარაუდოთ, რომ $\mathbb{B} \rightleftharpoons \mathbb{A}$, $\mathbb{B}_1 \rightleftharpoons \mathbb{A}_1$, $\mathbb{B}_2 \rightleftharpoons \mathbb{A}_1$, და გამოვიყენოთ თეორემა 2.4-ის მე-2 პუნქტი ($\mathbb{A}_2$ ფორმა თავისუფალია $\mathbb{A}_1$ ნაწილისათვის $\mathbb{A}$-ში).

შედეგი. *$\mathbb{A}$ ფორმის არაგადამფარავი $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ ნაწილების შეცვლით შესაბამისი კონგრუენტული $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ ფორმებით, მივიღებთ $\mathbb{A}$ ფორმის კონგრუენტულ $\mathbb{A}'$ ფორმას.*

დაბოლოს, შევნიშნოთ, რომ ადვილად მტკიცდება შემდეგი თეორემაც.

თეორემა 2.6. *ურთიერთკონგრუენტული $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების ნებისმიერი შესაბამისი $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{B}_1$ ნაწილები ურთიერთვარიანტული ფორმებია. ამასთან, $\mathbb{A}_1$ ნაწილის თავისუფალი ასოების ნებისმიერი ჯგუფი ან $\mathbb{A}$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფის საკუთრივი ნაწილია, მოთავსებული $\mathbb{A}_1$ ნაწილში, ან $\mathbb{A}$ ფორმის თავისუფალი ასოების ჯგუფის ნაწილია, მოთავსებული $\mathbb{A}_1$ ნაწილში.*

2.5 შემდგომი შენიშვნები შემამოკლებელი სიმბოლოების შესახებ

2.5.1. შემამოკლებელი სიმბოლოს (ანუ წარმოებული სიმბოლოს) განსაზღვრებიდან ბუნებრივად განისაზღვრება ამ სიმბოლოს ტიპი და წონა; თუ იგი ოპერატორული ნიშანია, განისაზღვრება შესაბამისი წარმოებული შედგენილი ოპერატორების (კვანტორების)

აგების წესიც. ასევე, წარმოებული ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორული ნიშნის განსაზღვრებიდან ბუნებრივად განისაზღვრება მისი ლოგიკურობის მაჩვენებელი, ხოლო წარმოებული ნაწილობრივი ოპერატორული ნიშნის განსაზღვრებიდან — მისი დაბმულობის მაჩვენებელი.

თუ $\mathscr{T}$, შესაბამისად $\mathscr{T}'$, შესაბამისად $\mathscr{T}''$ თეორიის ანბანს შემამოკლებელ სიმბოლოებს დავუმატებთ შესაბამისი ტიპის სიმბოლოებად (ანუ თითოეულ შემამოკლებელ სიმბოლოს იმავე ტიპის ძირითად სიმბოლოდ მივიჩნევთ), მივიღებთ ე.წ. **შემამოკლებელი სიმბოლოებით გაფართოებულ თეორიას**, რომელსაც აღვნიშნავთ $\widetilde{\mathscr{T}}$, შესაბამისად $\widetilde{\mathscr{T}}'$, შესაბამისად $\widetilde{\mathscr{T}}''$-ით. იგულისხმება, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}'$ შემთხვევაში წარმოებულ ოპერატორებს შორის მონიშნული ოპერატორებია წარმოებული ორადგილიანი პროპოზიციული კავშირები, წარმოებული ორადგილიანი პრედიკატული კონსტანტები, წარმოებული ორადგილიანი ფუნქციონალური კონსტანტები და მხოლოდ ისინი.

ცხადია, არცერთი შემამოკლებელი სიმბოლო არ შედის განსახილველი გაფართოებული თეორიის სიმბოლოების ანბანურ გადათვლაში.

ჩვენ განვიხილავთ შემამოკლებელი სიმბოლოების ისეთ განსაზღვრებებს, რომელთათვისაც $\widetilde{\mathscr{T}}$, შესაბამისად $\widetilde{\mathscr{T}}'$, შესაბამისად $\widetilde{\mathscr{T}}''$ თეორიის (შედგენილი) ოპერატორების კლასი არის $\mathscr{T}$ თეორიის შედგენილი ოპერატორების კლასისა და წარმოებული შედგენილი ოპერატორების კლასის გაერთიანება. ამასთან, სრულდება ის ზოგადი მოთხოვნები, რომლებიც წავუყენეთ ოპერატორულ ნიშნებს, შედგენილი ოპერატორების აგების წესებსა და შედგენილი ოპერატორების კლასს.

თუ შემამოკლებელი სიმბოლოების სიმრავლე თვლადია, მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}$ იქნება $\mathscr{T}$-თეორია. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\widetilde{\mathscr{T}}$ იქნება განზოგადებული $\mathscr{T}$-თეორია. მაშასადამე, ამ უკანასკნელ შემთხვევაშიც $\mathscr{T}$ თეორიაში მიღებული ყველა ძირითადი შედეგი ძალაში რჩება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიისთვის. ზოგჯერ წარმოებული სიმბოლოების სისტემა არ ფიქსირდება და ახალი წარმოებული სიმბოლოები თანდათან შემოიტანება. ამ შემთხვევაშიც $\mathscr{T}$ თეორიაში მიღებული შედეგები ძირითადად გამოყენებადია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიისთვის.

ქვემოთ $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებს გამოვიყენებთ $\mathscr{T}$ თეორიის იმავე ტიპის ფორმების აღსანიშნავად ისე, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის თითოეული ფორმა აღნიშნავდეს $\mathscr{T}$ თეორიის სულ მცირე ერთ ფორმას (პრაქტიკისთვის მნიშვნელოვან შემთხვევებში $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის თითოეული ფორმა აღნიშნავს კონგრუენტულობის სიზუსტემდე ცალსახად განსაზღვრულ ფორმას, ხოლო რიგ მნიშვნელოვან შემთხვევებში — ცალსახად განსაზღვრულ ფორმას). ამის საფუძველზე $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის აქსიომები და დასკვნის წესები ბუნებრივად განისაზღვრება $\mathscr{T}$ თეორიის აქსიომებითა და დასკვნის წესებით. კერძოდ: $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმულა აქსიომად მიიღება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი აღნიშნავს $\mathscr{T}$ თეორიის სულ მცირე ერთ აქსიომას. ასევე, $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმულა არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ ფორმულების უშუალო შედეგი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\mathscr{T}$ თეორიის ისეთი $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathbb{A}'$ ფორმულები, რომლებსაც შესაბამისად აღნიშნავს $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathbb{A}$ ფორმულები და $\mathbb{A}'$ არის $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n$ ფორმულების უშუალო შედეგი.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ ნებისმიერ $\mathscr{T}_a$ თეორიაში, რომელიც მოცემული $\mathscr{T}$ თეორიის გაფართოებაა და რომლის ფორმებიც აღნიშნავს $\mathscr{T}$ თეორიის იმავე ტიპის ფორმებს, აქსიომები და დასკვნის წესები ზემოთ აღწერილი გზით განისაზღვრება.

ზოგადად, განზოგადებულ $\mathscr{T}_a$ თეორიას ვუწოდებთ $\mathscr{T}$ **თეორიის გაფართოებით**

მიღებულ თეორიას, მოკლედ — $\mathscr{T}$ **თეორიის გაფართოებულ თეორიას**, ან კიდევ უფრო მოკლედ — **გაფართოებულ თეორიას**, თუ $\mathscr{T}_a$ თეორიის ანბანი მიიღება $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანიდან ნებისმიერი ტიპის ოპერატორული ნიშნების, ოპერატორებისა და კონსტანტების დამატებით, კვანტორული ასოების კლასის შეუცვლელად (არ გამოირიცხება, რომ დამატებით სიმბოლოებს შორის იყოს ნაწილობრივი ოპერატორული ნიშნები, ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორული ნიშნები და ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორები). ამ სიმბოლოებს ვუწოდებთ **გაფართოებული თეორიის დამატებით სიმბოლოებს**. ანალოგიურად განისაზღვრება მოცემული **განზოგადებული თეორიის გაფართოება**.

თუ $\mathbb{A}$ მეტაცვლადია, რომლის მნიშვნელობათა არე არის $\mathscr{T}$ თეორიის ყველა ტერმის, შესაბამისად ყველა ფორმულის კლასი, ხოლო $\mathscr{T}_a$ გაფართოებული თეორიაა, მაშინ $\mathscr{T}_a$ თეორიის ყველა ტერმის, შესაბამისად ყველა ფორმულის კლასს ვუწოდებთ $\mathbb{A}$ **მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არეს** $\mathscr{T}_a$**-ში**. ამ არის ნებისმიერ ელემენტს ვუწოდებთ $\mathbb{A}$ **მეტაცვლადის მნიშვნელობას** $\mathscr{T}_a$**-დან** ($\mathscr{T}_a$**-ს მიმართ**). შესაბამისად უნდა გავიგოთ ტერმინი $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ **მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემა** $\mathscr{T}_a$**-დან** ($\mathscr{T}_a$**-ს მიმართ**) (თუ $\mathbb{B}_j$ მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არე არც $\mathscr{T}$ თეორიის ყველა ტერმის კლასია და არც $\mathscr{T}$ თეორიის ყველა ფორმულის კლასი, მაშინ $\mathbb{B}_j$ ცვლადის მნიშვნელობები მისი საკუთარი მნიშვნელობათა არიდან უნდა ავიღოთ).

2.5.2. შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების ჩასაწერად გამოვიყენებთ ——— სიმბოლოს („გრძელ ტირეს“), რომელიც წაიკითხება: „... არის ...-ის შემოკლებული სახე“. განსაზღვრების მისაღებად პირველი მრავალწერტილის ადგილას, ანუ ამ სიმბოლოს მარცხნივ, უნდა ჩაიწეროს მეტამათემატიკური გამოსახულება, რომელიც შედგება განსასაზღვრელი სიმბოლოსგან, ადრე შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოებისგან, მოცემული თეორიის ანბანის სიმბოლოებისა და მეტაცვლადებისგან. მეორე მრავალწერტილის ადგილას უნდა ჩაიწეროს მეტამათემატიკური გამოსახულება, რომელიც შედგება ადრე შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოებისგან, მოცემული თეორიის ანბანის სიმბოლოებისგან, მეტაცვლადებისა და $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის დამატებითი სიმბოლოებისგან. მეტაცვლადების ნაცვლად $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ მათი მნიშვნელობათა სისტემის ჩასმისას ეს უკანასკნელი გამოსახულება უნდა გარდაიქმნებოდეს $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის ცალსახად განსაზღვრულ ფორმად. აქ $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ მიიღება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის გაფართოებით და მისი ყოველი ფორმა აღნიშნავს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის იმავე ტიპის ცალსახად განსაზღვრულ ფორმას. ამასთან, აღნიშნული $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ ფორმის ტიპი არ უნდა იყოს დამოკიდებული მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემის არჩევაზე. გარდა ამისა, არსებობს ალგორითმი, რომელიც $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის ნებისმიერი $\mathbb{A}$ ფორმისთვის პოულობს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმას, რომლის აღნიშვნაც არის $\mathbb{A}$. არ გამოირიცხება $\widetilde{\mathscr{T}}_a$-სა და $\widetilde{\mathscr{T}}$-ს დამთხვევა; ამ შემთხვევაში $\mathbb{A}$ თავის თავს აღნიშნავს. განსახილველ მეტამათემატიკურ გამოსახულებებს შესაბამისად ეწოდება **განსაზღვრების მარცხენა ნაწილი** და **მარჯვენა ნაწილი**. ახალი შემამოკლებელი სიმბოლო უნდა წარმოვიდგინოთ ისეთი ტიპის წარმოებულ სიმბოლოდ, რომ განსაზღვრების მარცხენა ნაწილში $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმით მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ ფორმის ტიპი ემთხვეოდეს იმავე სისტემისთვის მარჯვენა ნაწილში მიღებული ფორმის ტიპს. იგულისხმება განსაზღვრებაში შემავალი ყველა მეტაცვლადი. ზემოთ აღნიშნული ბუნებრივობის საფუძველზე ამ პირობამ ცალსახად უნდა განსაზღვროს ახალი სიმბოლოს ტიპი; თუ იგი ოპერატორული ნიშანია, ბუნებრივად და

ცალსახად უნდა განსაზღვროს მის შესაბამის შედგენილ ოპერატორთა კლასიც. განსახილველი გამოსახულებები შეიძლება ჩაიწეროს რაიმე აღნიშვნების დახმარებით, მაგალითად, შემოკლებული სახით; ასეთ აღნიშვნებში ყოველთვის შესაბამისი გამოსახულება უნდა ვიგულისხმოთ. დაბოლოს, **განსაზღვრების ძირითად შინაარსად** უნდა მივიჩნიოთ შემდეგი: მარცხენა ნაწილში $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი დასაშვები სისტემის ჩასმით მიღებული $\mathbb{A}_1$ ფორმა არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის იმ $\mathbb{A}$ ფორმის შემოკლებული სახე (შემოკლებული ჩანაწერი), რომელსაც აღნიშნავს იმავე სისტემის მარჯვენა ნაწილში ჩასმით მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის $\mathbb{A}_a$ ფორმა. სიმარტივისთვის შეიძლება ვთქვათ, რომ $\mathbb{A}_1$ არის $\mathbb{A}_a$ ფორმის შემოკლებული სახე, $\mathbb{A}_a$-ში $\mathbb{A}$ ფორმის გულისხმობით. თუ შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრებაში სპეციალურად არ განიმარტება ფრაზა „მეტაცვლადების მნიშვნელობათა დასაშვები სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}_\beta$-ს მიმართ“, სადაც $\widetilde{\mathscr{T}}_\beta$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის გაფართოება, მაშინ მისი მნიშვნელობა იგივეა, რაც ფრაზისა „მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}_\beta$ თეორიის მიმართ“.

მაგალითად, განვიხილოთ $\mathcal{P}'_1$ თეორიაში გამოყენებული შემამოკლებელი სიმბოლოების სისტემა, რომელიც შემდეგი განსაზღვრებებით შემოიტანება:

D1. t ——— $f \longrightarrow f$.
D2. $[\neg\mathbb{A}]$ ——— $\mathbb{A} \longrightarrow f$.
D3. $[\mathbb{A} \nleftarrow \mathbb{B}]$ ——— $\neg[\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}]$.
D4. $[\mathbb{A} \vee \mathbb{B}]$ ——— $[\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}] \longrightarrow \mathbb{B}$.
D5. $[\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}]$ ——— $[\mathbb{A} \nleftarrow \mathbb{B}] \nleftarrow \mathbb{B}$.
D6. $[\mathbb{A} \longleftrightarrow \mathbb{B}]$ ——— $[\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}] \wedge [\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}]$.

D7. $[\mathbb{A} \nleftrightarrow \mathbb{B}]$ ——— $[\mathbb{A} \nleftarrow \mathbb{B}] \vee [\mathbb{B} \nleftarrow \mathbb{A}]$.
D8. $[\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{B}]$ ——— $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$.
D9. $[\mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{B}]$ ——— $\mathbb{B} \nleftarrow \mathbb{A}$.
D10. $[\mathbb{A} \mathbin{\overline{\vee}} \mathbb{B}]$ ——— $\neg\mathbb{A} \wedge \neg\mathbb{B}$.
D11. $[\mathbb{A} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathbb{B}]$ ——— $\neg\mathbb{A} \vee \neg\mathbb{B}$.

შენიშვნა. D1 განსაზღვრებით შემოტანილი t შემამოკლებელი სიმბოლოს ერთჯერადი გამოყენებით შემოკლებული სახით შეიძლება ჩაიწეროს მხოლოდ ერთი ფორმულა — $[f \longrightarrow f]$. D2–D11 განსაზღვრებებით შემოტანილი თითოეული შემამოკლებელი სიმბოლოს ერთჯერადი გამოყენებით კი შემოკლებული სახით შეიძლება ჩაიწეროს ფორმულათა სრულიად განსაზღვრული უსასრულო კლასის ყველა ფორმულა. ამიტომ ზოგიერთი ავტორი D2–D11 განსაზღვრებებიდან თითოეულს **განსაზღვრება-სქემას** უწოდებს. რადგან ყოველი Di ($i = 1, 2, \ldots, 11$) ერთ შემამოკლებელ სიმბოლოს შემოიტანს, მიგვაჩნია, რომ იგი განსაზღვრებაა და არა განსაზღვრება-სქემა. ტერმინს „განსაზღვრება-სქემა“ ქვემოთ უფრო ბუნებრივ შინაარსს მივანიჭებთ.

D1–D11 განსაზღვრებების ყურადღებით განხილვით ვრწმუნდებით, რომ მათ მიერ

შემოტანილი წარმოებული სიმბოლოები წარმოებული ლოგიკური კავშირებია (წარმოებული რელაციური ლოგიკური ოპერატორები). D1-ით შემოტანილი t კავშირი ნულადგილიანია, ანუ წარმოებული პროპოზიციული კონსტანტაა; $\neg$ ერთადგილიანია, ხოლო დანარჩენი კავშირები ორადგილიანია.

აღვნიშნოთ, რომ D1–D11 განსაზღვრებებით შემოტანილ ყოველ წარმოებულ ოპერატორს აქვს „ოპერატორული ხასიათი“. ეს ნიშნავს, რომ თუ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ არის $\mathcal{P}'_1$ თეორიის ნებისმიერი ფორმები (ფორმულები), ხოლო σ — D3–D11 განსაზღვრებებით შემოტანილი ნებისმიერი ორადგილიანი წარმოებული ოპერატორი, მაშინ $\widetilde{\mathcal{P}}'_1$ თეორიის $[\mathbb{A}\,\sigma\,\mathbb{B}]$, $[\neg\mathbb{A}]$ და t ფორმებიდან თითოეული არის $\mathcal{P}'_1$ თეორიის ცალსახად განსაზღვრული ფორმის შემოკლებული სახე (შემდგომში ამ მოთხოვნას შევასუსტებთ და მოვითხოვთ, რომ ფორმა ცალსახად იყოს განსაზღვრული მხოლოდ კონგრუენტულობის სიზუსტემდე).

ზოგჯერ გამოიყენება ისეთი განსაზღვრებები, რომლებსაც შემოაქვს „ოპერატორული ხასიათის“ არმქონე წარმოებული ოპერატორები. ასეთი განსაზღვრების მაგალითია

$$[\sigma\,\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2] = \mathbb{A}_3 \text{ ——— } \sigma_1\,\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3, \tag{1}$$

სადაც $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ და $\mathbb{A}_3$ მეტაცვლადებია, რომელთა მნიშვნელობათა არე მოცემული თეორიის ყველა ტერმის კლასია; σ_1 ძირითადი ტერნარული სპეციალური რელაციური ოპერატორია, ხოლო σ არის (1) განსაზღვრებით შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლო (ცხადია, σ წარმოებული სპეციალური სუბსტანციური ორადგილიანი ოპერატორია; თუ T_1 და T_2 მოცემული თეორიის ტერმებია, მაშინ $\sigma T_1 T_2$ არ არის მოცემული თეორიის რომელიმე ფორმის შემოკლებული სახე). ასეთი განსაზღვრებების ზოგადი თვისებების დადგენა მნიშვნელოვან სირთულეებთანაა დაკავშირებული. ამასთან, ისინი იშვიათად გამოიყენება. ამიტომ ძირითადად განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ განსაზღვრებებს, რომლებსაც შემოაქვს „ოპერატორული ხასიათის“ მქონე შემამოკლებელი სიმბოლოები.

ძირითადად შევისწავლით შემდეგი სახის განსაზღვრებებს:

$$\sigma\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}, \tag{2}$$

სადაც σ ამ განსაზღვრებით შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოა, ხოლო $\mathsf{a}_1,\ldots,\mathsf{a}_m,\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n$ მეტაცვლადებია. ამასთან, სრულდება ერთ-ერთი შემთხვევა: (I) ყოველი $\mathbb{A}_i$ მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არე არის მოცემული თეორიის ყველა ფორმულის კლასი; (II) ყოველი $\mathbb{A}_i$-ს მნიშვნელობათა არე არის ყველა ტერმის კლასი; (III) ზოგიერთი $\mathbb{A}_i$-სთვის, სულ მცირე ერთისთვის, მაგრამ არა ყველასთვის, მნიშვნელობათა არე ყველა ფორმულის კლასია, დანარჩენებისთვის კი — ყველა ტერმის კლასი. გარდა ამისა, ყოველი a_i მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არე არის კვანტორული ასოების ისეთი K_i კლასი, რომელიც შეიცავს ყველა ცვლადს, რომლის ტიპი კლასის რომელიმე ელემენტის ტიპს ემთხვევა, და ყველა კვანტორულ კონსტანტას, რომლის ტიპი კლასის რომელიმე კონსტანტის ტიპს ემთხვევა ($i = 1, 2, \ldots, m$). m და n ნატურალურმა რიცხვებმა შეიძლება ნულოვანი მნიშვნელობებიც მიიღოს, ოღონდ უნდა სრულდებოდეს $m \neq 0 \Rightarrow n \neq 0$. თუ $m \neq 0$, ბუნებრივია σ მივიჩნიოთ (n, m) **წონის მქონე წარმოებულ ოპერატორულ ნიშნად**; წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი უნდა მივიჩნიოთ n **წონის მქონე წარმოებულ მარტივ ოპერატორად**. თუ $m = n = 0$, მაშინ σ წარმოებული პროპოზიციული კონსტანტაა ან წარმოებული საგნობრივი კონსტანტა იმის მიხედვით, $\mathbb{B}$ ფორმულაა თუ ტერმი. ცხადია აგრეთვე, რომ σ (I) შემთხვევაში ლოგიკურია, (II)

შემთხვევაში — სპეციალური, ხოლო (III) შემთხვევაში — ლოგიკო-სპეციალური. იგი რელაციურია ან სუბსტანციური იმის მიხედვით, განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი $\mathbb{B}$ არის ფორმულა თუ ტერმი მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ყველა სისტემისთვის.

ქვემოთ, თუ კონტექსტიდან საწინააღმდეგო არ გამომდინარეობს, ვიგულისხმებთ, რომ შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრებას აქვს (2) სახე ზემოთ მოცემული ზოგადი პირობების დაცვით. ამასთან, გამოვიყენებთ წინა აბზაცის ტერმინოლოგიას. იგულისხმება, რომ $\mathbb{B}$ არის მეტამათემატიკური გამოსახულება, რომელიც $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმად ან $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ცალსახად განსაზღვრული ფორმის აღნიშვნად გარდაიქმნება მასში მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ. ცხადია, ასეთი განსაზღვრებებით შემოტანილ წარმოებულ ოპერატორებს „ოპერატორული ხასიათი“ აქვს. ეს პირობები სრულდება D1–D11 განსაზღვრებებისთვისაც: თითოეული მათგანის მარჯვენა ნაწილი $\widetilde{\mathcal{P}}'_1$ თეორიის ფორმულად გარდაიქმნება მასში შემავალი მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას $\widetilde{\mathcal{P}}'_1$ თეორიის მიმართ.

თავი 3

ზოგიერთი ცნება, რომელიც საჭიროა შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების სხვადასხვა ტიპის შემოსატანად

3.1 მეტაცვლადებისა და ჩანაცვლებების გამოყენებით შედგენილი ფორმები

3.1.1. ამ ქვეთავში განვსაზღვრავთ და გამოვიკვლევთ ზოგიერთ ცნებას, რომლებიც შემდეგ თავში განსაზღვრებების ძირითადი ტიპების შემოსატანად გამოიყენება.

ვთქვათ $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ ისეთი მეტაცვლადებია, რომ ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$-სთვის σ_i მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არე არის მოცემული თეორიის სიტყვების რომელიმე K_i კლასი. თუ K_i ასოების, შესაბამისად კვანტორული ასოების, რომელიმე კლასია (იგი შეიძლება სხვადასხვა ტიპის ასოებს შეიცავდეს), მაშინ σ_i-ს ვუწოდებთ **მეტაასოს**, შესაბამისად **კვანტორულ მეტაასოს**.

$\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ **მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმულისა და ტერმის** ცნებებს შემოვიტანთ რეკურსიული განსაზღვრებით, რომელიც ფორმულისა და ტერმის განსაზღვრებიდან შემდეგნაირად მიიღება: ა) სიტყვები „ფორმულა“ და „ტერმი“ იცვლება ტერმინებით „$\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმულა“ და „$\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ტერმი“; ბ) რეკურსიული განსაზღვრების პირდაპირ პუნქტებს ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$-სთვის ემატება ნული ან რამდენიმე პუნქტი. კერძოდ: (1) თუ K_i ფორმულების, შესაბამისად ტერმების, რომელიმე კლასია, ემატება პუნქტი „σ_i არის $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმულა, შესაბამისად ტერმი“; (2) თუ K_i გარკვეული ტიპის ასოების კლასია (იგულისხმება ზემოთ შემოტანილი ძირითადი ტიპები), ემატება პუნქტი, რომელიც σ_i-ს შესაბამისი ტიპის ასოდ აცხადებს. თუ K_i პროპოზიციული, შესაბამისად საგნობრივი, ასოების კლასია, (1) შემთხვევის შესაბამისი პუნქტის დამატება საჭირო აღარ არის. გარდა ამისა, ემატება შემდეგი პუნქტი: „თუ σ არის n-ადგილიანი m-არული ოპერატორული ნიშანი, $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ სიმბოლოთა მიმდევრობაა, რომლის ყოველი წევრი ასო ან მეტაასოა, ხოლო

$\mathsf{a}_{i_1}, \ldots, \mathsf{a}_{i_l}$ მიიღება ამ მიმდევრობიდან მათემატიკური ასოების წაშლით და ამ მეტაასოების მნიშვნელობათა ყოველი სისტემისთვის $\sigma\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ სიტყვა ოპერატორია (კვანტორია), მაშინ $\sigma\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ არის n-ადგილიანი ოპერატორი (კვანტორი), რომლის ტიპი σ ოპერატორული ნიშნის ტიპს ემთხვევა“.

ცხადია, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილ ფორმულაში, შესაბამისად ტერმში, ამ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმით მივიღებთ მოცემული თეორიის ფორმულას, შესაბამისად ტერმს. ადვილი დასანახია, რომ ეს თვისება ახასიათებს $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილ ფორმულებსა და ტერმებს გაფართოებული ანბანის ყველა სიტყვის კლასში, სადაც გაფართოებული ანბანი მოცემული თეორიის ანბანიდან $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ სიმბოლოების დამატებით მიიღება.

შენიშვნა. შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების ტიპების შემოსატანად საკმარისია $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმულისა და ტერმის ცნებების განსაზღვრა იმ შემთხვევისთვის, როცა ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$-სთვის σ_i მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არე არის: (1) მოცემული თეორიის ფორმულების კლასი; (2) ტერმების კლასი; ან (3) კვანტორული ასოების არაცარიელი კლასი, რომელიც ნებისმიერ ცვლადთან ერთად შეიცავს იმავე ტიპის ყველა ცვლადს, ხოლო ნებისმიერ კონსტანტასთან ერთად — იმავე ტიპის ყველა კვანტორულ ასოს.

$\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმულებისა და ტერმების საერთო სახელწოდება იქნება $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ **მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმა**. რადგან $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმები, ფორმულები და ტერმები მოცემული თეორიის შესაბამისი ფორმების, ფორმულებისა და ტერმების აღნიშვნებია, ხშირად მათ უბრალოდ ფორმებს, ფორმულებსა და ტერმებს ვუწოდებთ.

თუ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ მოცემული თეორიის ოპერატორებია, ხოლო $\mathbb{A}$ — $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმა, რომელშიც მოცემული თეორიის $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$-სგან განსხვავებული ოპერატორები არ გვხვდება, მაშინ $\mathbb{A}$-ს ვუწოდებთ $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ **მეტაცვლადებისა და** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ **ოპერატორების გამოყენებით შედგენილ ფორმას**. აქედან ბუნებრივად განისაზღვრება შესაბამისი ცნებები ფორმულებისა და ტერმებისთვისაც.

3.1.2. ახლა შემოვიტანოთ $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ **მეტაცვლადებისა და პროპოზიციული და საგნობრივი ასოების მიმართ** $(—/—)$ **ტიპის ჩანაცვლებების გამოყენებით შედგენილი ფორმულისა და ტერმის**, შესაბამისად ფორმის, ცნებები. ამისთვის წინა რეკურსიულ განსაზღვრებაში: ა) ტერმინები „მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმულა“ და „მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ტერმი“ იცვლება შესაბამისი ტერმინებით, რომლებიც მეტაცვლადებთან ერთად აღნიშნული ტიპის ჩანაცვლებების გამოყენებასაც მოიცავს; ბ) პირდაპირ პუნქტებს ემატება შემდეგი პუნქტი. „თუ $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathbb{A}$ არის $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ მეტაცვლადებისა და პროპოზიციული და საგნობრივი ასოების მიმართ $(—/—)$ ტიპის ჩანაცვლებების გამოყენებით შედგენილი ფორმები, ხოლო ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის X_i არის $\mathscr{T}$ თეორიის პროპოზიციული ან საგნობრივი ასოების ანბანური გადათვლის წევრი, ან მეტაასო, რომლის ყველა მნიშვნელობა პროპოზიციულ ასოთა ანბანური გადათვლის წევრია, ან მეტაასო, რომლის ყველა მნიშვნელობა საგნობრივ ასოთა ანბანური გადათვლის წევრია, და $\mathbb{A}_i$ და X_i ერთი და იმავე ტიპისაა, მაშინ $(\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n/X_1, \ldots, X_n)\mathbb{A}$ არის იმავე მეტაცვლადებისა და ჩანაცვლებების გამოყენებით შედგენილი ფორმა, რომლის ტიპი $\mathbb{A}$ ფორმის ტიპს ემთხვევა“. დაბოლოს, წინა აბზაცის ანალოგიურად შეგვიძლია შემოვიტანოთ შემდეგი ცნება: $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ **მეტაცვლადე-**

ბის, აღნიშნული ტიპის ჩანაცვლებებისა და გარკვეული ოპერატორების გამოყენებით შედგენილი ფორმა (შესაბამისად, ფორმულა ან ტერმი).

3.2 ჩანაცვლებისა და პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორები

3.2.1. ვიგულისხმოთ, რომ განიხილება $\mathscr{T}$ თეორია და მისი რამდენიმე გაფართოება, რომელთა ფორმებიც $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებს **უშუალოდ** ან **არაპირდაპირ** აღნიშნავს. მაგალითად, თუ $\mathscr{T}_2$ თეორიის ფორმები უშუალოდ აღნიშნავს $\mathscr{T}_1$ თეორიის ფორმებს, ხოლო $\mathscr{T}_1$ თეორიის ფორმები უშუალოდ აღნიშნავს $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებს, მაშინ ვიგულისხმებთ, რომ $\mathscr{T}_2$ თეორიის ფორმები საბოლოოდ არაპირდაპირ აღნიშნავს $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებს. აღნიშნული გაფართოებების კლასი $\mathscr{A}$-თი აღვნიშნოთ და ვიგულისხმოთ, რომ იგი შეიცავს $\mathscr{T}$-საც, როგორც $\mathscr{T}$ თეორიის **არასაკუთრივ გაფართოებას**. $\mathscr{A}$-ს ყოველი თეორიის ნებისმიერი ფორმა $\mathscr{T}$ თეორიის სულ მცირე ერთ ფორმას აღნიშნავს. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ $\mathscr{A}$-ს არცერთი თეორიის ანბანი არ შეიცავს S და R სიმბოლოებს არც ინდექსებით და არც უინდექსოდ.

ნებისმიერ $\mathscr{T}_\beta$ თეორიას, რომელიც $\mathscr{T}$ თეორიის გაფართოებაა და არ შეიცავს S და R სიმბოლოებს არც ინდექსებით და არც უინდექსოდ, შევუსაბამოთ ე.წ. **კვაზიგაფართოებული $\mathscr{T}_{\beta\mathrm{S}}$ თეორია**, შესაბამისად $\mathscr{T}_{\beta\mathrm{R}}$, შესაბამისად $\mathscr{T}_{\beta SR}$. მისი ანბანი მიიღება $\mathscr{T}_\beta$-ს ანბანიდან $\mathrm{S}^{n+1}(n = 1, 2, \dots)$, შესაბამისად $\mathrm{R}^{n+1}(n = 1, 2, \dots)$, შესაბამისად $\mathrm{S}^{n+1}(n = 1, 2, \dots)$ და $\mathrm{R}^{n+1}(n = 1, 2, \dots)$ სიმბოლოების დამატებით **რთული ოპერატორული ნიშნების** როლში. S^{n+1}-ს ეწოდება **n-ადგილიანი ჩანაცვლების ნიშანი**, ხოლო R^{n+1}-ს — **n-ადგილიანი პირდაპირი ჩანაცვლების ნიშანი**.

შენიშვნა. კვაზიგაფართოებული თეორიების მხოლოდ რამდენიმე მაგალითის განხილვა გვჭირდება, ამიტომ შესაბამისი ცნების ზუსტი განსაზღვრა საჭირო არ არის. ტერმინი „კვაზიგაფართოებული თეორია“ მხოლოდ იმას მიუთითებს, რომ აღნიშნული ობიექტი გაფართოებული თეორიის ანალოგიურია, თუმცა თვითონ გაფართოებული თეორია არ არის.

S^{n+1} და R^{n+1} ოპერატორული ნიშნების ფორმალური მახასიათებლები შემდეგნაირად განისაზღვრება. S^{n+1} ნიშნის შესაბამისი კვანტორები, შესაბამისად R^{n+1} ნიშნის შესაბამისი კვანტორები, არის $\mathrm{S}^{n+1}X_1 \cdots X_n$, შესაბამისად $\mathrm{R}^{n+1}X_1 \cdots X_n$ სახის სიტყვები და მხოლოდ ისინი. მათ ეწოდება **ჩანაცვლების კვანტორები**, შესაბამისად **პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორები**. ყოველი X_i პროპოზიციული ან საგნობრივი ასოა ასოთა ანბანური გადათვლიდან. $\mathrm{S}^{n+1}X_1 \cdots X_n$ კვანტორის, შესაბამისად $\mathrm{R}^{n+1}X_1 \cdots X_n$ კვანტორის, წონაა $n + 1$. მისი i-ური ოპერანდი, როცა $i \leq n$, შეიძლება იყოს მხოლოდ ისეთი ფორმა, რომლის ტიპიც X_i-ის ტიპს ემთხვევა; $(n+1)$-ე ოპერანდად კი ნებისმიერი ფორმა დაიშვება. $\mathrm{S}^{n+1}X_1 \cdots X_n\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n\mathbb{A}$, შესაბამისად $\mathrm{R}^{n+1}X_1 \cdots X_n\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n\mathbb{A}$ სახის ფორმის ტიპი ემთხვევა $\mathbb{A}$ ფორმის ტიპს.

$\mathrm{S}^{n+1}X_1 \cdots X_n\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n\mathbb{A}$, შესაბამისად $\mathrm{R}^{n+1}X_1 \cdots X_n\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n\mathbb{A}$ ფორმაში S^{n+1}, შესაბამისად R^{n+1} ოპერატორული ნიშნით დაბმულ შემოსვლებად ითვლება $X_1, \dots, X_n$ ასოების შემოსვლები შესაბამის კვანტორში და ამ ოპერატორული ასოების თავისუფალი შემოსვლები ბოლო $\mathbb{A}$ ოპერანდში.

ამგვარად, $\mathsf{S}^{n+1}X_1\cdots X_n$ და $\mathsf{R}^{n+1}X_1\cdots X_n$ კვანტორები ასოებს მხოლოდ ბოლო ოპერანდში ბოჭავს.

სიმარტივისთვის განსახილველ კვანტორებში ზედა ინდექსებს გამოვტოვებთ, თუ ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ გამოსახულებები

$$(\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n\,/_{a\mathsf{S}}\,X_1,\dots,X_n)\mathbb{A},\quad \text{შესაბამისად}\quad (\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n\,/_{a\mathsf{R}}\,X_1,\dots,X_n)\mathbb{A},$$

არის ფორმების

$$\mathsf{S}^{n+1}X_1\cdots X_n\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n\mathbb{A},\quad \text{შესაბამისად}\quad \mathsf{R}^{n+1}X_1\cdots X_n\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n\mathbb{A}.$$

გამარტივებული ჩანაწერები. გარდა ამისა, შემდეგი სახის

$$\mathsf{R}^{n+1}X_1\cdots X_n\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n\mathbb{A},$$

ფორმას ან ფორმის ნაწილს $\mathscr{T}_{a\mathsf{R}}$, შესაბამისად $\mathscr{T}_{a\mathsf{SR}}$ თეორიაში, სადაც $\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n,\mathbb{A}$ არ შეიცავს პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორებს, განვიხილავთ როგორც $\mathscr{T}_a$, შესაბამისად $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$ თეორიის იმ ფორმის აღნიშვნას, რომელიც მიიღება $\mathbb{A}$-ში $X_1,\dots,X_n$ ასოების ნაცვლად $\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n$ ფორმების $(—/—)$ ტიპის ჩანაცვლებით. ამ შეთანხმების საფუძველზე $\mathscr{T}_{a\mathsf{R}}$, შესაბამისად $\mathscr{T}_{a\mathsf{SR}}$ თეორიის ნებისმიერ $\mathbb{B}_1$ ფორმას განვიხილავთ როგორც $\mathscr{T}_a$, შესაბამისად $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$ თეორიის ცალსახად განსაზღვრული $\mathbb{B}$ ფორმის აღნიშვნას და როგორც ამ უკანასკნელი თეორიის ფორმას. $\mathbb{B}_1$-დან $\mathbb{B}$-ს აღდგენა შემდეგი ალგორითმით სრულდება: $\mathbb{B}_1$-ში ვპოულობთ პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორის პირველ შემოსვლას, რომლის მოქმედების არეშიც სხვა ასეთი კვანტორი არ არის, ვასრულებთ შესაბამის ჩანაცვლებას და მისი შედეგით ვცვლით აღნიშნული კვანტორის შესაბამის ნაწილს. ასე მიღებულ $\mathbb{B}_{11}$ ფორმას იმავე გზით გარდავქმნით $\mathbb{B}_{12}$-ად და ა.შ. პროცესი სრულდება $\mathscr{T}_a$, შესაბამისად $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$ თეორიის ფორმის მიღებით. შედეგი იგივე იქნება, თუ ყოველ ბიჯზე პირველი შემოსვლის ნაცვლად მინიმალური მოქმედების არის მქონე ნებისმიერ პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორს ავიღებთ. $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$ თეორიის ნებისმიერ ფორმას ან მის ნაწილს, რომელსაც აქვს სახე $\mathsf{S}^{n+1}X_1\cdots X_n\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n\mathbb{A}$ და რომლის $\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n,\mathbb{A}$ ოპერანდები არ შეიცავს ჩანაცვლების კვანტორებს, განვიხილავთ როგორც $\mathscr{T}$ თეორიის იმ $\mathbb{C}$ ფორმის აღნიშვნას, რომელიც მიიღება $\mathbb{A}'$-ში $X_1,\dots,X_n$ ასოების ნაცვლად $\mathbb{A}'_1,\dots,\mathbb{A}'_n$ ფორმების $(—/—)$ ტიპის ჩანაცვლებით. აქ $\mathbb{A}'_1,\dots,\mathbb{A}'_n,\mathbb{A}'$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ისეთი ფორმები, რომლებსაც შესაბამისად აღნიშნავს $\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n,\mathbb{A}$. თუ პირველი ფორმები ცალსახად განისაზღვრება, ცალსახად განისაზღვრება $\mathbb{C}$-ც. ამ შეთანხმებით $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$ თეორიის ნებისმიერ $\mathbb{B}_1$ ფორმას განვიხილავთ როგორც $\mathscr{T}$ თეორიის რომელიმე $\mathbb{B}$ ფორმის აღნიშვნას (ცალსახად ან არაცალსახად განსაზღვრულს) და როგორც $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმას. $\mathbb{B}_1$-დან $\mathbb{B}$-ს აღდგენა სრულდება ზემოთ აღწერილის ანალოგიური პირობითი ალგორითმით. ამისთვის საჭიროა ალგორითმი, რომელიც $\mathscr{T}_a$ თეორიის ნებისმიერი $\mathbb{A}_a$ ფორმისთვის პოულობს $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმას $\mathbb{A}$, რომელსაც $\mathbb{A}_a$ აღნიშნავს. ახლა განვიხილოთ $\mathscr{T}_{a\mathsf{SR}}$ თეორიის ფორმა ან მისი ისეთი ნაწილი, რომელიც პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორის მოქმედების არეში არ არის და რომელსაც აქვს სახე $\mathsf{S}^{n+1}X_1\cdots X_n\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n\mathbb{A}$.

თუ $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathbb{A}$ არ შეიცავს $\mathsf{S}^{k+1}Y_1 \cdots Y_k$ სახის ჩანაცვლების კვანტორებს, ამ გამოსახულებასაც განვიხილავთ როგორც $\mathscr{T}$ თეორიის იმ $\mathbb{C}$ ფორმის აღნიშვნას, რომელიც $\mathbb{A}'$-ში $X_1, \ldots, X_n$ ასოების ნაცვლად $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n$ ფორმების (—/—) ტიპის ჩანაცვლებით მიიღება. $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathbb{A}'$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმები, რომლებსაც შესაბამისად აღნიშნავს $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathbb{A}$. მართლაც, ეს უკანასკნელნი $\mathscr{T}_{a\mathsf{R}}$ თეორიის ფორმებია, ამიტომ ისინი აღნიშნავს $\mathscr{T}_a$ თეორიის ფორმებს, რომლებიც, თავის მხრივ, $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებს აღნიშნავს. თუ კი იგივე სახის ნაწილი $\mathscr{T}_{a\mathsf{SR}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმაში პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორის მოქმედების არეშია, მაშინ, მიუხედავად მემოთ თქმულისა, იგი ზოგად შემთხვევაში არ შეიძლება შევცვალოთ $\mathbb{C}$-ს ანალოგიურად განსაზღვრული $\mathbb{C}'$ ფორმით. ასეთმა შეცვლამ შეიძლება შეცვალოს $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$ და $\mathscr{T}$ თეორიების ის ფორმები, რომლებსაც $\mathbb{B}$ აღნიშნავს. ამ შემთხვევაში აღნიშნული ნაწილი აღნიშნავს $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$ თეორიის იმ $\mathbb{D}$ ფორმას, რომელიც ამ ნაწილიდან პირდაპირი ჩანაცვლების კვანტორების გამორიცხვით მიიღება. მოგვიანებით, $\mathbb{B}$-დან $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმის აღდგენის პროცესში $\mathbb{D}$ ნაწილის გარდაქმნის პირველი ბიჯი შესაბამისი პირდაპირი ჩანაცვლების შესრულება იქნება.

ამგვარად, $\mathscr{T}_{a\mathsf{R}}$ თეორიის ფორმა სურვილის შემთხვევაში შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $\mathscr{T}_a$ თეორიის ფორმა, ასევე როგორც $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა. ასევე შეიძლება $\mathscr{T}_{a\mathsf{SR}}$ თეორიის ფორმა განვიხილოთ როგორც $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$ თეორიის ფორმა, ასევე როგორც $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა.

$\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$, $\mathscr{T}_{a\mathsf{R}}$ და $\mathscr{T}_{a\mathsf{SR}}$ თეორიების აქსიომები და დასკვნის წესები (კერძოდ, $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{S}}}$, $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{R}}}$, $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{SR}}}$, $\mathscr{T}_{\mathsf{S}}$, $\mathscr{T}_{\mathsf{R}}$ და $\mathscr{T}_{\mathsf{SR}}$ თეორიებისთვის) ბუნებრივად განისაზღვრება 2.5.1-ში მიღებული შეთანხმების საფუძველზე.

შენიშვნა. $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{S}}}$ აღნიშვნა უნდა გავიგოთ როგორც $\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}$, სადაც $\mathscr{T}_a$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$. ანალოგიურად გაიგება $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{R}}}$ და $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{SR}}}$ აღნიშვნები. $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{R}}}$-ის შემთხვევაში $\widetilde{\mathscr{T}}$ სიმბოლო შეიძლება ძირითად თეორიადაც მივიჩნიოთ; ეს $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{R}}}$ აღნიშვნის მნიშვნელობას არ ცვლის.

3.2.2. ჩანაცვლების ოპერატორული ნიშნები ორ უკიდურეს შემთხვევაში განვიხილეთ: ერთ შემთხვევაში ჩანაცვლებები სრულდება $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებში, ხოლო მეორეში — ამ თეორიის გაფართოების ფორმებში.

უფრო ზოგად შემთხვევაში ჩანაცვლების ოპერატორულ ნიშნებად ხშირად გამოიყენება $\mathsf{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_c}$ სახის სიმბოლოები, სადაც $\mathscr{T}_c$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ზემოთ განხილული რომელიმე გაფართოება. ამ ნიშნებით შედგენილი კვანტორები მიუთითებს, რომ $\mathscr{T}_c$ თეორიის ფორმების ჩანაცვლება $\mathscr{T}_c$ თეორიის ფორმებში უნდა შესრულდეს მაშინაც, როცა ეს ფორმები, მაგალითად, $\mathscr{T}_c$ თეორიის რომელიმე გაფართოების ფორმებითაა აღნიშნული. ამ ზოგადი შეთანხმებით S^{n+1} სიმბოლოს ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ $\mathsf{S}^{n+1}_{\mathscr{T}}$. ასევე, ზემოთ განხილულ ორ შემთხვევაში R^{n+1} სიმბოლოს $\mathscr{T}_{a\mathsf{R}}$ და $\mathscr{T}_{a\mathsf{SR}}$ თეორიებში შესაბამისად შეესაბამება $\mathsf{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_a}$ და $\mathsf{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_{a\mathsf{S}}}$ სიმბოლოები.

ამ უკანასკნელი შეთანხმების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ზოგადი ხასიათის შემდეგი მაგალითი.

ვთქვათ $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2, \ldots, \mathscr{T}_m$ თეორიების მიმდევრობის ყოველი წევრი, მეორიდან დაწყებული, წინა წევრის ისეთი საკუთრივი გაფართოებაა, რომ მისი ფორმები წინა თეორიის ფორმებს აღნიშნავს. ვთქვათ აგრეთვე, $\mathscr{T}_{m_0}$ არის $\mathscr{T}_m$ თეორიის კვაზიგაფართოება, რომლის ანბანი მიიღება $\mathscr{T}_m$-ის ანბანიდან $\mathsf{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_i}(n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, m)$ ოპერატორული ნიშნების დამატებით. $m = 1$ შემთხვევა არ გამოირიცხება. ამასთან, ვიგულისხმოთ, რომ არცერთი $\mathsf{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_i}(n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, m)$ სიმბოლო

არ გვხვდება $\mathscr{T}_m$ თეორიის ანბანში. ვთქვათ $\mathbb{B}$ არის $\mathscr{T}_{m_0}$ თეორიის ფორმა, ხოლო $\mathrm{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_i} X_1 \cdots X_n \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \mathbb{A}$ — $\mathbb{B}$ ფორმის ისეთი ნაწილი, რომ $\mathrm{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_i} X_1 \cdots X_n$ ოპერატორის მოქმედების არეში $\mathrm{S}^{k+1}_{\mathscr{T}_l} Y_1 \cdots Y_k (k = 1, 2, \ldots; l = 1, 2, \ldots, m)$ სახის კვანტორი არ გვხვდება. მაშინ $\mathrm{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_i} X_1 \cdots X_n \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \mathbb{A}$ ნაწილი აღნიშნავს (—/—) ტიპის ჩანაცვლების შედეგს $\mathbb{A}'$ ფორმაში $X_1, \ldots, X_n$ ასოების ნაცვლად $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n$ ფორმების ჩასმით. აქ $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathbb{A}'$ არის $\mathscr{T}_i$ თეორიის ისეთი ფორმები, რომლებსაც შესაბამისად აღნიშნავს $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathbb{A}$. თუ ამ ჩანაცვლების შედეგით შევცვლით $\mathbb{B}$ ფორმის განსახილველ ნაწილს, მივიღებთ $\mathscr{T}_{m_0}$ თეორიის $\mathbb{B}_1$ ფორმას, რომელშიც $\mathrm{S}^{k+1}_{\mathscr{T}_l} Y_1 \cdots Y_k$ სახის ჩანაცვლების კვანტორების რაოდენობა ერთით ნაკლებია, ვიდრე $\mathbb{B}$-ში. იმავე გზით $\mathbb{B}_1$-დან მიიღება $\mathbb{B}_2$ და ა.შ. პროცესი სრულდება $\mathscr{T}_m$ თეორიის $\mathbb{B}_p$ ფორმის მიღებით, რომელსაც $\mathbb{B}$ აღნიშნავს. $\mathbb{B}$ ფორმა **უშუალოდ** აღნიშნავს $\mathbb{B}_p$ ფორმას. თუ $m > 1$, მაშინ $\mathbb{B}$ არაპირდაპირ აღნიშნავს $\mathscr{T}$ თეორიის იმ $\mathbb{B}'$ ფორმას, რომელსაც $\mathbb{B}_p$ აღნიშნავს. არ გამოირიცხება შემთხვევა, როცა $\mathbb{B}_p$ ემთხვევა $\mathbb{B}'$-ს.

განვიხილოთ კიდევ ერთი ზოგადი ხასიათის მაგალითი. ვთქვათ $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2, \ldots, \mathscr{T}_m$ თეორიების მიმდევრობის ყოველი წევრი, მეორიდან დაწყებული, წინა წევრის ისეთი გაფართოებაა, რომ მისი ფორმები წინა თეორიის ფორმებს აღნიშნავს; $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2 = \cdots = \mathscr{T}_m$ შემთხვევაც არ გამოირიცხება. ვიგულისხმოთ, რომ $\mathscr{T}_{m_0}$ არის $\mathscr{T}_m$, ხოლო $\mathscr{T}_{m_1}, \ldots, \mathscr{T}_{m_\ell}$ შემდეგი პირობებით განისაზღვრება: $\mathscr{T}_{m_i}$ თეორია ($i = 1, 2, \ldots, \ell$) არის $\mathscr{T}_{m_{i-1}}$ თეორიის კვაზიგაფართოება, რომლის ანბანი მიიღება $\mathscr{T}_{m_{i-1}}$ თეორიის ანბანიდან $\mathrm{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_{m_{i-1}}}, n = 1, 2, \ldots$ ჩანაცვლების ოპერატორული ნიშნების დამატებით. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ

$$\mathrm{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_{m_i}} \quad \text{და} \quad \mathrm{S}^{n+1}_{m_i} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, \ldots, \ell - 1)$$

სიმბოლოებიდან არცერთი არ გვხვდება $\mathscr{T}_m$ თეორიის ანბანში. სიმარტივისთვის $\mathrm{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_{m_i}}$ ($i = 0, 1, \ldots, \ell - 1$) სიმბოლოების ნაცვლად გამოვიყენებთ $\mathrm{S}^{n+1}_{m_i}$, $i = 0, 1, \ldots, \ell - 1$ სიმბოლოებსაც. ვთქვათ $\mathbb{B}$ არის $\mathscr{T}_{m_\ell}$ თეორიის ფორმა, ხოლო $\mathrm{S}^{n+1}_{m_i} X_1 \cdots X_n \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \mathbb{A}$ — $\mathbb{B}$ ფორმის ისეთი ნაწილი, რომ $\mathrm{S}^{n+1}_{m_i} X_1 \cdots X_n$ კვანტორი $\mathrm{S}^{k+1}_{m_j} Y_1 \cdots Y_k (j > i; k = 1, 2, \ldots)$ სახის ოპერატორის მოქმედების არეში არ არის და, ამასთან, $\mathrm{S}^{n+1}_{m_i} X_1 \cdots X_n$ ოპერატორის მოქმედების არეში $\mathrm{S}^{k+1}_{m_j} Y_1 \cdots Y_k (j \geq i; k = 1, 2, \ldots)$ სახის კვანტორი არ გვხვდება.

მაშინ $\mathbb{B}$ ფორმის $\mathrm{S}^{n+1}_{m_i} X_1 \cdots X_n \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \mathbb{A}$ ნაწილი აღნიშნავს (—/—) ტიპის ჩანაცვლების შედეგს $\mathbb{A}$ ფორმაში $X_1, \ldots, X_n$ ასოების ნაცვლად $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ ფორმების ჩასმით. თუ ამ შედეგით შევცვლით $\mathbb{B}$ ფორმის განსახილველ ნაწილს, მივიღებთ $\mathscr{T}_{m_\ell}$ თეორიის $\mathbb{B}_1$ ფორმას. იმავე გზით $\mathbb{B}_1$-დან მივიღებთ $\mathbb{B}_2$-ს და ა.შ. პროცესი სრულდება $\mathscr{T}_m$ თეორიის $\mathbb{B}_p$ ფორმის მიღებით. $\mathbb{B}$ ფორმა უშუალოდ აღნიშნავს $\mathscr{T}_m$ თეორიის $\mathbb{B}_p$ ფორმას. თუ $m > 1$, მაშინ $\mathbb{B}$ ფორმა არაპირდაპირ აღნიშნავს $\mathscr{T}$ თეორიის იმ $\mathbb{B}'$ ფორმას, რომელსაც $\mathbb{B}_p$ აღნიშნავს. თუ ყოველი $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$-სთვის და $\mathscr{T}_i$ თეორიის ნებისმიერი $\mathbb{A}$ ფორმისთვის ცალსახად განისაზღვრება $\mathscr{T}_{i-1}$ თეორიის ფორმა, რომელსაც $\mathbb{A}$ აღნიშნავს, მაშინ $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{B}'$ ფორმაც, რომელსაც $\mathbb{B}$ აღნიშნავს, ცალსახად განისაზღვრება.

შენიშვნა. პირველი მაგალითის შემთხვევაში თავდაპირველად სრულდება ის ჩანაცვლებები, რომელთა შესაბამის კვანტორებს მინიმალური მოქმედების არე აქვს, ანუ რომელთა მოქმედების არეში სხვა კვანტორი არ არის. ეს არ არის დამოკიდებული ჩანაც-

ვლების ნიშნების ქვედა ინდექსებზე. ჩანაცვლებებს შორის განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ თითოეული მათგანი შესაბამისი $\mathscr{T}_i$ თეორიის ფორმებზე მოქმედებს: შესაბამისი ჩანაცვლების კვანტორის ყოველი ოპერანდი, რომელიც $\mathscr{T}_m$ თეორიის ფორმაა, მაგრამ $\mathscr{T}_i$ თეორიის ფორმა არ არის, უნდა შეიცვალოს $\mathscr{T}_i$ თეორიის იმ ფორმით, რომელსაც ეს ოპერანდი აღნიშნავს. მეორე მაგალითში ჩანაცვლებათა რიგი უფრო რთული წესებით განისაზღვრება.

ორივე მაგალითში $\mathsf{S}^{n+1}X_1\cdots X_n\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n\mathbb{A}$ ნაწილის $\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n,\mathbb{A}$ ნაწილებს (ოპერანდებს) ვუწოდებთ **სუბსტიტუენდებს**; $\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n$ არის **წინამორბედი სუბსტიტუენდები**, ხოლო $\mathbb{A}$ — **ჩამკეტი სუბსტიტუენდი**. პირველ მაგალითში $\mathbb{A}'_1,\ldots,\mathbb{A}'_n,\mathbb{A}'$ ფორმებს, მათ შესაბამის ნაწილებთან გაიგივებით, ვუწოდებთ **ფაქტობრივ სუბსტიტუენდებს**; $\mathbb{A}'$ არის **ფაქტობრივი ჩამკეტი სუბსტიტუენდი**, ხოლო დანარჩენი ფორმები — **ფაქტობრივი წინამორბედი სუბსტიტუენდები**. მეორე მაგალითში თვით $\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n,\mathbb{A}$ ფორმებსაც ვუწოდებთ **ფაქტობრივ სუბსტიტუენდებს**. ზემოთ მიღებული შეთანხმებით $\mathsf{S}^{n+1}_{\mathscr{T}_i}X_1\cdots X_n$ კვანტორის **მოქმედების არე** შესაბამისი ჩამკეტი სუბსტიტუენდისგან შედგება.

შენიშვნა. ვთქვათ $\mathscr{T}_\lambda$ აღნიშნავს $\mathscr{T}_{m_0}$-ს პირველი მაგალითიდან ან $\mathscr{T}_{m_\ell}$-ს მეორე მაგალითიდან. ადვილი დასანახია, რომ $\mathscr{T}_\lambda$ თეორიის ფორმების სტრუქტურული თვისებები, კერძოდ $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{S}}},\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{R}}},\mathscr{T}_{\mathsf{S}},\mathscr{T}_{\mathsf{R}},\mathscr{T}_{\mathsf{SR}}$ თეორიების ფორმების თვისებები, ძირითადად ისეთივეა, როგორიც $\mathscr{T}$ თეორიის შემთხვევაში. ასევე, $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებთან დაკავშირებული ცნებები ბუნებრივად განზოგადდება $\mathscr{T}_\lambda$ თეორიის ფორმებზე მათი არსებითი თვისებების შენარჩუნებით. ამ განზოგადებული ცნებების განსაზღვრებებსა და მათი თვისებების ფორმულირებებს არ მოვიყვანთ, თუმცა მათ გამოვიყენებთ; ეს სირთულეს არ გამოიწვევს. შენიშვნა ქვემოთ შემოტანილ ცნებებსა და თვისებებსაც ეხება.

მაგალითით ადვილი საჩვენებელია, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმა, რომელსაც აღნიშნავს $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{R}}}$ თეორიის $\mathsf{R}\,x\,\mathbb{A}_1\,\mathsf{R}\,y\,\mathbb{A}_2\,\mathbb{A}$ ფორმა, შეიძლება არ ემთხვეოდეს (კონგრუენტულობის სიზუსტემდეც კი) $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{B}'$ ფორმას, რომელსაც აღნიშნავს $\mathbb{B}_1$ ფორმა. აქ $\mathbb{B}_1$ არის $\mathsf{R}\,y\,\mathbb{A}_2\,\mathbb{A}$ ფორმაში x-ის ნაცვლად $\mathbb{A}_1$ ფორმის ჩანაცვლების შედეგი; იგულისხმება, რომ $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ და $\mathbb{A}$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმები, რომლებიც არ შეიცავს ჩანაცვლების ოპერატორებს. სხვა სიტყვებით, ზოგად შემთხვევაში ჩანაცვლებების რიგის შეცვლა არ შეიძლება.

იმ შეთანხმების გათვალისწინებით, რომ $(\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n/X_1,\ldots,X_n)\mathbb{A}$ არის $\mathsf{S}X_1\cdots X_n\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n\mathbb{A}$ ფორმის გამარტივებული ჩანაწერი, ადვილი დასანახია შემდეგი: საგნობრივი და პროპოზიციული ასოების მიმართ $(—/—)$ ტიპის ჩანაცვლებებისა და $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმის ცნება ემთხვევა $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი $\mathscr{T}_{\mathsf{S}}$ თეორიის ფორმის ცნებას. აქედან გამომდინარეობს ამ მტკიცების სრული ანალოგები ფორმულებისა და ტერმებისთვისაც.

ახლა ადვილი დასანახია შემდეგი თეორემის მართებულობა.

თეორემა 3.1. *ვთქვათ $\mathsf{a}_1,\ldots,\mathsf{a}_m$ მეტაასოებია, ხოლო $\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n$ ისეთი მეტაცვლადებია, რომ ყოველი $i\in\{1,2,\ldots,n\}$-სთვის $\mathbb{A}_i$ მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არე ან მოცემული თეორიის ფორმულების რაიმე სიმრავლეა, ან მოცემული თეორიის ტერმების რაიმე სიმრავლე. შემდეგ, ვთქვათ $\mathbb{A}$ არის შემდეგი მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი*

ფორმა:

$$\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m,\ \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \tag{1}$$

ხოლო $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n$ და $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}''_1, \ldots, \mathbb{A}''_n$ არის (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ისეთი სისტემები, რომ

$$\mathbb{A}'_i \simeq \mathbb{A}''_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

მაშინ $\mathbb{A}$ ფორმაში (1) მეტაცვლადების ნაცვლად მათი მნიშვნელობების მითითებული სისტემების ჩასმისას მიიღება ურთიერთკონგრუენტული $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{A}''$ ფორმები.

თავი 4

შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების ტიპები

$\mathscr{T}$ თეორიაში, შესაბამისად $\mathscr{T}'$-სა და $\mathscr{T}''$-ში, განვიხილავთ

$$\sigma\, \mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}.$$

სახის განსაზღვრებებს. ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება 2.5-ში მოცემული ზოგადი პირობები. გარდა ამისა, ყოველი განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში შეიძლება გვხვდებოდეს მხოლოდ ადრე შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოები. ქვემოთ შემოგვაქვს განსაზღვრებების სხვადასხვა ტიპი მარჯვენა ნაწილის მიმართ დამატებითი მოთხოვნებით. სიმარტივისთვის ვიგულისხმებთ, რომ განსაზღვრებებში შეიძლება გვხვდებოდეს მხოლოდ $\mathbb{A}_i, \mathsf{a}_j, \mathsf{b}_l (i, j, l = 1, 2, \dots)$ მეტაცვლადები და ეს სიმბოლოები განსახილველი თეორიების ანბანებში არ გვხვდება. $\mathbb{B}$ მეტაცვლადი თვით შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრებაში არ მონაწილეობს. პრაქტიკაში ეს შეზღუდვა ხშირად ირღვევა და მეტაცვლადებად იყენებენ ნებისმიერ სიმბოლოებს, რომლებიც განსახილველი თეორიის ანბანში არ გვხვდება. მიღებული შედეგები ზოგად შემთხვევაშიც ძალაში რჩება, სულ მცირე, მცირე და ცხადი ცვლილებებით.

4.1 I ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები

4.1.1 ტიპი I

პირობა (a). განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც აგებულია $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების გამოყენებით და შეიცავს მათ. მასში ცხადად წარმოდგენილი ყველა კვანტორული ასო, აგრეთვე $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m$ მეტაასოები, დაბმულია. ამასთან, არსებობს $1, 2, \dots, n$ მიმდევრობის ისეთი $n_1, \dots, n_\ell$ ქვემიმდევრობა, რომ $\mathbb{A}_{n_1}, \dots, \mathbb{A}_{n_\ell}$ მეტაცვლადებიდან თითოეული იმ კვანტორების მოქმედების არეშია, რომელთა ოპერატორულ ასოებს შორის გვხვდება $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m$ მეტაასოები და მხოლოდ

ისინი; დანარჩენი $\mathbb{A}_i$ მეტაცვლადები არცერთი კვანტორის მოქმედების არეში არ არის. გარდა ამისა, $n_1, \dots, n_\ell$ მიმდევრობა ცარიელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $m = 0$.

პირობა (b). თუ $\mathsf{a}'_1, \dots, \mathsf{a}'_m$ არის $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემა, $\mathbb{B}' = (\mathsf{a}'_1, \dots, \mathsf{a}'_m \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}}\, \mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m)\mathbb{B}$, a არის $\mathbb{B}'$-ის ასო, რომელიც $\mathbb{B}$ ფორმის კვანტორულ ასოს შეესაბამება (იგულისხმება ასოთა შემოსვლები), ხოლო a^* არის $\mathbb{B}'$-ის ასო, რომელიც რომელიმე a'_i ასოს ჩასმული შემოსვლაა, მაშინ a და a^* ასოებიდან არცერთი არ მოქმედებს მეორეზე.

შენიშვნა. (1) (b) პირობა შეიძლება გამარტივებულად ასე გამოვთქვათ: „თუ a არის $\mathbb{B}$ ფორმის ასო და $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, მაშინ a და a_i ასოებიდან არცერთი არ მოქმედებს მეორეზე a_i მეტაცვლადის მისი მნიშვნელობათა არიდან აღებული ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის“.

(2) იგივე (b) პირობა ასე შეიძლება გამოითქვას: „$\mathbb{B}$ ფორმის დაბმული მათემატიკური ასოების ჯგუფები დაბმული ასოების ჯგუფებად რჩება $\mathbb{B}'$ ფორმაზე გადასვლისას, რომელიც $\mathbb{B}$-დან $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმით მიიღება“. აქ ყოველი $\mathbb{A}_i$ მეტასიმბოლო განიხილება როგორც პროპოზიციული ან საგნობრივი ასო იმის მიხედვით, $\mathbb{A}_i$-ს მნიშვნელობათა არე ფორმულების კლასია თუ ტერმების. თუ სრულდება (a) პირობა, (b) პირობა შეიძლება გამარტივებულად ასეც გამოვთქვათ: „$\mathbb{B}$ ფორმის დაბმული მათემატიკური ასოების ჯგუფები დაბმულ ჯგუფებად რჩება $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას, შესაბამისად $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას ნებისმიერი გაფართოებული $\mathscr{T}_a$ თეორიის მიმართ“.

(3) განვიხილავთ მხოლოდ მეტაცვლადების *ყველა შემოსვლის* ნაცვლად ერთდროულ ან მარტივ ჩანაცვლებებს. მათი შედეგების აღსანიშნავად, ზემოთ მიღებული შეთანხმებების შესაბამისად, გამოვიყენებთ $(\text{—} \,/_{\cdot}\, \text{—})$ სიმბოლოს ან მისგან $/$ ნიშნისთვის ინდექსების მიწერით მიღებულ სიმბოლოებს. შესაბამის ტერმინებში ხშირად გამოვტოვებთ დამაზუსტებელ ფრაზებს. მაგალითად, ნაცვლად ფრაზისა „$\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას ამ მეტაცვლადების ყველა შემოსვლის ნაცვლად“ ვიტყვით „$\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას“.

პრაქტიკაში გამოყენებული განსაზღვრებისთვის (b) პირობა ჩვეულებრივ ტრივიალურად სრულდება: განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი არ შეიცავს კვანტორულ ასოებს ან $m = 0$. ამ უკანასკნელის მაგალითია $\mathcal{S}$ თეორიის შემდეგი განსაზღვრება:

$$\varnothing \text{———} \tau X \forall x\, (x \notin X),$$

სადაც X პირველი კლასური ცვლადია, ხოლო x — პირველი სიმრავლური ცვლადი. აქ X და x მეტაკონსტანტებია და არა მეტაცვლადები; მათში ყოველთვის მათი მნიშვნელობები, ანუ მათემატიკური ასოები უნდა ვიგულისხმოთ. ამ განსაზღვრების ცხადი სახეა

$$\varnothing \text{———} \tau_{\mathbb{S}_1} \forall_{\mathbb{S}_7} [\mathbb{S}_7 \notin \mathbb{S}_1].$$

განსაზღვრების ასეთი არაცხადი სახიდან მისი ცხადი სახის აღდგენას მხოლოდ მექანიკური, არაარსებითი სირთულეები ახლავს; ამგვარი აღდგენა თითქმის არასდროს

გვჭირდება.

4.1.2. I ტიპის განსაზღვრებათა კლასი ბუნებრივად იყოფა სამ ქვეკლასად შემდეგი დამატებითი მოთხოვნების მიხედვით:

1) $m = n = 0$; 2) $m = 0 \wedge n \neq 0$; 3) $m \neq 0$ და, მაშასადამე, $n \neq 0$. ამ ქვეკლასების ელემენტებს შესაბამისად ვუწოდებთ **I_1 ტიპის**, **I_2 ტიპის** და **I_3 ტიპის განსაზღვრებებს**.

ცხადია, I_1 ტიპის განსაზღვრების მარცხენა ნაწილი მხოლოდ ერთი სიმბოლოსგან შედგება — ამ განსაზღვრებით შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოსგან. (*b*) პირობა გამოირიცხება, ხოლო (*a*) პირობა შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ.

პირობა ($a\,\mathrm{I}_1$). განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც თავისუფალ კვანტორულ ასოებს არ შეიცავს.

ცხადია აგრეთვე, რომ I_1 ტიპის განსაზღვრებაში σ წარმოებული პროპოზიციული ან საგნობრივი კონსტანტაა იმის მიხედვით, $\mathbb{B}$ ფორმულაა თუ ტერმი.

I_2 ტიპის განსაზღვრების მარცხენა ნაწილს აქვს სახე $\sigma\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n$, შესაბამისად $[\sigma\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n]$, შესაბამისად $[\mathbb{A}_1\ \sigma\ \mathbb{A}_2]$ ან $[\sigma\mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n]$ იმის მიხედვით, $n = 2$ თუ $n \neq 2$.

(*b*) პირობა ამ შემთხვევაშიც გამოირიცხება, ხოლო (*a*) პირობა შეიძლება შემდეგნაირად გამოითქვას:

პირობა ($a\,\mathrm{I}_2$). განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების გამოყენებითაა შედგენილი და მათ შეიცავს. მასში ცხადად წარმოდგენილი ყოველი კვანტორული ასო დაბმულია, ხოლო $\mathbb{A}_i$ მეტაცვლადები კვანტორების მოქმედების არეში არ არის.

ადვილი დასანახია, რომ I_3 ტიპის განსაზღვრებაში σ შემამოკლებელი სიმბოლო იქნება (n, m) წონის მქონე ოპერატორული ნიშანი დაბმულობის მაჩვენებლით $(n_1, \ldots, n_\ell)$.

I_1 და I_2 ტიპის განსაზღვრებათა მაგალითები გვხვდება ზემოთ განხილულ $\mathcal{P}'_1$ თეორიაში. I_3 ტიპის განსაზღვრების მაგალითია

$$\exists \mathsf{x}\,\mathbb{A} \text{ ——— } \neg\forall \mathsf{x} \neg \mathbb{A}, \tag{1}$$

სადაც x ნებისმიერი საგნობრივი ასოა, ანუ x მეტაცვლადია, რომლის მნიშვნელობათა არე ყველა საგნობრივი ასოს კლასია; $\mathbb{A}$ კი მეტაცვლადია, რომლის მნიშვნელობათა არე $\mathscr{T}$ თეორიის ყველა ფორმულის კლასია.

შენიშვნა. ვიგულისხმოთ, რომ განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი $\mathbb{B}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების გამოყენებითაა შედგენილი და მათ შეიცავს. მაშინ I ტიპის განსაზღვრების (*a*) პირობის დანარჩენი მოთხოვნები აუცილებელი და საკმარისია იმისთვის, რომ განსაზღვრების ორივე მხარეს თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა ჰქონდეს მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის არჩევისას $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი გაფართოების $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ მიმართ. ეს უკანასკნელი პირობა, თავის მხრივ, საკმარისია იმისთვის, რომ თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობების დაფიქსირებისას მარჯვენა ნაწილის მნიშვნელობა განისაზღვრებოდეს $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ ფორმებით, როცა $\mathbb{A}_{n_1}, \ldots, \mathbb{A}_{n_\ell}$ განიხილება როგორც სქემები $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ ასოების მიმართ. ეს არ ნიშნავს, რომ თავად ეს სქემები აუცილებლად ოპერატორული ნიშნების არგუმენტები იქნება; ისინი განსაზღვრავს იმ სქემებს, რომლებიც არგუმენტებად გამოდის. აქედან გამომდინარეობს, რომ I ტიპის განსაზღვრება ცალსახად განსაზღვრავს შესაბამისი შემამოკლებელი სიმბოლოს — წარმოებული ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის — შინაარსს. ზოგად შემთხვევაში ეს შინაარსი დამოკიდებული იქ-

ნება მარჯვენა ნაწილში არსებული *არაკვანტორული* კონსტანტების მნიშვნელობათა სისტემაზე და არ იქნება დამოკიდებული კვანტორული კონსტანტების მნიშვნელობებზე. ამასთან, შესაძლებელია ისეთი განსაზღვრებებიც, რომელთა შესაბამისი სიმბოლოების შინაარსი მარჯვენა ნაწილში არსებული არაკვანტორული კონსტანტების მნიშვნელობებზე არ არის დამოკიდებული. ამის მაგალითია

$$t \text{ ——— } \mathsf{P} \vee \neg \mathsf{P}, \tag{2}$$

სადაც P არის არაკვანტორული პროპოზიციული კონსტანტა მნიშვნელობათა სიმრავლით $\{t, f\}$.

4.2 II და II′ ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები

ტიპი II. საჭიროა შემდეგი პირობების შესრულება.

პირობა (a_1). განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც აგებულია მეტაცვლადების

$$\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m,\ \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n,\ \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k \tag{1}$$

გამოყენებით და შეიცავს მათ; აქ b_i მეტაასოა, რომლის მნიშვნელობათა არე არის რომელიმე ტიპის ყველა კვანტორული ასოს კლასი ან რომელიმე ტიპის ყველა ცვლადის კლასი $(i = 1, 2, \ldots, k)$. ამასთან, $\mathbb{B}$ ფორმაში ცხადად წარმოდგენილი ყოველი კვანტორული ასო, აგრეთვე $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაასოები, დაბმულია. გარდა ამისა, არსებობს $1, 2, \ldots, n$ მიმდევრობის ისეთი $n_1, \ldots, n_\ell$ ქვემიმდევრობა, რომ $\mathbb{A}_{n_1}, \ldots, \mathbb{A}_{n_\ell}$ მეტაცვლადებიდან თითოეული იმ კვანტორების მოქმედების არეშია, რომელთა ოპერატორულ ასოებს შორის გვხვდება $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ მეტაასოები და მათ გარდა შეიძლება გვხვდებოდეს მხოლოდ ზოგიერთი $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაასო. ყოველი დანარჩენი $\mathbb{A}_i$ მეტაცვლადი შეიძლება იყოს მხოლოდ ისეთი კვანტორის მოქმედების არეში, რომლის ოპერატორულ ასოებს შორის გვხვდება მხოლოდ ზოგიერთი $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაასო. ამასთან, $n_1, \ldots, n_\ell$ მიმდევრობა ცარიელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $m = 0$. დაბოლოს, $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მიმდევრობაში მეტაასოების რიგი ბუნებრივად განისაზღვრება განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში მათი პირველი შემოსვლებით.

პირობა (b). იგივეა, რაც I ტიპის განსაზღვრებაში.

პირობა (d). $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაცვლადები, სხვა მეტაცვლადებისგან განსხვავებით, მნიშვნელობებს სხვა მეტაცვლადების მნიშვნელობებისგან დამოუკიდებლად არ იღებს. კერძოდ, სისტემა

$$\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m,\ \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n,\ \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$$

არის (1) მეტაცვლადების მიმდევრობის მნიშვნელობათა სისტემა, შესაბამისად მნიშვნელობათა სისტემა ნებისმიერი გაფართოებული თეორიის მიმართ. იგი დასაშვებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი ორი პირობა.

(d_1). $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$ ასოები განსხვავდება ერთმანეთისა და $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m$ ასოებისგან, არ

არის $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n$ ფორმების თავისუფალი ასოები და არცერთი მათგანი არ გვხვდება თავისუფალი ან დაბმული შემოსვლის სახით მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმაში.

(d_2). $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$ ასოების ინდექსები მინიმალურია (იგულისხმება, რომ $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m$ ასოების და $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n$ ფორმების არჩევის შემდეგ (d_1) და (d_2) პირობებით, ჯერ ცალსახად განისაზღვრება (b'_1), შემდეგ ასევე (d_1) და (d_2) პირობებით ცალსახად განისაზღვრება b'_2 და ა.შ.).

ტიპი II′. ამ ტიპის განსაზღვრების მისაღებად საკმარისია II ტიპის განსაზღვრებაში (d) პირობა შევცვალოთ (d') პირობით, რომელიც (d)-დან (d_2) პირობის მოცილებით მიიღება.

ზემოთ და ქვემოთ შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებებში გამოყენებულ $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაასოებს ვუწოდებთ **განსაზღვრების დამატებით მეტაასოებს**, ხოლო მათ მნიშვნელობებს — **დამატებით ასოებს**.

შენიშვნა. (1) (b) პირობა გამარტივებულად შეიძლება ასე გამოითქვას: „თუ a არის $\mathbb{B}$ ფორმის ასო და $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, მაშინ a და a_i ასოებიდან არცერთი არ მოქმედებს მეორეზე a_i მეტაცვლადის მისი მნიშვნელობათა არიდან აღებული ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის“. (2) იგივე (b) პირობა ასეც გამოითქმის: „$\mathbb{B}$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფები დაბმულ ჯგუფებად რჩება $\mathbb{B}$-დან $\mathbb{B}'$-ზე გადასვლისას, როცა ეს უკანასკნელი $\mathbb{B}$-დან $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმით მიიღება“. იგულისხმება, რომ ყოველი $\mathbb{A}_i$ მეტაცვლადი პროპოზიციულ ან საგნობრივ ასოდ განიხილება იმის მიხედვით, $\mathbb{A}_i$-ს მნიშვნელობათა არე ფორმულების კლასია თუ ტერმების, ხოლო ყოველი b_i — მისი მნიშვნელობათა არის შესაბამისი ტიპის ასოდ. (3) თუ სრულდება (a_1) და (d') პირობები, კერძოდ, თუ სრულდება (a_1) და (d), მაშინ (b) პირობა გამარტივებულად ასე გამოითქმის: „დაბმული მათემატიკური ასოების ჯგუფები არ იცვლება (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას, შესაბამისად ნებისმიერი გაფართოებული $\mathscr{T}_a$ თეორიის მიმართ მათი მნიშვნელობათა სისტემის ჩასმისას“.

II ტიპის განსაზღვრებისგან განსხვავებით, II′ ტიპის განსაზღვრების მარცხენა ნაწილში არსებული მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემის არჩევა ცალსახად არ განსაზღვრავს მარჯვენა ნაწილის მეტაცვლადების მნიშვნელობებს: $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$ სისტემისგან მხოლოდ (d_1) პირობის შესრულებას მოვითხოვთ.

ადვილი დასანახია, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი გაფართოების მიმართ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი დასაშვები სისტემის არჩევისას I, II, II′ ტიპების განსაზღვრებებიდან თითოეულის ორივე მხარეს მიღებულ ფორმებს თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა აქვს. იგულისხმება, რომ I ტიპის ანალოგიურად, II ტიპის განსაზღვრებით $m \neq 0$ შემთხვევაში შემოიტანება სრული ან ნაწილობრივი ოპერატორული ნიშანი დაბმულობის მაჩვენებლით $(n_1, \ldots, n_\ell)$ იმის მიხედვით, $n_1, \ldots, n_\ell$ ემთხვევა თუ არა მთლიან $1, 2, \ldots, n$ მიმდევრობას.

შენიშვნა. II, II′ ტიპების განსაზღვრებებში შეიძლება (d_1) პირობის შესუსტება მისი შემდეგი (d_0) პირობით შეცვლით.

პირობა (d_0). b'_i ასოს ჩასმული შემოსვლები ფორმაში

$$\mathbb{B}' \rightleftharpoons (\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}}\, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B},$$

რომლებიც $\mathbb{B}$-ში b_i მეტაცვლადის შემოსვლებს ცვლის, ქმნის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{B}'$ ფორმის დაბმული ასოების ერთ ან რამდენიმე ჯგუფს.

(d_0) პირობის ნაცვლად (d_1) პირობის არჩევა Π' ტიპის განსაზღვრების შემთხვევაში ამცირებს მოცემული ფორმის შემოკლებული სახით ჩაწერის შესაძლებლობას. Π ტიპის შემთხვევაში კი ერთი ფორმის შემოკლებული ჩაწერის შესაძლებლობა სხვა ფორმის შემოკლებული ჩაწერის შესაძლებლობით იცვლება. ეს გარემოება არსებითი არ არის: თითქმის ყოველთვის განვიხილავთ შემოკლებული სახით მოცემულ ფორმებს და გვჭირდება მათი აღდგენის ალგორითმი, უმთავრესად იმისთვის, რომ *დავინახოთ* შემოკლებული ფორმების ნაცვლად სრული ფორმების დაწერის შესაძლებლობა. სრულად მოცემული ფორმის შემოკლებული სახით ჩაწერა გაცილებით იშვიათად გვჭირდება. (d_0) პირობის ნაცვლად (d_1)-ის არჩევა შემოკლებულ ფორმათა კლასს არ ცვლის: იგი ემთხვევა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ფორმის კლასს, იმისგან დამოუკიდებლად, Π თუ Π' ტიპის განსაზღვრებებს ვიყენებთ.

Π ტიპის განსაზღვრებათა კლასიც ბუნებრივად იყოფა სამ ქვეკლასად იმავე წესით, რომლითაც I ტიპის ქვეკლასები განისაზღვრა. მათ ელემენტებს შესაბამისად ვუწოდებთ **Π_1, Π_2 და Π_3 ტიპების განსაზღვრებებს**. ცხადია, როგორც Π, ისე Π' ტიპი I ტიპის განზოგადებაა: I ტიპის განსაზღვრება $k = 0$ შემთხვევას შეესაბამება. Π ტიპის განსაზღვრებას, რომელშიც k ნულისგან განსხვავდება, ვუწოდებთ **საკუთრივი Π ტიპის განსაზღვრებას** ან **Π_s ტიპის განსაზღვრებას**. ანალოგიურად განისაზღვრება **საკუთრივი Π_i ტიპის განსაზღვრება** და აღნიშვნა $\Pi_{i\mathsf{s}} (i = 1, 2, 3)$. ქვემოთ რომელიმე ტიპის შემოტანისას ვიგულისხმებთ, რომ ამით გემოთ განხილული წესებით განსაზღვრული შესაბამისი ქვეკლასებიც შემოვიდა. კერძოდ, ანალოგიური ქვეკლასები, ტიპები და აღნიშვნები გვექნება Π' ტიპისთვისაც.

$\widetilde{\mathscr{T}}'$ თეორიის ფორმებით ჩაწერილი $\Pi_{1\mathsf{s}}$, შესაბამისად $\Pi'_{1\mathsf{s}}$, $\Pi_{2\mathsf{s}}$, შესაბამისად $\Pi'_{2\mathsf{s}}$, $\Pi_{3\mathsf{s}}$, შესაბამისად $\Pi'_{3\mathsf{s}}$ ტიპების განსაზღვრებათა მაგალითებია:

$$t \text{ ——— } \forall \mathsf{x}(\mathsf{x} = \mathsf{x}),$$

სადაც x არის პირველი, შესაბამისად ნებისმიერი, საგნობრივი ცვლადი;

$$[\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}] \text{ ——— } \forall \mathsf{x}\,[\mathsf{x} \in \mathbb{A} \longrightarrow \mathsf{x} \in \mathbb{B}],$$

სადაც $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ნებისმიერი ტერმებია, ხოლო x — მინიმალური ინდექსის მქონე საგნობრივი ცვლადი, შესაბამისად ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადი, რომელსაც $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ტერმებში თავისუფალი შემოსვლები არ აქვს;

$$\mathsf{Coll}\,\mathsf{x}\,\mathbb{A} \text{ ——— } \exists \mathsf{y}\,\forall \mathsf{x}\,[\mathsf{x} \in \mathsf{y} \leftrightarrow \mathbb{A}],$$

სადაც Coll ამ განსაზღვრებით შემოტანილი ოპერატორული ნიშანია; „Coll“ სიმბოლოთა ჯგუფი ერთ სიმბოლოდ ითვლება. x არის ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადი, $\mathbb{A}$ — ნებისმიერი ფორმულა, ხოლო y — მინიმალური ინდექსის მქონე საგნობრივი ცვლადი, შესაბამისად ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადი, რომელსაც $\mathbb{A}$-ში თავისუფალი შემოსვლები არ აქვს.

4.3 III ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები

$\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$-ით აღვნიშნოთ თეორია, რომლის ანბანი მიიღება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ანბანიდან $\mathsf{S}^{n+1}_{\widetilde{\mathscr{T}}}$, $n = 1, 2, \ldots$, ჩანაცვლების ოპერატორების დამატებით. $\mathsf{S}^{n+1}_{\widetilde{\mathscr{T}}}$-ის ნაცვლად ხშირად გამოვიყენებთ გამარტივებულ აღნიშვნას $\widetilde{\mathsf{S}}^{n+1}$.

ტიპი III. საჭიროა (a_{S}), (b_{S}) და (c) პირობების შესრულება. (a_{S}) და (b_{S}) პირობების ფორმულირებების მისაღებად საკმარისია I ტიპის განსაზღვრების (a) და (b) პირობების ფორმულირებებში $\widetilde{\mathscr{T}}$ და $/_{\widetilde{\mathscr{T}}}$ სიმბოლოები შევცვალოთ, შესაბამისად, $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ და $/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}}$ სიმბოლოებით.

პირობა (c). ვთქვათ $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი გაფართოება, რომლის ანბანი არ შეიცავს ჩანაცვლების ოპერატორულ ნიშნებს, ხოლო α — $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის მიმართ. მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის ფორმას, რომელიც მიიღება α სისტემის ჩასმით განსაზღვრების მარცხენა ნაწილში, და $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის $\mathbb{B}^*$ ფორმას, რომელსაც აღნიშნავს $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ ფორმა, აქვს თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა. აქ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}_{a\mathsf{R}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathbb{B}$ ფორმიდან მიიღება ჩანაცვლების ყოველი ოპერატორული ნიშნის იმავე წონის პირდაპირი ჩანაცვლების ოპერატორული ნიშნით შეცვლით და შემდეგ ასე მიღებულ $\mathbb{B}_{\mathsf{R}}$ გამოსახულებაში α სისტემის ჩასმით.

აღვნიშნოთ, რომ ზემოთ მიღებული შეთანხმებების თანახმად, $/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}}$ სიმბოლო მიუთითებს $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ თეორიის სიტყვების ჩანაცვლებაზე ამავე თეორიის ფორმებში, ხოლო $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ თეორიის ფორმებში არსებული ჩანაცვლების ოპერატორები მიუთითებს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების ჩანაცვლებაზე $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმებში.

შენიშვნა. (c) პირობა პრაქტიკაში თითქმის ყოველთვის შემდეგი პირობის ეკვივალენტურია.

პირობა $(\widetilde{c})$. ვთქვათ α არის $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}$-ს მიმართ. განსაზღვრებაში α-ს ჩასმისას მარცხენა ნაწილში მიღებულ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმასა და $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმას, რომელსაც მარჯვენა ნაწილში მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ თეორიის ფორმა აღნიშნავს, თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა აქვს.

შევნიშნოთ, რომ $(a_{\mathsf{S}}) \Rightarrow (c') \wedge (\ell)$, სადაც (c') და (ℓ) შემდეგი პირობებია.

პირობა (c'). $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ თეორიის ნებისმიერი $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}a}$ გაფართოების მიმართ, განსაზღვრების მარცხენა ნაწილსა და $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმაში მიიღება $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}a}$ თეორიის ფორმები, რომლებსაც თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა აქვს.

პირობა (ℓ). ვთქვათ

$$\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n \quad \text{და} \quad \mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}''_1, \ldots, \mathbb{A}''_n$$

არის $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა დასაშვები სისტემები $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ გაფართოების მიმართ, რომლის ანბანი არ შეიცავს ჩანაცვლე-

ბის სიმბოლოებს; ამასთან, $\mathbb{A}'_i \simeq \mathbb{A}''_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ვთქვათ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}_{a\mathsf{R}}$ თეორიის ფორმები, რომლებიც $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმიდან მიიღება ჩანაცვლების ყოველი ოპერატორული ნიშნის იმავე წონის პირდაპირი ჩანაცვლების ნიშნით შეცვლით და შემდეგ ასე მიღებულ $\mathbb{B}_{\mathsf{R}}$ გამოსახულებაში აღნიშნული ორი სისტემის ჩასმით. მაშინ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}} \simeq \mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$; ამასთან, $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის ფორმები, რომლებსაც $\widetilde{\mathscr{T}}_{a\mathsf{R}}$ თეორიის $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ ფორმები აღნიშნავს, ურთიერთკონგრუენტულია.

შენიშვნა. განსახილველ შემთხვევაში $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემა დასაშვებია. (ℓ) პირობაში სიტყვა „დასაშვები“ მხოლოდ ფორმულირების მოგადობისთვის გამოიყენება.

(a_{S}) $\Rightarrow$ (c') მეტაიმპლიკაციის დამტკიცება სირთულეს არ წარმოადგენს. დავამტკიცოთ (a_{S}) $\Rightarrow$ (ℓ).

ვთქვათ

$$\mathbb{B}' \rightleftharpoons (\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}:}\, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m)\mathbb{B}.$$

$\overline{\mathbb{B}}'$-ით აღვნიშნოთ $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{R}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathbb{B}'$-დან მიიღება, თუ ყოველ $\mathbb{A}_i$ მეტაცვლადს პროპოზიციულ ან საგნობრივ ასოდ მივიჩნევთ იმის მიხედვით, მისი მნიშვნელობათა არე ფორმულების კლასია თუ ტერმების, და $\mathbb{B}'$ ფორმის ჩანაცვლების ყოველ ოპერატორულ ნიშანს იმავე წონის პირდაპირი ჩანაცვლების ნიშნით შევცვლით. მაშინ

$$\mathbb{B}'_{\mathsf{R}} \rightleftharpoons (\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n \,/_{a\mathsf{R}:}\, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\overline{\mathbb{B}}';$$
$$\mathbb{B}''_{\mathsf{R}} \rightleftharpoons (\mathbb{A}''_1, \ldots, \mathbb{A}''_n \,/_{a\mathsf{R}:}\, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\overline{\mathbb{B}}'.$$

ცხადია, რომ $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ ფორმის $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$-დან მისაღებად საკმარისია ყოველი i-სთვის $\mathbb{A}'_i$-ის თითოეული ჩასმული შემოსვლა $\mathbb{A}''_i$ ფორმით შევცვალოთ. ამიტომ 2.5 თეორემის შედეგის ძალით გვაქვს

$$\mathbb{B}'_r \simeq \mathbb{B}''_r$$

ურთიერთკონგრუენტულ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ ფორმებში ბუნებრივად განისაზღვრება $\mathbb{A}'_i$ და $\mathbb{A}''_i$ ფორმების ურთიერთშესაბამისი ჩასმული შემოსვლები: ისინი $\overline{\mathbb{B}}'$ ფორმაში $\mathbb{A}_i$ ასოს ერთსა და იმავე შემოსვლას ცვლის და მიღებული ფორმების შესაბამისი ნაწილებია ($i = 1, 2, \ldots, n$). ვთქვათ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}0}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}0}$ არის ამ ფორმების ნებისმიერი შესაბამისი ნაწილები, რომლებიც შესაბამისი ჩასმული შემოსვლების საკუთრივი ნაწილები არ არის. იმავე მეთოდით, რომლითაც საწყისი ფორმების კონგრუენტულობა დავამტკიცეთ, მტკიცდება $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}0} \simeq \mathbb{B}''_{\mathsf{R}0}$. მაშასადამე, (1) $\widetilde{\mathscr{T}}_{a\mathsf{R}}$ თეორიის ურთიერთკონგრუენტული $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ ფორმების შესაბამისი ნაწილები შეიძლება არ იყოს კონგრუენტული მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი შესაბამისი ჩასმული შემოსვლების საკუთრივი ნაწილებია. ადვილი დასანახია აგრეთვე, რომ (2) შესაბამისი ჩასმული შემოსვლები არ შეიცავს პირდაპირი ჩანაცვლების ოპერატორებს. ამიტომ საწყისი ფორმების შესაბამისი პირდაპირი ჩანაცვლების ოპერატორების შესაბამისი ნაწილები კონგრუენტულია; კონგრუენტულია მათი შესაბამისი ოპერანდებიც.

(3) ჩასმული შემოსვლების გარეთ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ ფორმები ერთმანეთს ემთხვევა.

საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ ფორმებიდან $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის ფორმების აღდგე-

ნის ალგორითმული პროცესების შესაბამისი ბიჯების ყოველი წყვილის შემდეგ მიღებული ფორმები $\widetilde{\mathscr{T}_{a\mathsf{R}}}$ თეორიის ურთიერთკონგრუენტული ფორმებია.

$\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ ფორმების შესაბამის ნაწილებს, რომლებშიც აღნიშნული პროცესების პირველი ბიჯების შესაბამისი ჩანაცვლებები სრულდება, აქვს სახე

$$\mathbb{J}' \rightleftharpoons \mathsf{R}^{k+1}\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_k\mathbb{B}'_1 \cdots \mathbb{B}'_k\mathbb{B}' \quad \text{და} \quad \mathbb{J}'' \rightleftharpoons \mathsf{R}^{k+1}\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_k\mathbb{B}''_1 \cdots \mathbb{B}''_k\mathbb{B}''.$$

ამ ჩანაცვლებებით მიღებული $\mathbb{J}'_1$ და $\mathbb{J}''_1$ ფორმები 2.1 თეორემის პირველი პუნქტის ძალით ურთიერთკონგრუენტულია. პირველი ბიჯების წყვილი სრულდება განსახილველი ნაწილების შესაბამისად $\mathbb{J}'_1$ და $\mathbb{J}''_1$ ფორმებით შეცვლით. ამასთან, ეს ნაწილები გარკვეული აზრით ერთი და იმავე ასოების მოქმედების არეშია: $\mathbb{A}'_i$ და $\mathbb{A}''_i$ ფორმების ჩასმული შემოსვლების ასოები $\mathbb{J}'_1$ და $\mathbb{J}''_1$ ნაწილებზე არ მოქმედებს. ამიტომ აღნიშნული შეცვლებით მიღებული $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}1}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}1}$ ფორმები ურთიერთკონგრუენტულია 2.2 თეორემის მეორე პუნქტის ძალით. შესაბამისი პირობების შესრულების შემოწმება სირთულეს არ წარმოადგენს.

$\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}}$ ფორმების ის ჩასმული შემოსვლები, რომლებიც $\mathbb{J}'$ და $\mathbb{J}''$ ნაწილების გარეთაა, ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}1}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}1}$ ფორმების ნაწილებს. მათ ვუწოდოთ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}1}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}1}$ ფორმების ჩასმული შემოსვლები. ბუნებრივად განისაზღვრება მათი ურთიერთშესაბამისობაც. ამასთან, $\mathbb{J}'_1$ და $\mathbb{J}''_1$ ნაწილებიც ურთიერთშესაბამის ჩასმულ შემოსვლებად მივიჩნიოთ. ადვილად მოწმდება, რომ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}1}$ და $\mathbb{B}''_{\mathsf{R}1}$ ფორმებისთვისაც სრულდება (1)–(3) პირობები. ეს საშუალებას გვაძლევს, იგივე მსჯელობა გავიმეოროთ პროცესების მეორე ბიჯების წყვილისთვის და ა.შ.

შენიშვნა. $(c') \not\Rightarrow (c)$. უფრო მეტიც, $(a_{\mathsf{S}}) \wedge (b_{\mathsf{S}}) \not\Rightarrow (c)$.

ასე, მაგალითად, თუ განსაზღვრებაში

$$\sigma\,\mathsf{x}\,\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 \text{ ——— } \forall\mathsf{x}\,\mathsf{S}\,\mathsf{x}\,\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2$$

$\mathbb{A}_2$ მეტაცვლადის მნიშვნელობად ავიღებთ ფორმას, რომელიც ცვლადებს არ შეიცავს, მაშინ მარჯვენა ნაწილში თავისუფალი ცვლადები არ გვექნება $\mathbb{A}_1$-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის. იგულისხმება, რომ x მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არე პროპოზიციული ცვლადების კლასია, ხოლო $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{A}_2$ მეტაცვლადებისა — ყველა ფორმულის კლასი.

I ტიპის განსაზღვრების შემდეგ მოყვანილი მეორე შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ I ტიპის ყოველი განსაზღვრება III ტიპის განსაზღვრებაცაა. III ტიპის განსაზღვრებას ვუწოდებთ **საკუთრივი III ტიპის განსაზღვრებას**, თუ იგი I ტიპის განსაზღვრება არ არის. ამის მაგალითია შემდეგი განსაზღვრება:

$$\exists\mathsf{X}\,\mathbb{A} \text{ ——— } (\tau\mathsf{X}\mathbb{A}/\mathsf{X})\mathbb{A}, \tag{1}$$

სადაც X ნებისმიერი კვანტორული საგნობრივი ასოა, $\mathbb{A}$ — ნებისმიერი ფორმულა, ხოლო $\tau\mathsf{X}$ — წარმოებული ან ძირითადი ლოგიკური სუბსტანციური კვანტორი. შევნიშნოთ, რომ თუ $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$ საგნობრივი ასოებია და $\mathbb{A}$ არის $\mathsf{z} = \mathsf{y}$, მაშინ (1) განსაზღვრება გვაძლევს $\exists\mathsf{x}(\mathsf{z} = \mathsf{y})$ ——— $\mathsf{z} = \mathsf{y}$.

(1) განსაზღვრებით ხშირად შემოაქვთ $\exists$ ოპერატორული ნიშანი τ ოპერატორული ნიშნის გამოყენებით.

ცხადია, (1) განსაზღვრება არც I, არც II და არც II′ ტიპისაა: მისი მარჯვენა ნაწილი არ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც X და $\mathbb{A}$ მეტაცვლადების გამოყენებითაა შედგე-

ნილი. აქ არსებითია არა თავისთავად ჩანაცვლების ნიშნის არსებობა, არამედ ის, რომ ჩანაცვლება სრულდება მეტაცვლადით აღნიშნულ ფორმაში; არსებითია აგრეთვე, რომ იგი სრულდება მეტაცვლადით აღნიშნული ასოს ნაცვლად. ამ გარემოებებიდან თითოეულიც საკმარისია აღნიშნული დასკვნისთვის. მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი ფორმა ყოველთვის შეიძლება სრულად ჩაიწეროს ისე, რომ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემის ჩასმით სრულად ჩაწერილი ფორმები მივიღოთ. ადვილი დასანახია, რომ $(\tau\mathsf{X}\mathbb{A}/\mathsf{X})\mathbb{A}$ გამოსახულების ასე ჩაწერა შეუძლებელია.

4.4 IV და IV′ ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები

ტიპი IV. საჭიროა $(a_{1\mathsf{S}})$, (b_{S}), (d_{S}) და (c_1) პირობების შესრულება. $(a_{1\mathsf{S}})$ და (d_{S}) პირობების ფორმულირებების მისაღებად საკმარისია II ტიპის განსაზღვრების (a_1) და (d) პირობების ფორმულირებებში $\widetilde{\mathscr{T}}$ და d_1 სიმბოლოები შევცვალოთ, შესაბამისად, $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ და $d_{1\mathsf{S}}$ სიმბოლოებით. (c_1) პირობა შემდეგნაირად ფორმულირდება.

პირობა (c_1). ვთქვათ $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი გაფართოება, რომლის ანბანი არ შეიცავს ჩანაცვლების ოპერატორულ ნიშნებს, ხოლო α — მეტაცვლადების

$$\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m,\ \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n,\ \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k \tag{1}$$

მნიშვნელობათა ნებისმიერი დასაშვები სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის მიმართ. მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის ფორმას, რომელიც მიიღება α სისტემის ჩასმით განსაზღვრების მარცხენა ნაწილში, და $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის $\mathbb{B}^*$ ფორმას, რომელსაც აღნიშნავს $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ ფორმა, აქვს თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა. აქ $\mathbb{B}'_{\mathsf{R}}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}_{a\mathsf{R}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმიდან მიიღება ჩანაცვლების ყოველი ოპერატორული ნიშნის იმავე წონის პირდაპირი ჩანაცვლების ოპერატორული ნიშნით შეცვლით და შემდეგ ასე მიღებულ $\mathbb{B}_{\mathsf{R}}$ გამოსახულებაში α სისტემის ჩასმით.

ტიპი IV′. ამ ტიპის განსაზღვრების მისაღებად საკმარისია IV ტიპის განსაზღვრებაში შევცვალოთ (d_{S}) პირობა (d'_{S}) პირობით, რომელიც (d_{S}) პირობიდან მიიღება (d_2) პირობის მოცილებით.

შევნიშნოთ, რომ IV და IV′ ტიპების განსაზღვრებებისთვის სრულდება (ℓ_1) პირობა. უფრო ზუსტად:

$$(a_{1\mathsf{S}}) \wedge (b_{\mathsf{S}}) \wedge [(d_{\mathsf{S}}) \vee (d'_{\mathsf{S}})] \Longrightarrow (\ell_1), \tag{2}$$

სადაც (ℓ_1) პირობა ფორმულირდება შემდეგნაირად.

პირობა (ℓ_1). ვთქვათ $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი გაფართოება, რომლის ანბანი არ შეიცავს ჩანაცვლების ოპერატორულ ნიშნებს. გარდა ამისა, ვთქვათ

$$\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k \quad \text{და} \quad \mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}''_1, \ldots, \mathbb{A}''_n, \mathsf{b}''_1, \ldots, \mathsf{b}''_k$$

არის (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ისეთი დასაშვები სისტემები $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის მი-

მართ, რომ

$$\mathbb{A}'_i \simeq \mathbb{A}''_i (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ვთქვათ $\mathbb{B}'_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}_{a\mathrm{R}}$ თეორიის ფორმები, რომლებიც $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{S}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმიდან მიიღება ჩანაცვლების ყოველი ოპერატორული ნიშნის იმავე წონის პირდაპირი ჩანაცვლების ნიშნით შეცვლით და შემდეგ ასე მიღებულ $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ გამოსახულებაში (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა აღნიშნული სისტემების ჩასმით. მაშინ $\mathbb{B}'_{\mathrm{R}} \simeq \mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$; ამასთან, $\widetilde{\mathscr{T}}_a$ თეორიის ფორმები, რომლებსაც $\widetilde{\mathscr{T}}_{a\mathrm{R}}$ თეორიის ეს ფორმები აღნიშნავს, ურთიერთკონგრუენტულია.

შენიშვნა. (ℓ_1) პირობაში IV ტიპის განსაზღვრებისთვის $\mathsf{b}''_1, \ldots, \mathsf{b}''_k$ სიმბოლოების ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$, რადგან (d) პირობა უზრუნველყოფს b''_i და b'_i ასოების დამთხვევას, $i = 1, 2, \ldots, k$. IV′ ტიპის შემთხვევაში ასეთი შეცვლით მიიღება მართებული, თუმცა უფრო სუსტი მტკიცება.

$$\mathbb{B}' \rightleftharpoons (\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{S}}:}\, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B};$$
$$\mathbb{B}'' \rightleftharpoons (\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathsf{b}''_1, \ldots, \mathsf{b}''_k \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{S}}:}\, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B}.$$

$\overline{\mathbb{B}}'$-ით, შესაბამისად $\overline{\mathbb{B}}''$-ით, აღვნიშნოთ $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{R}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathbb{B}'$-დან, შესაბამისად $\mathbb{B}''$-დან, მიიღება ჩანაცვლების ყოველი ოპერატორული ნიშნის იმავე წონის პირდაპირი ჩანაცვლების ნიშნით შეცვლით. ამასთან, ყოველი $\mathbb{A}_i$ მეტაცვლადი პროპოზიციულ ან საგნობრივ ცვლადად მივიჩნიოთ იმის მიხედვით, მისი მნიშვნელობათა არე ფორმულების კლასია თუ ტერმების. უფრო ზუსტად, $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{R}}$ თეორიის ნაცვლად უნდა განვიხილოთ თეორია, რომლის ანბანი $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{R}}$-ის ანბანიდან $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტასიმბოლოების შესაბამისი ტიპის სიმბოლოებად დამატებით მიიღება. მაშინ

$$\mathbb{B}'_{\mathrm{R}} \rightleftharpoons (\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n \,/_{a\mathrm{R}:}\, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\overline{\mathbb{B}}',$$
$$\mathbb{B}''_{\mathrm{R}} \rightleftharpoons (\mathbb{A}''_1, \ldots, \mathbb{A}''_n \,/_{a\mathrm{R}:}\, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\overline{\mathbb{B}}''.$$

ამ ფორმებთან ერთად განვიხილოთ ასევე ფორმა

$$\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}} \rightleftharpoons (\mathbb{A}''_1, \ldots, \mathbb{A}''_n \,/_{a\mathrm{R}:}\, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)\overline{\mathbb{B}}'.$$

$\mathbb{B}'_{\mathrm{R}}, \mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$ ფორმების შემადგენელ სიმბოლოთა შემოსვლების სიმრავლეებს შორის ბუნებრივად მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რადგან ფორმებს ერთი და იგივე სიგრძე აქვს. ასევე ბუნებრივად განისაზღვრება

$$\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k, \mathsf{b}''_1, \ldots, \mathsf{b}''_k$$

ასოების „ჩასმული შემოსვლები“ $\widetilde{\mathscr{T}}_{a\mathrm{R}}$ თეორიის $\mathbb{B}'_{\mathrm{R}}, \mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$ ფორმებში. $(a_{1\mathrm{S}})\wedge(b_{\mathrm{S}})\wedge(d'_{\mathrm{S}})$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k, \mathsf{b}''_1, \ldots, \mathsf{b}''_k$ ასოების ჩასმული შემოსვლები $\mathbb{B}'$, $\mathbb{B}''$, $\mathbb{B}'_{\mathrm{R}}$, $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$ ფორმებში დაბმული ასოების ჯგუფებს ქმნის. თითოეული b'_i-ს,

შესაბამისად b''_i-ს, ჩასმული შემოსვლები შეიძლება რამდენიმე დაბმულ ჯგუფს ქმნიდეს. თითოეულ ასეთ ჯგუფს ბუნებრივად შეესაბამება დანარჩენი ფორმების დაბმული ჯგუფი. კერძოდ, $\overline{\mathbb{B}}'$ ფორმის დაბმულ ჯგუფს, რომელიც b'_i-ს ჩასმული შემოსვლებისგან შედგება, შეესაბამება $\mathbb{B}'_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$ ფორმების b'_i-ს ჩასმული შემოსვლებისგან შედგენილი ჯგუფები, აგრეთვე $\overline{\mathbb{B}}''$ და $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ ფორმების b''_i-ს ჩასმული შემოსვლებისგან შედგენილი ჯგუფები.

ცხადია, b'_i ან b''_i ასოს ყოველი შემოსვლა $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ ფორმებში არის ან ამ ასოს „ჩასმული შემოსვლა“, ან რომელიმე $\mathbb{A}''_j$-ის ჩასმული შემოსვლის შიგნით მდებარე შემოსვლა. ვთქვათ

$$\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}1} = \mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}, \mathbb{B}^*_{\mathrm{R}2}, \dots, \mathbb{B}^*_{\mathrm{R}\ell} \qquad \text{და} \qquad \mathbb{B}''_{\mathrm{R}1} = \mathbb{B}''_{\mathrm{R}}, \mathbb{B}''_{\mathrm{R}2}, \dots, \mathbb{B}''_{\mathrm{R}\ell}$$

არის $\widetilde{\mathscr{T}_a}$ თეორიის ფორმების $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ ფორმებიდან აღდგენის პარალელური ალგორითმული პროცესების შესაბამისი მიმდევრობები. შეიძლება განვსაზღვროთ ნატურალური რიცხვები $n_1 = k \le n_2 \le \dots \le n_\ell$, ასოები $\mathsf{b}'_{n_1+1}, \dots, \mathsf{b}'_{n_\ell}$, შესაბამისად $\mathsf{b}''_{n_1+1}, \dots, \mathsf{b}''_{n_\ell}$, და მათი „ჩასმული შემოსვლები“ $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}i}$-ში, შესაბამისად $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}i}$-ში ($i = 1, 2, \dots, \ell$), ისე, რომ სრულდებოდეს შემდეგი პირობები: (1) $\mathsf{b}'_1, \dots, \mathsf{b}'_{n_\ell}$ ასოები, შესაბამისად $\mathsf{b}''_1, \dots, \mathsf{b}''_{n_\ell}$ ასოები, წყვილ-წყვილად განსხვავებულია; (2) ყოველი ჩასმული შემოსვლა $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}j}$-ში, შესაბამისად $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}j}$-ში, არის $\mathsf{b}'_1, \dots, \mathsf{b}'_{n_j}$, შესაბამისად $\mathsf{b}''_1, \dots, \mathsf{b}''_{n_j}$ მიმდევრობის რომელიმე ასოს შემოსვლა; (3) $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}j}$-დან $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}j}$-ის მისაღებად საკმარისია ყოველი $s \in \{1, 2, \dots, n_j\}$-სთვის b''_s ასოს თითოეული ჩასმული შემოსვლა b'_s ასოთი შევცვალოთ, რაც დაბმული ასოების ჯგუფების ერთდროულ შეცვლას იწვევს.

მართლაც, $\mathsf{b}'_1, \dots, \mathsf{b}'_k$ ასოების, შესაბამისად $\mathsf{b}''_1, \dots, \mathsf{b}''_k$ ასოების, „ჩასმული შემოსვლები“ $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}1} = \mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$, შესაბამისად $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}1} = \mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ ფორმაში გემოთ განისაზღვრა. „ჩასმული შემოსვლები“ $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}p}$, შესაბამისად $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}p}$ ფორმაში, $1 < p \le \ell$, ინდუქციით განისაზღვრება: $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}p}$, შესაბამისად $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}p}$ ფორმაში ასეთ შემოსვლებად მივიჩნევთ იმ და მხოლოდ იმ შემოსვლებს, რომლებიც ბუნებრივად შეესაბამება დაბმული ასოების ჯგუფების შესაცვლელად საჭირო ჩანაცვლებებს. ეს ჩანაცვლებები წინ უსწრებს ბოლო უშუალო ჩანაცვლებას $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R},p-1}$-დან, შესაბამისად $\mathbb{B}''_{\mathrm{R},p-1}$-დან, $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}p}$, შესაბამისად $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}p}$ ფორმაზე გადასვლისას. (d'_{S}) პირობის საფუძველზე ადვილი დასანახია, რომ ამგვარად განსაზღვრული ყველა „ჩასმული შემოსვლა“ და შესაბამისი წესით აღნიშნული ასოები აკმაყოფილებს (1)–(3) პირობებს.

მაშინ გვექნება

$$\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}p} \simeq \mathbb{B}''_{\mathrm{R}p} \qquad (p = 1, 2, \dots, \ell).$$

მაშასადამე, $\widetilde{\mathscr{T}_{a\mathrm{R}}}$ თეორიის $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ ფორმები ურთიერთკონგრუენტულია; ურთიერთკონგრუენტულია $\widetilde{\mathscr{T}_a}$ თეორიის ის ფორმებიც, რომლებსაც ისინი აღნიშნავს. კონგრუენტულობის ტრანზიტიულობის ძალით საკმარისია დავამტკიცოთ $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}} \simeq \mathbb{B}'_{\mathrm{R}}$ და $\widetilde{\mathscr{T}_a}$ თეორიის იმ ფორმების კონგრუენტულობა, რომლებსაც $\mathbb{B}^*_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}'_{\mathrm{R}}$ აღნიშნავს. ეს მტკიცდება იმავე გზით, რომლითაც გემოთ III ტიპის განსაზღვრებებისთვის (ℓ) თვისება დავამტკიცეთ: იქ ნაჩვენები იყო როგორც $\mathbb{B}'_{\mathrm{R}}$ და $\mathbb{B}''_{\mathrm{R}}$ ფორმების, ისე მათ მიერ აღნიშნული $\widetilde{\mathscr{T}_a}$ ფორმების კონგრუენტულობა.

შენიშვნა. (ℓ_1) პირობა სრულდება II და II′ ტიპების განსაზღვრებებისთვისაც. ამ II′ და II ტიპებისთვის იგი შემდეგ სახეს იღებს.

პირობა (ℓ_{10}). ვთქვათ $\widetilde{\mathscr{T}_a}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი გაფართოება, რომლის ან-

ბანი ჩანაცვლების ოპერატორულ ნიშნებს არ შეიცავს. გარდა ამისა, ვთქვათ

$$\mathsf{a}'_1, \dots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \dots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \dots, \mathsf{b}'_k \quad \text{და} \quad \mathsf{a}'_1, \dots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}''_1, \dots, \mathbb{A}''_n, \mathsf{b}''_1, \dots, \mathsf{b}''_k$$

არის მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ისეთი სისტემები

$$\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n, \mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_k \tag{3}$$

$\widetilde{\mathscr{T}_a}$ თეორიის მიმართ, რომ

$$\mathbb{A}'_i \simeq \mathbb{A}''_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}_a}$ თეორიის ფორმები, რომლებიც განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში მეტაცვლადების მნიშვნელობათა აღნიშნული სისტემების ჩასმით მიიღება, ურთიერთკონგრუენტულია.

ასევე, (ℓ) პირობა სრულდება I ტიპის განსაზღვრებისთვისაც. მისი გამარტივებული ფორმულირება (ℓ_0) მიიღება (ℓ_{10})-დან

$$\mathsf{b}'_1, \dots, \mathsf{b}'_k,\ \mathsf{b}''_1, \dots, \mathsf{b}''_k,\ \mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_k.$$

სიმბოლოების წაშლით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$(a_{1\mathrm{S}}) \Longrightarrow (c'_1) \Longrightarrow (c''_1),$$

სადაც (c'_1) და (c''_1) შემდეგი პირობებია.

პირობა (c'_1). ვთქვათ α არის (3) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი დასაშვები სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ. განსაზღვრებაში α-ს ჩასმით მარცხენა ნაწილში მიღებულ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმასა და მარჯვენა ნაწილში მიღებულ $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathrm{S}}}$ თეორიის $\mathbb{B}'$ ფორმას თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა აქვს.

პირობა (c''_1). ვთქვათ α არის (3) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი დასაშვები სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ. მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{B}^*$ ფორმის თავისუფალი კვანტორული ასოების სიმრავლე არის განსაზღვრების მარცხენა ნაწილში α სისტემის ჩასმით მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმის თავისუფალი კვანტორული ასოების სიმრავლის ქვესიმრავლე. აქ $\mathbb{B}^*$-ს აღნიშნავს $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathrm{S}}}$ თეორიის ის $\mathbb{B}'$ ფორმა, რომელიც მიიღება განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში α სისტემის ჩასმით.

ეს პირობები მნიშვნელოვანია იმ შედეგების მისაღებად, რომლებიც ეხება II′ და IV′ ტიპების განსაზღვრებებს, ანუ ისეთ განსაზღვრებებს, რომელთა მარცხენა ნაწილი მარჯვენა ნაწილს ცალსახად არ განსაზღვრავს. ამასთან, გვაქვს უფრო ძლიერი (c_1) პირობა.

4.5 V, VI, VI′, VII ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებები და კავშირები სხვადასხვა ტიპის განსაზღვრებებს შორის

4.5.1 ტიპი V

პირობა (a_2). განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი $\mathbb{B}$ არის მეტამათემატიკური გამოსახულება, რომელიც შეიცავს ზუსტად შემდეგ მეტაცვლადებს

$$\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n \tag{1}$$

და რომელიც ამ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ცალსახად განსაზღვრული ფორმის აღნიშვნად გარდაიქმნება, ან თვით $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმად[1]. ამ უკანასკნელ ფორმაში შეიძლება გვხვდებოდეს მხოლოდ ისეთი შემამოკლებელი სიმბოლოები და ძირითადი ან წარმოებული ოპერატორები, ნულადგილიანების ჩათვლით, რომლებიც $\mathbb{B}$-ში ან (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა განსახილველი სისტემის კომპონენტებში გვხვდება.

პირობა (c_2). ვთქვათ α არის (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ. განსაზღვრებაში α-ს ჩასმისას მარცხენა ნაწილში მიღებულ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმასა და $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმას, რომელსაც მარჯვენა ნაწილში მიღებული $\mathbb{B}'$ გამოსახულება აღნიშნავს, თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა აქვს.

პირობა (ℓ_2). თუ

$$\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n \quad \text{და} \quad \mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}''_1, \ldots, \mathbb{A}''_n$$

არის $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ისეთი სისტემები $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ, რომ $\mathbb{A}'_i \simeq \mathbb{A}''_i, i = 1, 2, \ldots, n$, მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმები, რომლებსაც განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში ამ სისტემების ჩასმით მიღებული გამოსახულებები აღნიშნავს, ურთიერთკონგრუენტულია.

4.5.2 ტიპი VI

პირობა (a_3). განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი $\mathbb{B}$ არის მეტამათემატიკური გამოსახულება, რომელიც შეიცავს ზუსტად შემდეგ მეტაცვლადებს:

[1] $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ეს ფორმა უნდა განვიხილოთ როგორც თავისივე აღმნიშვნელი მეტამათემატიკური გამოსახულება. ამასთან, იგულისხმება, რომ წესები, რომლებითაც განსახილველი ჩანაცვლებით მიღებული გამოსახულება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმას აღნიშნავს, შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებებზე არ არის დამოკიდებული.

$$\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k \tag{1}$$

და რომელიც ამ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ გარდაიქმნება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ცალსახად განსაზღვრული ფორმის აღნიშვნად ან თვით $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმად.[2] ამ უკანასკნელ ფორმაში შეიძლება გვხვდებოდეს მხოლოდ ის შემამოკლებელი სიმბოლოები და ძირითადი ან წარმოებული ოპერატორები, ნულადგილიანების ჩათვლით, რომლებიც $\mathbb{B}$-ში ან (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა განსახილველი სისტემის კომპონენტებში გვხვდება. გარდა ამისა, b_i არის მეტაასო, რომლის მნიშვნელობათა არე არის რომელიმე ტიპის ყველა კვანტორული ასოს კლასი ან რომელიმე ტიპის ყველა ცვლადის კლასი.

პირობა (d^*). $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაცვლადები, სხვა მეტაცვლადებისგან განსხვავებით, მნიშვნელობებს სხვა მეტაცვლადების მნიშვნელობებისგან დამოუკიდებლად არ იღებს. კერძოდ, სისტემა

$$\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$$

(1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ და დასაშვებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი ორი პირობა.

(d_1^*). $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$ ასოები განსხვავდება ერთმანეთისა და $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m$ ასოებისგან, არ არის $\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n$ ფორმების თავისუფალი ასოები და არცერთი მათგანი არ გვხვდება $\mathbb{B}$ მეტამათემატიკურ გამოსახულებაში.

(d_2). $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$ ასოების ინდექსები მინიმალურია.

პირობა (c_3). ვთქვათ α არის (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი დასაშვები სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ. მაშინ განსაზღვრებაში α სისტემის ჩასმისას მარცხენა ნაწილში მიღებულ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმას და იმავე თეორიის ფორმას, რომელსაც აღნიშნავს მარჯვენა ნაწილში მიღებული გამოსახულება, აქვს თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა.

პირობა (ℓ_3). თუ

$$\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k \quad \text{და} \quad \mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}''_1, \ldots, \mathbb{A}''_n, \mathsf{b}''_1, \ldots, \mathsf{b}''_k$$

არის (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ისეთი დასაშვები სისტემები $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ, რომ $\mathbb{A}'_i \simeq \mathbb{A}''_i, i = 1, 2, \ldots, n$, მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმები, რომლებსაც განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში აღნიშნული სისტემების ჩასმით მიღებული გამოსახულებები აღნიშნავს, ურთიერთკონგრუენტულია.

ტიპი VI′. ამ ტიპის განსაზღვრების მისაღებად საკმარისია VI ტიპის განსაზღვრებაში (d^*) პირობა შევცვალოთ ($d^{*\prime}$) პირობით, რომელიც (d^*)-დან (d_2) პირობის მოცილებით მიიღება.

შენიშვნა. (ℓ_3) პირობისთვის მართებულია იმ შენიშვნის სრული ანალოგი, რომელიც IV და IV′ ტიპების განსაზღვრებების (ℓ_1) პირობის ფორმულირების შემდეგ მოვიყვანეთ.

[2] ამ მოთხოვნის შესუსტებას იმგვარად, რომ იგი მხოლოდ (1) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა დასაშვები სისტემებისთვის სრულდებოდეს, პრაქტიკული მნიშვნელობა არ აქვს.

4.5.3 კავშირი სხვადასხვა ტიპის განსაზღვრებებს შორის

შემამოკლებელ სიმბოლოებსა და წარმოებულ ოპერატორებს შესაბამისი განსაზღვრების ტიპს მივაწერთ. მაგალითად, შეიძლება ვისაუბროთ **I ტიპის წარმოებულ ოპერატორზე**, **II ტიპის წარმოებულ კონსტანტაზე**, **I ტიპის წარმოებულ ოპერატორულ ნიშანზე** და ა.შ.

შენიშვნა. ქვემოთ მოყვანილ ზოგიერთ შედეგს V, VI და VI′ ტიპების შემამოკლებელი სიმბოლოებისთვის არ ვამტკიცებთ. მიზეზია ის, რომ V, VI და VI′ ტიპების განსაზღვრებებში $\mathbb{B}$ გამოსახულება მეტისმეტად ზოგადადაა დახასიათებული: არ არის მითითებული კონკრეტული წესები, რომლებითაც იგი მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემისთვის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმას აღნიშნავს.

იმ ფაქტს, რომ A ტიპის განსაზღვრება B ტიპის განსაზღვრების კერძო შემთხვევაა, ანუ A ტიპის განსაზღვრება B ტიპის განსაზღვრებაცაა, ჩავწერთ ასე: A → B. გამოვიყენებთ ამ აღნიშვნასთან დაკავშირებულ გამარტივებულ ჩანაწერებსაც. მაგალითად, „A → B და B → C“-ის ნაცვლად დავწერთ A → B → C.

შემოტანილ ტიპებს შორის A → B სახის დამოკიდებულებები შეიძლება შემდეგი „გრაფით“ წარმოვადგინოთ. მხედველობაში უნდა გვქონდეს ამ დამოკიდებულების ტრანზიტიულობა.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathrm{II}' & \to & \mathrm{IV}' & \to & \mathrm{VI}' \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathrm{IV} & \leftarrow & \mathrm{II} & \leftarrow & \mathrm{I} & \to & \mathrm{III} & \to & \mathrm{IV} \\ \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{VI} & & & & \mathrm{VI}' & \leftarrow & \mathrm{V} & \to & \mathrm{VI} \end{array}$$

დამტკიცება. I → II, I → II′, III → IV, III → IV′, V → VI და V → VI′ დამოკიდებულებებისთვის საკმარისია $k = 0$ შემთხვევის განხილვა. II → IV და II′ → IV′ სრულდება, რადგან II და II′ ტიპებისთვის (c_1) პირობა შესრულებულია. III → V, IV → VI და IV′ → VI′ ადვილად გამომდინარეობს შესაბამისი ტიპების განსაზღვრებებიდან.

მითითება. თუ (c) და (c_1) პირობებში $\widetilde{\mathscr{T}_a}$-დ ავიღებთ $\widetilde{\mathscr{T}}$-ს, მაშინ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემის ჩასმით $\mathbb{B}$-დან მიღებული $\mathbb{B}'$ ფორმის ჩანაცვლების ოპერატორები პირდაპირი ჩანაცვლების ოპერატორების როლს ასრულებს. ამიტომ $\mathbb{B}$-დან $\mathbb{B}_R$-ზე გადასვლა საჭირო აღარ არის; იხ. (c), (c_1), (c_2) და (c_3) პირობები. დაბოლოს, ცხადია, I → III. □

სხვადასხვა ტიპის განსაზღვრებები შემდეგი მიმდევრობით დავალაგოთ: I, II, II′, III, IV, IV′, V, VI, VI′.

გრაფიდან ჩანს, რომ კენტი რომაული რიცხვით აღნიშნული ყოველი ტიპი ამ რიგში ყოველი შემდგომი ტიპის კერძო შემთხვევაა. ამასთან, ლუწი რომაული რიცხვითა და შტრიხით აღნიშნული ყოველი ტიპი ყოველი შემდგომი ლუწი შტრიხიანი ტიპის კერძო შემთხვევაა; ანალოგიურად, ლუწი უშტრიხო ტიპი ყოველი შემდგომი ლუწი უშტრიხო ტიპის კერძო შემთხვევაა.

IV, შესაბამისად IV′ ტიპის განსაზღვრებას ვუწოდებთ **საკუთრივ IV**, შესაბამისად **საკუთრივ IV′ ტიპის განსაზღვრებას**, თუ იგი არც III ტიპისაა და არც II, შესაბამისად II′ ტიპისა. ანალოგიურად, VI, შესაბამისად VI′ ტიპის განსაზღვრებას ვუწოდებთ **საკუთრივ VI**, შესაბამისად **საკუთრივ VI′ ტიპის განსაზღვრებას**, თუ იგი არც V ტიპისაა და არც IV, შესაბამისად IV′ ტიპისა. ცხადია, II, შესაბამისად II′ ტიპის განსაზღვრება I

ტიპის არ არის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი V ტიპის არ არის. აქ „V“-ის ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ „III“.

საკუთრივ IV, შესაბამისად IV′ ტიპის განსაზღვრების მაგალითია:

$$\exists_1 \mathsf{x}\, \mathbb{A} \text{ ——— } \exists \mathsf{x}\, \mathbb{A} \wedge \forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, [\mathbb{A} \wedge (\mathsf{y}/\mathsf{x})\mathbb{A} \longrightarrow \mathsf{x} = \mathsf{y}],$$

სადაც x ნებისმიერი საგნობრივი კვანტორული ასოა, ხოლო y — მინიმალური ინდექსის მქონე ისეთი საგნობრივი კვანტორული ასო, შესაბამისად ნებისმიერი ისეთი საგნობრივი კვანტორული ასო, რომელიც x-სგან განსხვავდება და $\mathbb{A}$-ში თავისუფალი შემოსვლები არ აქვს.

შევნიშნოთ, რომ II′, შესაბამისად IV′, შესაბამისად VI′ ტიპის განსაზღვრების მარცხენა ნაწილი ცალსახად განისაზღვრება მეტაცვლადების $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ მნიშვნელობათა სისტემით $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ, ხოლო მარჯვენა ნაწილი დამატებით დამოკიდებულია $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სისტემაზე. იგულისხმება შემდეგი: პირველი სისტემის დაფიქსირებისას მარცხენა ნაწილში მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა აღნიშნავს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერ ფორმას, რომელსაც აღნიშნავს მარჯვენა ნაწილში მიღებული გამოსახულება $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მნიშვნელობათა სისტემის ცვლისას. ეს უკანასკნელი სისტემა ფიქსირებულ სისტემასთან ერთად უნდა ქმნიდეს $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა დასაშვებ სისტემას $\widetilde{\mathscr{T}}$-ს მიმართ. ამავე აზრით, II′, შესაბამისად IV′ ტიპის განსაზღვრების (d'), შესაბამისად (d'_{S}) პირობა უზრუნველყოფს, რომ მარცხენა ნაწილში მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემის ჩასმით მარჯვენა ნაწილი განისაზღვროს კონგრუენტულობის სიზუსტემდე. ეს პირობები შეიძლება შესუსტდეს, ოღონდ უკანასკნელი მოთხოვნა შენარჩუნდეს. აქ II′ ტიპის მარჯვენა ნაწილში $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმები მიიღება, ხოლო IV′ ტიპის მარჯვენა ნაწილში — $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{S}}$ თეორიის ფორმები. VI′ ტიპის განსაზღვრების (ℓ_3) პირობა უზრუნველყოფს, რომ მარცხენა ნაწილში მნიშვნელობათა სისტემის ჩასმა კონგრუენტულობის სიზუსტემდე განსაზღვრავდეს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის იმ ფორმას, რომელსაც მარჯვენა ნაწილი აღნიშნავს. IV′ ტიპისთვის იგივე დასკვნა უშუალოდ (ℓ_1) პირობიდან გამომდინარეობს, რომლის შესრულებაც ზემოთ დავამტკიცეთ. II′ ტიპისთვის ამ დასკვნის მართებულობა ცხადია და ემთხვევა ზემოთ მის შესახებ მოყვანილ მტკიცებას.

II′, IV′ და VI′ ტიპების განსაზღვრებებისგან განსხვავებით, დანარჩენ შემთხვევებში მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემის ჩასმის შემდეგ მარცხენა ნაწილში მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა ცალსახად განსაზღვრავს როგორც მარჯვენა ნაწილში მიღებულ გამოსახულებას, ისე მის მიერ აღნიშნულ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმას.

ქვემოთ მოყვანილი შედეგებისთვის მარჯვენა ნაწილის მიმართ წაყენებული ყველა მოთხოვნის შენარჩუნება საჭირო არ არის. მაგალითად, თუ სისტემის ყოველი განსაზღვრების ტიპია I, II ან II′, საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ თითოეულის მარჯვენა ნაწილი იყოს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც განსაზღვრებაში ნახსენები მეტაცვლადების გამოყენებითაა შედგენილი და მათ შეიცავს. მასში შეიძლება გვხვდებოდეს მხოლოდ აღრე შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოები. ამ მოგად მოთხოვნას აკმაყოფილებს შემდეგ აბზაცში შემოტანილი ე.წ. **VII ტიპის განსაზღვრებებიც**. თუმცა მოგიერთი შედეგის გავრცელება VII ტიპზე ვერ ხერხდება.

თუ თეორიის ანბანი შეიცავს პროპოზიციულ ცვლადებს, მაგრამ საკუთრივ პროპოზი-

ციულ კონსტანტებს არ შეიცავს, მაშინ ამ კონსტანტების შემოსატანად ზოგჯერ შემდეგ განსაზღვრებებს იყენებენ:

$$t \text{ ——— } \mathsf{p} \vee \neg \mathsf{p}; \qquad f \text{ ——— } \mathsf{p} \wedge \neg \mathsf{p},$$

სადაც p პირველი პროპოზიციული ცვლადია. ეს განსაზღვრებები ზემოთ განხილულ არცერთ ტიპს არ მიეკუთვნება. მათ ვუწოდებთ **VII ტიპის განსაზღვრებებს**. ჩვეულებრივ, VII ტიპის განსაზღვრებებს არ იყენებენ; ამიტომ, თუ პროპოზიციული აღრიცხვის მოცემული ფორმულირების ანბანი საკუთრივ პროპოზიციულ კონსტანტებს არ შეიცავს, წარმოებული პროპოზიციული კონსტანტებიც არ შემოაქვთ. ამ შემთხვევაში I ტიპის განსაზღვრებით პროპოზიციული კონსტანტების შემოტანა შეუძლებელია.[3]

ყოველი წარმოებული **ოპერატორისა და შემამოკლებელი სიმბოლოს ტიპი**, განსაზღვრების თანახმად, შესაბამისი განსაზღვრების ტიპით განისაზღვრება.

[3] უფრო მდიდარ თეორიებში I ტიპის განსაზღვრებებით საკუთრივი პროპოზიციული კონსტანტების t და f შემოტანა შეღგენილი ოპერატორების საშუალებითაც შეიძლება, მაგალითად: t ——— $\forall \mathsf{x}\,[\mathsf{x} = \mathsf{x}]$ და f ——— $\exists \mathsf{x}\,[\mathsf{x} \neq \mathsf{x}]$.

თავი 5

განსაზღვრება-სქემები და შემოკლებული ფორმები

5.1 შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და წარმოებული ოპერატორების განსაზღვრებების კერძო შემთხვევები

5.1.1 განსაზღვრება-სქემები

ხშირად განსაზღვრება-სქემის საშუალებით შემოაქვთ რამდენიმე ან უსასრულოდ ბევრი შემამოკლებელი სიმბოლო, რომლებიც ინდექსების რომელიმე სისტემაზეა დამოკიდებული. განსაზღვრება-სქემები, განსაზღვრებების მსგავსად, შეიძლება სხვადასხვა ტიპის იყოს. ინდექსების სისტემის დაფიქსირებისას ამა თუ იმ ტიპის განსაზღვრება-სქემა იმავე ტიპის განსაზღვრებად იქცევა.

შემდგომში განსაზღვრება-სქემებს გარკვეულ დამატებით მოთხოვნებს დავუქვემდებარებთ.

ზოგჯერ, სიმარტივისათვის, ტერმინ „განსაზღვრება-სქემის“ ნაცვლად გამოვიყენებთ ტერმინს „განსაზღვრება“, თუ ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს.

განსაზღვრება-სქემები (რომელთაგან ზოგიერთი, კერძო შემთხვევაში, შეიძლება განსაზღვრება იყოს) დავნომროთ Dm სახის სიტყვებით, სადაც m ნატურალური რიცხვია. ერთი და იგივე განსაზღვრება-სქემა ჩვეულებრივ სხვადასხვა თეორიაში გამოიყენება. თეორიის შეცვლა იწვევს განსაზღვრება-სქემის შინაარსის შეცვლას, მისი ფორმის შეუცვლელად. ამიტომ, სიზუსტისათვის, ზოგჯერ Dm-ში D-ს ინდექსებით დავწერთ. მაგალითად, ერთი და იგივე განსაზღვრება-სქემა აღინიშნება Dm-ით, D′m-ით ან D″m-ით იმის მიხედვით, თუ რომელი თეორია იგულისხმება: $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ თუ $\mathscr{T}''$.

სიმარტივისათვის ვივარაუდებთ, რომ ყოველი ℓ-ისათვის Dℓ განსაზღვრება-სქემის თითოეული განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში გვხვდება მხოლოდ წინა განსაზღვრება-სქემებით შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოები და ყოველი შემამოკლებელი სიმბოლო ერთადერთი განსაზღვრება-სქემით შემოიტანება. აგრეთვე ვივარაუდებთ, რომ განსაზღვრებებს შორის არ გვხვდება ე.წ. **ტრივიალური განსაზღვრება**, რომელსაც აქვს სახე

$$\sigma\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n \text{ ——— } \sigma_1\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n,$$

სადაც σ_1 არის (ძირითადი ან წარმოებული) ოპერატორი ან ოპერატორული ნიშანი იმის მიხედვით, $m = 0$ თუ $m \neq 0$.

ფორმების შემოკლებული ან გამარტივებული სახით წარმოსადგენად გამოყენებულ წესებსა და მეთოდებს უცვლელად გამოვიყენებთ მეტამათემატიკური გამოსახულებების შემოკლებული ან გამარტივებული სახით წარმოსადგენად.

განსაზღვრებას განვიხილავთ როგორც განსაზღვრება-სქემის კერძო შემთხვევას, კერძოდ, როგორც განსაზღვრება-სქემას, რომელიც მხოლოდ ერთ განსაზღვრებას იძლევა. ვივარაუდებთ, რომ $\mathscr{T}$ თეორიაში შემამოკლებელი სიმბოლოები შემოიტანება განსაზღვრება-სქემების შემდეგი სასრული ან თვლადი მიმდევრობით:

$$\mathrm{D}1,\ \mathrm{D}2,\ \ldots \tag{1}$$

(ქვემოთ მიღებული ძირითადი შედეგები ძალაში რჩება, თუ მარტივი (1) მიმდევრობის ნაცვლად ნებისმიერ ტრანსფინიტურ მიმდევრობას ავიღებთ). იგულისხმება, რომ $\mathscr{T}'$ თეორიის განსაზღვრება-სქემების $\mathrm{D}'1, \mathrm{D}'2, \ldots$ მიმდევრობის, შესაბამისად, $\mathscr{T}''$ თეორიის განსაზღვრება-სქემების $\mathrm{D}''1, \mathrm{D}''2, \ldots$ მიმდევრობის მისაღებად საკმარისია (1) მიმდევრობაში $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყოველი ფორმა შევცვალოთ $\widetilde{\mathscr{T}}'$ თეორიის, შესაბამისად, $\widetilde{\mathscr{T}}''$ თეორიის სათანადო ფორმით. ამასთან, §2.2-ში მიღებული საერთო შეთანხმებების საფუძველზე (1) შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $\mathscr{T}'$ თეორიის, შესაბამისად, $\mathscr{T}''$ თეორიის განსაზღვრება-სქემების მიმდევრობა.

5.1.2 განსაზღვრებების კერძო შემთხვევები

წარმოებული ოპერატორის ნომერი, შესაბამისად, **შემამოკლებელი სიმბოლოს ნომერი**, ვუწოდოთ შესაბამისი განსაზღვრება-სქემის ნომერს. **წარმოებული შედგენილი ოპერატორის შესაბამის განსაზღვრება-სქემაში** ვიგულისხმებთ იმ განსაზღვრება-სქემას, რომლის საშუალებითაც ამ შედგენილი ოპერატორის ოპერატორული ნიშანი შემოიტანება.

ტერმინი „შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრება“ (კერძოდ, ტერმინი „წარმოებული მარტივი ოპერატორის განსაზღვრება“) დამატებით დაზუსტებას არ საჭიროებს. გამოსახულებას

$$\sigma\,\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}_1, \tag{1}$$

რომელიც მიღებულია განსაზღვრებიდან

$$\sigma\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B} \tag{2}$$

მეტაცვლადების $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ მნიშვნელობათა $\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m$ სისტემის ჩასმით, ვუწოდოთ **შედგენილი ოპერატორის** $\sigma\,\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ **განსაზღვრება**. ამ განსაზღვრების ტიპი ბუნებრივად განისაზღვრება σ შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების ტიპით. σ შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების დამატებით მეტაასოებს აგრეთვე ვუწოდოთ $\sigma\,\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ **შედგენილი ოპერატორის დამატებითი მეტაასოები**. შემდეგ, ვთქვათ,

$\mathscr{T}_a$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ნებისმიერი გაფართოება. $\sigma\,\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ შედგენილი ოპერატორის (1) განსაზღვრების მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერ $\mathbb{A}'_1,\ldots,\mathbb{A}'_n,\mathsf{b}'_1,\ldots,\mathsf{b}'_k$ სისტემას ვუწოდოთ **დასაშვები**, შესაბამისად, **დასაშვები $\mathscr{T}_a$ თეორიის მიმართ**, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მნიშვნელობათა სისტემა

$$\mathsf{a}'_1,\ldots,\mathsf{a}'_m,\mathbb{A}'_1,\ldots,\mathbb{A}'_n,\mathsf{b}'_1,\ldots,\mathsf{b}'_k$$

რომელიც შეესაბამება (2) განსაზღვრების მეტაცვლადებს

$$\mathsf{a}_1,\ldots,\mathsf{a}_m,\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n,\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k \tag{3}$$

დასაშვებია, შესაბამისად, დასაშვებია $\mathscr{T}_a$ თეორიის მიმართ.

ადვილი დასანახია, რომ კვანტორის განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილს აქვს იმავე ტიპის მარტივი წარმოებული ოპერატორების განსაზღვრებების ზოგადი თვისებები. ამასთან, კვანტორის განსაზღვრებისათვის მნიშვნელობათა დასაშვები სისტემები, შესაბამისად, $\mathscr{T}_a$ თეორიის მიმართ დასაშვები სისტემები, შეიძლება განისაზღვროს ისევე, როგორც იმავე ტიპის მარტივი წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების შემთხვევაში.

ვთქვათ, $\mathbb{A}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა. ვიტყვით, რომ $\mathbb{A}$-ში შემავალ **წარმოებულ** σ **ოპერატორს აქვს მინიმალური მოქმედების არე**, თუ მის მოქმედების არეში წარმოებული ოპერატორი არ გვხვდება; ხოლო **მაქსიმალური მოქმედების არე** — თუ თვითონ არ შედის წარმოებული ოპერატორის მოქმედების არეში.

ვთქვათ, α არის რომელიმე ტიპის განსაზღვრება, რომლის საშუალებითაც შემოიტანება შემამოკლებელი სიმბოლო, შესაბამისად, წარმოებული ოპერატორი σ. როგორც ვიცით, ასეთ განსაზღვრებას აქვს სახე

$$\sigma\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}, \tag{4}$$

შესაბამისად

$$\sigma\,\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}_1, \tag{5}$$

სადაც $\mathbb{B}$, შესაბამისად, $\mathbb{B}_1$ არის მეტამათემატიკური გამოსახულება, რომელიც შეიცავს მეტაცვლადებს

$$\mathsf{a}_1,\ldots,\mathsf{a}_m,\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n,\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k, \tag{6}$$

შესაბამისად

$$\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n,\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k, \tag{7}$$

და მხოლოდ მათ. ამ გამოსახულებაში გვხვდება მხოლოდ ადრე შემოტანილი შემამოკლებელი სიმბოლოები; მასში მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმისას $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ, იგი იქცევა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ცალსახად განსაზღვრული ფორმის აღნიშვნად (ან $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმად). ამ უკანასკნელ ფორმაში გვხვდება მხოლოდ ის შემამოკლებელი სიმბოლოები, რომლებიც შედის $\mathbb{B}$-ში, შესაბამისად, $\mathbb{B}_1$-ში, ან მეტაცვლადების მნიშვნელობათა მითითებული სისტემის კომპონენტებში. სრულდება სხვა დამატებითი პირობებიც; კერძოდ, არ გამოირიცხება შემთხვევა, როცა m,n,k სიმბოლოებიდან

ყველას ან ზოგიერთის მნიშვნელობა ნულია, $m \neq 0 \Rightarrow n \neq 0$ პირობის დაცვით. ცხადია, (5) შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრებაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა σ კვანტორი არ არის.

α **განსაზღვრების კანონიკური კვაზიკერძო შემთხვევა** ვუწოდოთ გამოსახულებას, რომელიც მიიღება α განსაზღვრებაში მეტაცვლადების მნიშვნელობათა რომელიმე დასაშვები სისტემის ჩასმით. თუ, მაგალითად, $\mathbb{B}$ არის (6) მეტაცვლადების გამოყენებით აგებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, ჩასმა ხდება მეტაცვლადების როგორც თავისუფალი, ისე დაბმული შემოსვლების ადგილას. a მეტაცვლადის a_0 შემოსვლის დაბმულობა ნიშნავს, რომ ამ შემოსვლის ადგილას a მეტაცვლადის მნიშვნელობის ჩასმით მიღებული შემოსვლა დაბმული აღმოჩნდება. იგულისხმება, რომ მეტაცვლადების ადგილას ისმება მათი მნიშვნელობების ეგზემპლარები, ანუ $\mathscr{T}$ თეორიის სიტყვების ეგზემპლარები. ტერმინი α **განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევა** ანალოგიურად განისაზღვრება, იმ განსხვავებით, რომ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა დასაშვები სისტემის ნაცვლად ვიღებთ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ დასაშვებ სისტემას. ეს ნიშნავს, რომ იმ მეტაცვლადების მნიშვნელობებად, რომელთა მნიშვნელობათა არეები $\mathscr{T}$ თეორიის ტერმების ან ფორმულების კლასებია, დასაშვებია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის შესაბამისი ტიპის ფორმები.

ახლა ნათელია შემდეგი ტერმინების შინაარსი: **შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების კანონიკური კვაზიკერძო შემთხვევა**, შესაბამისად, **წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების კანონიკური კვაზიკერძო შემთხვევა**, აგრეთვე **შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევა**, შესაბამისად, **წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევა**.

ცხადია, α განსაზღვრების ნებისმიერი კვაზიკერძო შემთხვევის მარცხენა ნაწილი და მისი მარჯვენა ნაწილით აღნიშნული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა ერთი და იმავე ტიპის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმებია.

ცხადია, ნებისმიერი α განსაზღვრების ყოველი კვაზიკერძო შემთხვევა, შესაბამისად, კანონიკური კვაზიკერძო შემთხვევა, არის ცალსახად განსაზღვრული წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევა, შესაბამისად, კანონიკური კვაზიკერძო შემთხვევა.

თუ შემოტანილ ტერმინებს ნაწილაკ „კვაზი“-ს მოვაშორებთ, მივიღებთ ტერმინებს, რომლებიც, განსაზღვრებით, იმავე ობიექტებს აღნიშნავს, ოღონდ მათი მარჯვენა ნაწილების გამოსახულებების ნაცვლად უნდა ავიღოთ ამ გამოსახულებებით აღნიშნული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმები. ცხადია, შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და წარმოებული ოპერატორების I, II, II′ და VII ტიპის განსაზღვრებების შემთხვევაში ასე გამარტივებული ტერმინების შინაარსი შესაბამისი გაუმარტივებელი ტერმინების შინაარსს ემთხვევა. ამით განისაზღვრება ტერმინები: **შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების კერძო შემთხვევა**, შესაბამისად, **კანონიკური კერძო შემთხვევა**, და **წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების კერძო შემთხვევა**, შესაბამისად, **კანონიკური კერძო შემთხვევა**. როგორც უკვე ვიცით, განსაზღვრების ძირითად შინაარსს გამოხატავს ის და მხოლოდ ის კერძო შემთხვევები, რომლებიც ამავე დროს კანონიკური კერძო შემთხვევებია.

ვთქვათ, σ არის წარმოებული ოპერატორული ნიშანი (4) განსაზღვრებით;

$$\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$$

არის ამ განსაზღვრების (6) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა დასაშვები სისტემა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მიმართ; და ვთქვათ,

$$\mathbb{B}_1 \rightleftharpoons (\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}:}\, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m)\mathbb{B};$$
$$\mathbb{B}'_1 \rightleftharpoons (\mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}:}\, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B}_1.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$\mathbb{B}'_1 \rightleftharpoons (\mathsf{a}'_1, \ldots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \ldots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}:}\, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B},$$

$$\sigma\, \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}_1 \tag{8}$$

არის $\sigma\, \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ კვანტორის განსაზღვრება, ხოლო

$$\sigma\, \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m \mathbb{A}'_1 \cdots \mathbb{A}'_n \text{ ——— } \mathbb{B}'_1 \tag{9}$$

არის როგორც (4), ისე (8) განსაზღვრების კერძო შემთხვევა; ანუ (9) არის როგორც σ ოპერატორული ნიშნის, ისე $\sigma\, \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ კვანტორის განსაზღვრების კერძო შემთხვევა.

მომდევნო განყოფილებაში განვსაზღვრავთ ტერმინს $\mathscr{T}$ **თეორიის ფორმის შემოკლებული სახე** და ვნახავთ, რომ $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმების შემოკლებული სახეების კლასი $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ფორმის კლასს ემთხვევა. ამასთან, $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყოველი ფორმა არის $\mathscr{T}$ თეორიის რომელიმე ფორმის შემოკლებული სახე; პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვან შემთხვევებში ეს უკანასკნელი ფორმა ცალსახადაა განსაზღვრული ან, სულ მცირე, ცალსახადაა განსაზღვრული კონგრუენტულობის სიზუსტემდე. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმების შემოკლებულ სახეებს ეწოდება **შემოკლებული ფორმები**.

ახლა შემოვიტანოთ რამდენიმე ცნება.

ვთქვათ, σ არის შემამოკლებელი სიმბოლო, ხოლო σ' — შემამოკლებელი სიმბოლო, ძირითადი ოპერატორული ნიშანი, ძირითადი მარტივი ოპერატორი ან ძირითადი არაკვანტორული კონსტანტა. ვიტყვით, რომ σ **შემამოკლებელი სიმბოლო უშუალოდ დამოკიდებულია** σ' **სიმბოლოზე**, თუ σ' გვხვდება σ შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში. შემდეგ, ვიტყვით, რომ σ **შემამოკლებელი სიმბოლო დამოკიდებულია** σ' **სიმბოლოზე**, თუ $\sigma \neq \sigma'$ და არსებობს სიმბოლოების ისეთი $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2, \ldots, \sigma_n = \sigma'$ მიმდევრობა, რომლის ყოველი წევრი, უკანასკნელის გარდა, შემამოკლებელი სიმბოლოა და უშუალოდ დამოკიდებულია მომდევნო წევრზე. იმ სიმბოლოების რაოდენობა, რომლებზეც მოცემული შემამოკლებელი სიმბოლოა დამოკიდებული, სასრულია; ეს მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციით შემამოკლებელი სიმბოლოს ნომრის მიმართ. თუ σ შემამოკლებელი სიმბოლო დამოკიდებულია, შესაბამისად, უშუალოდ დამოკიდებულია σ' სიმბოლოზე, მაშინ აგრეთვე ამბობენ, რომ σ არის σ' სიმბოლოს **მომდევნო**, შესაბამისად, **უშუალო მომდევნო**, შემამოკლებელი სიმბოლო, ხოლო σ' არის σ შემამოკლებელი სიმბოლოს **წინამორბედი**, შესაბამისად, **უშუალო წინამორბედი**, სიმბოლო.

ახლა ვთქვათ, $\sigma\, \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ და $\sigma'\, \mathsf{C}_1 \cdots \mathsf{C}_\ell$ ოპერატორებია. იგულისხმება, რომ σ და

σ' წინა აბზაცში შემოტანილი სიმბოლოებია; მაშასადამე, $\sigma\,\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ წარმოებული ოპერატორია, ხოლო $\sigma'\,\mathsf{C}_1\cdots\mathsf{C}_\ell$ არის წარმოებული ოპერატორი, ძირითადი ოპერატორი ან ძირითადი არაკვანტორული კონსტანტა. ვიტყვით, რომ $\sigma\,\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ **წარმოებული ოპერატორი უშუალოდ დამოკიდებულია** $\sigma'\,\mathsf{C}_1\cdots\mathsf{C}_\ell$ **ოპერატორზე**, თუ არსებობს $\sigma\,\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების ისეთი (კანონიკური) კვაზიკერძო შემთხვევა

$$\sigma\,\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m\mathbb{A}'_1\cdots\mathbb{A}'_n \text{ ——— } \mathbb{B}'$$

რომლის მარჯვენა ნაწილში $\sigma'\,\mathsf{C}_1\cdots\mathsf{C}_\ell$ ოპერატორი გვხვდება $\mathbb{A}'_1,\ldots,\mathbb{A}'_n$ ფორმების ჩასმული შემოსვლების გარეთ. შემდეგ, ვიტყვით, რომ δ **წარმოებული ოპერატორი დამოკიდებულია** δ' **ოპერატორზე ან ძირითად არაკვანტორულ კონსტანტაზე**, თუ $\delta\neq\delta'$ და არსებობს ოპერატორების ისეთი

$$\delta_1=\delta,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_k=\delta',$$

მიმდევრობა, რომლის ყოველი წევრი, უკანასკნელის გარდა, წარმოებული ოპერატორია და უშუალოდ დამოკიდებულია მომდევნო წევრზე. თუ δ წარმოებული ოპერატორი დამოკიდებულია, შესაბამისად, უშუალოდ დამოკიდებულია δ' ოპერატორზე, მაშინ აგრეთვე ამბობენ, რომ δ წარმოებული ოპერატორი არის δ'-ის **მომდევნო**, შესაბამისად, **უშუალო მომდევნო**, ოპერატორი, ხოლო δ' არის δ წარმოებული ოპერატორის **წინამორბედი**, შესაბამისად, **უშუალო წინამორბედი**, ოპერატორი. იმ ოპერატორების რაოდენობა, რომლებზეც მოცემული წარმოებული ოპერატორია დამოკიდებული, შეიძლება უსასრულო იყოს. ეს რაოდენობა სასრულია, თუ ყოველი განსაზღვრება-სქემის ტიპი ერთერთია I, III, V, VII ტიპებიდან.

შენიშვნა. თუ δ და δ' ოპერატორები ამავე დროს სიმბოლოებიცაა, მაშინ წინა ორ აბზაცში მოცემული განსაზღვრებები ერთმანეთს არ ეწინააღმდეგება: δ შემამოკლებელი სიმბოლო დამოკიდებულია, შესაბამისად, უშუალოდ დამოკიდებულია δ' სიმბოლოზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა δ წარმოებული ოპერატორი დამოკიდებულია, შესაბამისად, უშუალოდ დამოკიდებულია δ' ოპერატორზე.

ვთქვათ, σ წარმოებული ოპერატორული ნიშანია; δ — ოპერატორული ნიშანი; $\mathsf{a}_1,\ldots,\mathsf{a}_m,\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_\ell$ — კვანტორული ასოები, ხოლო $\sigma\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m$ და $\delta\,\mathsf{b}_1\cdots\mathsf{b}_\ell$ — კვანტორები. ვიტყვით, რომ $\sigma\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m$ **წარმოებული კვანტორი დამოკიდებულია**, შესაბამისად, **უშუალოდ დამოკიდებულია** δ **ოპერატორულ ნიშანზე**, თუ $\sigma\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m$ დამოკიდებულია, შესაბამისად, უშუალოდ დამოკიდებულია δ ოპერატორული ნიშნის მქონე სულ მცირე ერთ კვანტორზე. შემდეგ, ვიტყვით, რომ σ **წარმოებული ოპერატორული ნიშანი დამოკიდებულია**, შესაბამისად, **უშუალოდ დამოკიდებულია** $\delta\,\mathsf{b}_1\cdots\mathsf{b}_\ell$ **კვანტორზე**, თუ σ ოპერატორული ნიშნის მქონე სულ მცირე ერთი კვანტორი დამოკიდებულია, შესაბამისად, უშუალოდ დამოკიდებულია $\delta\,\mathsf{b}_1\cdots\mathsf{b}_\ell$ კვანტორზე.

ფაქტობრივად, განვსაზღვრეთ შემდეგი ტერმინების შინაარსი:

შემამოკლებელი სიმბოლო დამოკიდებულია, შესაბამისად, **უშუალოდ დამოკიდებულია ოპერატორულ ნიშანზე, ოპერატორზე ან არაკვანტორულ კონსტანტაზე; წარმოებული ოპერატორი დამოკიდებულია**, შესაბამისად, **უშუალოდ დამოკიდებულია ოპერატორულ ნიშანზე, ოპერატორზე ან არაკვანტორულ კონსტანტაზე**.

ადვილი დასანახია, რომ იმ მარტივი ოპერატორების, არაკვანტორული კონსტანტებისა და ოპერატორული ნიშნების რაოდენობა, რომლებზეც მოცემული წარმოებული ოპერატორი ან წარმოებული ოპერატორული ნიშანია დამოკიდებული, სასრულია.

5.2 შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების გამოყენებები და შემოკლებული ფორმები

5.2.1 შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების გამოყენების სხვადასხვა ტიპები

ვთქვათ, $\mathbb{A}_1$ ——— $\mathbb{A}_2$ არის Dℓ განსაზღვრება-სქემიდან აღებული α განსაზღვრების კანონიკური კერძო შემთხვევა. $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}'$ და $\mathbb{A}'$ იყოს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ისეთი ფორმები, რომ $\mathbb{B}$ მიიღება $\mathbb{A}$-დან $\mathbb{A}$-ში $\mathbb{A}_2$ ფორმის რომელიმე $\mathbb{A}'_2$ შემოსვლის ადგილას $\mathbb{A}_1$-ის ჩასმით; $\mathbb{A}'$ მიიღება $\mathbb{B}$-დან $\mathbb{B}$-ში $\mathbb{A}_1$-ის განხილული ჩასმული შემოსვლის ადგილას $\mathbb{A}_2$-ის ჩასმით; $\mathbb{D}$ მიიღება $\mathbb{C}$-დან $\mathbb{C}$-ში $\mathbb{A}_1$ ფორმის რომელიმე $\mathbb{A}''_1$ შემოსვლის ადგილას $\mathbb{A}_2$-ის ჩასმით; დაბოლოს, $\mathbb{C}'$ მიიღება $\mathbb{D}$-დან $\mathbb{D}$-ში $\mathbb{A}_2$-ის განხილული ჩასმული შემოსვლის ადგილას $\mathbb{A}_1$-ის ჩასმით. შემდეგ, ვთქვათ, σ არის $\mathbb{C}$ ფორმის $\mathbb{A}''_1$ ნაწილის მთავარი ოპერატორი. ცხადია, $\mathbb{A}_1$ ——— $\mathbb{A}_2$ არის σ ოპერატორის განსაზღვრების კანონიკური კერძო შემთხვევა.

$\mathbb{A}$ ფორმის $\mathbb{B}$-ში გარდაქმნას ვუწოდოთ α **განსაზღვრების**, ან Dℓ **განსაზღვრების**, ან σ **ოპერატორის განსაზღვრების კანონიკური გამოყენება პირდაპირი მიმართულებით**. შემდეგ, $\mathbb{C}$ ფორმის $\mathbb{D}$-ში გარდაქმნას ვუწოდოთ α **განსაზღვრების**, ან Dℓ **განსაზღვრების**, ან σ **ოპერატორის განსაზღვრების კანონიკური გამოყენება უკუ მიმართულებით**. უკანასკნელ გარდაქმნას აგრეთვე ვუწოდოთ σ **ოპერატორისადმი მისი განსაზღვრების გამოყენება**; აქ იგულისხმება σ ოპერატორის შემოსვლა.

სიზუსტისათვის, პირველი გარდაქმნის შემთხვევაში ვისაუბრებთ განსაზღვრების კანონიკურ გამოყენებაზე $\mathbb{A}$-ს მიმართ, ხოლო მეორე შემთხვევაში — $\mathbb{C}$-ს მიმართ. განსაზღვრებით, ამ ორი გარდაქმნის საერთო სახელწოდება იქნება α **განსაზღვრების**, ან Dℓ **განსაზღვრების**, ან σ **ოპერატორის განსაზღვრების კანონიკური გამოყენება** ($\mathbb{A}_1$ — $\mathbb{A}_2$ კერძო შემთხვევისა). თუ ზემოთ მოცემულ წინადადებებში სიტყვას „კანონიკური“ ამოვიღებთ, მივიღებთ შემდეგი ტერმინების განსაზღვრებებს: α **განსაზღვრების**, ან Dℓ **განსაზღვრების**, ან σ **ოპერატორის განსაზღვრების გამოყენება პირდაპირი**, შესაბამისად, **უკუ მიმართულებით**. განხილულ გარდაქმნებს, მათ შორის უკანასკნელ ზოგად შემთხვევაშიც, აგრეთვე ეწოდება ამ განსაზღვრების შესაბამისი კერძო შემთხვევის გამოყენება პირდაპირი, შესაბამისად, უკუ მიმართულებით.

ანალოგიურად შემოგვაქვს α **განსაზღვრების**, ან Dℓ **განსაზღვრების**, ან σ **ოპერატორის განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევების გამოყენებების** სხვადასხვა სახის ცნებები, თუ განსაზღვრების ტიპი ერთ-ერთია I–IV, II′, IV′ და VII ტიპებიდან. ასეთი შესაძლებლობა არ გვაქვს V, VI და VI′ ტიპის განსაზღვრებებისათვის. ამასთან, α განსაზღვრების რომელიმე კვაზიკერძო შემთხვევის გამოყენებას ვუწოდოთ α **განსაზღვრების კვაზიგამოყენება** (შესაბამისი სახისა). მაგალითად, გვექნება ცნება α **განსაზღვრების კვაზიგამოყენება პირდაპირი მიმართულებით**, ანუ, რაც იგივეა, α

განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევის გამოყენება პირდაპირი მიმართულებით. ნებისმიერი სახის კვაზიგამოყენება გარკვეული სიფრთხილით უნდა შესრულდეს. ჩვეულებრივ, იგი გამოიყენება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმის აღნიშვნის მიმართ და შედეგადაც მიიღება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმის აღნიშვნა; კერძო შემთხვევაში ეს აღნიშვნები თვით $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმებიც შეიძლება იყოს. უნდა სრულდებოდეს შემდეგი მოთხოვნა: თუ α განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევის გამოყენების შემდეგ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების მითითებულ აღნიშვნებს შესაბამისი $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმებით წარმოვადგენთ, მაშინ კვაზიკერძო შემთხვევის ეს გამოყენება უნდა გადაიქცეს შესაბამისი კერძო შემთხვევის გამოყენებების მიმდევრობად, რომელიც შეიძლება ცარიელიც იყოს.

ზემოთ განხილულ სხვადასხვა სახის „განსაზღვრების კერძო შემთხვევებსა“ და „განსაზღვრების გამოყენებებს“ ვუწოდოთ, შესაბამისად, **განსაზღვრების კერძო შემთხვევები** (d_2) **პირობით** და **განსაზღვრების გამოყენებები** (d_2) **პირობით**, თუ დამატებითი მეტაასოების მნიშვნელობები აღებულია (d_2) პირობის დაცვით. (d_2) პირობასთან დაკავშირებულ ანალოგიურ ცნებებს სპეციალური განსაზღვრების გარეშე გამოვიყენებთ. როდესაც შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრებას დამატებითი მეტაასოები არ აქვს ან განსაზღვრება (d_2) პირობის შესრულებას მოითხოვს, ეს დაზუსტებული ცნებები შესაბამის ჩვეულებრივ ცნებებს ემთხვევა.

ადვილი დასანახია, რომ მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.1. *1. თუ α განსაზღვრების ტიპი ერთ-ერთია* I–VI, II′, IV′ *და* VI′ *ტიპებიდან, მაშინ α განსაზღვრების ნებისმიერი კერძო შემთხვევის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმებია, რომლებსაც თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა აქვს. ანალოგიურად, თუ α განსაზღვრების ტიპი ერთ-ერთია* I–IV, II′ *და* IV′ *ტიპებიდან, მაშინ α განსაზღვრების ნებისმიერი კვაზიკერძო შემთხვევის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{S}}$ თეორიის ფორმებია, რომლებსაც თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა აქვს.*

2. განსაზღვრებების გამოყენებებისა და კვაზიგამოყენებების შესაბამისი ჩანაცვლებები (შეცვლები) ემთხვევა შესაბამის უშუალო ჩანაცვლებებს. გამონაკლისია მხოლოდ VII *ტიპის ოპერატორების განსაზღვრებების გამოყენებები (ან, რაც იგივეა, კვაზიგამოყენებები). თუ განსაზღვრების ტიპი ერთ-ერთია* V, VI *და* VI′ *ტიპებიდან, მაშინ, ბოგადად, კვაზიგამოყენებები არ გვაქვს.*

ახლა ადვილი დასანახია, რომ თუ $\mathbb{A}_1$ ——— $\mathbb{A}_2$ არის იმ წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების კერძო შემთხვევა, რომლის ტიპი ერთ-ერთია I–VI, II′, IV′ და VI′ ტიპებიდან, ან არის იმ წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევა, რომლის ტიპი ერთ-ერთია I–IV, II′ და IV′ ტიპებიდან, მაშინ ზემოთ აღწერილის ანალოგიურად განსაზღვრული $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$, $\mathbb{C}$ და $\mathbb{C}'$ ფორმებისთვის გვაქვს

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}' \qquad \text{და} \qquad \mathbb{C} = \mathbb{C}'.$$

ეს გრაფიკული ტოლობები სრულდება მაშინაც, როცა $\mathbb{A}$ და $\mathbb{C}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathrm{S}}$ თეორიის ფორმები. აქვე აღვნიშნოთ, რომ თუ $\mathbb{A}_1$ ——— $\mathbb{A}_2$ არის VII ტიპის განსაზღვრების კერძო შემთხვევა, მაშინ როგორც $\mathbb{A}$ და $\mathbb{A}'$, ისე $\mathbb{C}$ და $\mathbb{C}'$ შეიძლება გრაფიკულად ტოლი არ იყოს.

5.2.2 $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების მიმდევრობათა სხვადასხვა ტიპები და შემოკლებული ფორმები

$\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების სასრულ ან უსასრულო $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots$ მიმდევრობას ვუწოდოთ **რეგულარული მიმდევრობა**, შესაბამისად, **კანონიკური რეგულარული მიმდევრობა**, თუ ყოველი $\mathbb{A}_i$, $i > 1$, მიიღება $\mathbb{A}_{i-1}$-დან რომელიმე სათანადოდ არჩეული $\mathrm{D}\ell$ განსაზღვრების გამოყენებით, შესაბამისად, კანონიკური გამოყენებით (და, მაშასადამე, $\mathbb{A}_{i-1}$ მიიღება $\mathbb{A}_i$-დან). ვიტყვით, რომ $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots$ არის **კანონიკური პირდაპირი ნორმალური მიმდევრობა**, შესაბამისად, **კანონიკური უკუ ნორმალური მიმდევრობა**, შესაბამისად, **პირდაპირი ნორმალური მიმდევრობა**, შესაბამისად, **უკუ ნორმალური მიმდევრობა**, თუ ყოველი $\mathbb{A}_i$, $i > 1$, მიიღება $\mathbb{A}_{i-1}$-დან რომელიმე სათანადოდ არჩეული $\mathrm{D}\ell$ განსაზღვრების კანონიკური გამოყენებით პირდაპირი მიმართულებით, შესაბამისად, კანონიკური გამოყენებით უკუ მიმართულებით, შესაბამისად, გამოყენებით პირდაპირი მიმართულებით, შესაბამისად, გამოყენებით უკუ მიმართულებით. პირდაპირი და უკუ ნორმალური მიმდევრობების საერთო სახელწოდება, განსაზღვრებით, იქნება **ნორმალური მიმდევრობა**. ანალოგიურად განისაზღვრება ტერმინი **კანონიკური ნორმალური მიმდევრობა**.

ცხადია, სასრული რეგულარული [ნორმალური] მიმდევრობის შებრუნებული მიმდევრობაც რეგულარული [ნორმალური] მიმდევრობაა. შემდეგ, სასრული პირდაპირი ნორმალური მიმდევრობის შებრუნებული მიმდევრობა უკუ ნორმალური მიმდევრობაა. აგრეთვე ცხადია, რომ თუ ნორმალური მიმდევრობის პირველი [ბოლო] წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა, მაშინ ეს მიმდევრობა პირდაპირი [უკუ] ნორმალური მიმდევრობაა. ამ დებულებების სრული ანალოგები მართებულია კანონიკური რეგულარული [ნორმალური] მიმდევრობებისთვისაც.

$\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმას ვუწოდოთ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმის **წინამორბედი ფორმა**, შესაბამისად, **კანონიკური წინამორბედი ფორმა**, თუ არსებობს შემდეგი სახის

$$\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n \eqsim \mathbb{A}.$$

უკუ ნორმალური მიმდევრობა, შესაბამისად, კანონიკური უკუ ნორმალური მიმდევრობა.

$\mathbb{A}_1$ არის $\mathbb{A}_1$ ფორმის ერთ-ერთი წინამორბედი ფორმა, შესაბამისად, ერთ-ერთი კანონიკური წინამორბედი ფორმა, და მას ეწოდება $\mathbb{A}_1$ ფორმის **არასაკუთრივი წინამორბედი ფორმა**, შესაბამისად, $\mathbb{A}_1$ ფორმის **არასაკუთრივი კანონიკური წინამორბედი ფორმა**.

შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{A}_1$ ფორმის წინამორბედი ფორმა შეიძლება არ იყოს $\mathbb{A}_1$ ფორმის კანონიკური წინამორბედი ფორმა.

შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების შემოტანის შემდეგ გავითვალისწინოთ, რომ მოცემული ფორმის ნაცვლად ერთი და იგივე შემოკლებული სახე გამოიყენება იმისგან დამოუკიდებლად, ეს ფორმა ცალკე დგას თუ უფრო რთული (გრძელი) ფორმის ნაწილია. აგრეთვე გავითვალისწინოთ, რომ განსაზღვრების ძირითად შინაარსს მისი კანონიკური კერძო შემთხვევები გამოხატავს. ამ მოსაზრებებიდან ნათელია, რომ ფორმების შემოკლებული სახეების მიღება და შემოკლებული სახეებიდან ფორმების აღდგენა განსაზღვრებების კანონიკური გამოყენებებით უნდა ხდებოდეს. ამ მოსაზრებას შეესაბამება შემდეგი განსაზღვრება.

$\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმას ეწოდება $\mathscr{T}$ **თეორიის** $\mathbb{A}$ **ფორმის შემოკლებული სახე** $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ **განსაზღვრებათა სისტემის მიმართ**, თუ არსებობს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების სასრული კანონიკური ნორმალური მიმდევრობა, რომლის კიდურა წევრებია $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$. ცხადია, $\mathbb{A}$ არის $\mathbb{A}$ ფორმის ერთ-ერთი შემოკლებული სახე. $\mathbb{A}$ ფორმის ამ შემოკლებულ სახეს ეწოდება **არასაკუთრივი**. $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმების შემოკლებულ სახეებს ეწოდება **შემოკლებული ფორმები** (**შემოკლებული ფორმულები** ან **შემოკლებული ტერმები**).

ქვემოთ მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვან შემთხვევაში ამ განსაზღვრების შინაარსი არ შეიცვლება, თუ მასში სიტყვას „კანონიკური“ ამოვიღებთ. უფრო კერძო, თუმცა კვლავ პრაქტიკულად მნიშვნელოვან შემთხვევაში განსაზღვრების შინაარსი უცვლელი დარჩება მაშინაც, თუ ფრაზას „კანონიკური ნორმალური“ სიტყვით „რეგულარული“ შევცვლით (იხ. თეორემები 7.8 და 7.9).

შემამოკლებელი სიმბოლოები ბუნებრივად გამოიყენება კვაზიფორმების შესამოკლებლად. მოცემული (ძირითადი) თეორიის **კვაზიფორმები** ეწოდება იმ თეორიის ფორმებს, რომლის ანბანიც მოცემული თეორიის ანბანიდან მიიღება ზოგიერთი დამხმარე სიმბოლოს კონსტანტებად დამატებით. ამის შესაბამისად ბუნებრივად განისაზღვრება ცნებები: **შემოკლებული კვაზიფორმა**, **შემოკლებული კვაზიტერმი**, **კვაზიფორმის შემოკლებული სახე** და ა.შ.

განსაზღვრებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმის შემოკლებული სახეები ერთი და იმავე ტიპის ფორმებია და მათი ტიპი $\mathbb{A}$ ფორმის ტიპს ემთხვევა. ქვემოთ ვნახავთ, რომ, პირიქით, $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი $\mathbb{A}_1$ ფორმა არის $\mathscr{T}$ თეორიის რომელიმე ფორმის შემოკლებული სახე. პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვან შემთხვევებში ეს უკანასკნელი ფორმა ცალსახად განისაზღვრება კონგრუენტულობის სიზუსტემდე, ხოლო არაერთ მნიშვნელოვან შემთხვევაში — ცალსახად. აქვე აღვნიშნოთ, რომ $\mathscr{T}$ თეორიის ასეთი ფორმები, მაგალითად, მომდევნო განყოფილების პირველ აბზაცში აღწერილი პროცესით განისაზღვრება.

თავი 6

შემოკლებული ფორმებიდან ფორმების აღდგენის ძირითადი პროცესები

6.1 ფორმის აღდგენის β-, β'-, γ-, γ'-პროცესები

$\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მოცემული $\mathbb{A}_1$ ფორმისათვის $\mathscr{T}$ თეორიის ისეთი $\mathbb{A}$ ფორმის პოვნა, რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{A}_1$, შესაძლებელია შემდეგი ალგორითმული პროცესით (ალგორითმით). $\mathbb{A}_1$ ფორმაში მოვძებნოთ მინიმალური მოქმედების არის მქონე ის წარმოებული σ ოპერატორი, რომელიც ყველა სხვა ასეთ ოპერატორზე მარცხნივ დგას, და მის მიმართ გამოვიყენოთ მისი განსაზღვრება (d_2) პირობით. მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_2$ ფორმა იმავე წესით გარდავქმნათ $\mathbb{A}_3$ ფორმად და ა.შ. პროცესი მთავრდება $\mathscr{T}$ თეორიის ისეთი $\mathbb{A}_n$ ფორმის მიღებით, რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{A}_1$; ამასთან, $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ კანონიკური უკუ ნორმალური მიმდევრობაა. ყოველ ასეთ პროცესს ვუწოდოთ **β-პროცესი**.

პროცესს, რომლის აღწერაც β-პროცესის აღწერიდან მიიღება ფრაზის „(d_2) პირობით“ ამოღებით, ვუწოდოთ **β'-პროცესი**. ცხადია, ყოველი β-პროცესი β'-პროცესია. ასეთი განზოგადებული β'-პროცესი შეიძლება ალგორითმული არ იყოს მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathbb{A}_1$ ფორმის შემამოკლებელ სიმბოლოებს შორის, ან იმ შემამოკლებელ სიმბოლოებს შორის, რომლებზეც $\mathbb{A}_1$ ფორმის სულ მცირე ერთი შემამოკლებელი სიმბოლოა დამოკიდებული, გვხვდება II′, IV′ ან VI′ ტიპის შემამოკლებელი სიმბოლო. წინააღმდეგ შემთხვევაში ორივე პროცესი ერთმანეთს ემთხვევა. ცხადია, ყოველი β-პროცესი და ყოველი β'-პროცესი კანონიკურ უკუ ნორმალურ მიმდევრობას იძლევა.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი β'-პროცესის (კერძოდ, β-პროცესის) ბიჯების რაოდენობა სასრულია.

ℓ-ით აღვნიშნოთ უდიდესი იმ რიცხვებს შორის, რომელთაგან თითოეული ან ნულია, ან $\mathbb{A}_1$-ში შემავალი რომელიმე წარმოებული ოპერატორის ნომერი. დავუშვათ, k არანულოვანი ნატურალური რიცხვია და დასამტკიცებელი დებულება მართებულია ყოველი ისეთი ფორმისათვის, რომლისთვისაც $\ell < k$. საკმარისია ვივარაუდოთ, რომ $\ell = k$, და ვაჩვენოთ პროცესის ბიჯების რაოდენობის სასრულობა.

პირველი ბიჯის შედეგად $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{A}_1^1$ ნაწილი გარდაიქმნება $\mathbb{A}_1^2$ ფორმად (ნა-

წილად), რითაც $\mathbb{A}_1$ გარდაიქმნება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_2$ ფორმად. $\mathbb{A}_1^1$ ნაწილს აქვს სახე $\sigma\,\mathbb{B}_1\cdots\mathbb{B}_n$, სადაც $\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_n$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმები; შემთხვევა $n=0$ არ გამოირიცხება. ამიტომ $\mathbb{A}_2$ ფორმის $\mathbb{A}_1^2$ ნაწილის ყოველი წარმოებული ოპერატორის ნომერი k-ზე ნაკლებია. ცხადია, მინიმალური მოქმედების არის მქონე ოპერატორების შესაბამისი ნაწილები წყვილ-წყვილად არ გადაიფარება. ამიტომ, თუ $\mathbb{A}_1^2$ არ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა, შემდეგ ბიჯზე $\mathbb{A}_1^2$ ნაწილში შემავალი წარმოებული ოპერატორის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენებით $\mathbb{A}_1^2$ გარდაიქმნება $\mathbb{A}_1^3$ ფორმად, ხოლო $\mathbb{A}_2$ — $\mathbb{A}_3$ ფორმად, და ა.შ. ინდუქციური დაშვების თანახმად, ეს პროცესი, რომელიც მთელი პროცესის ნაწილია, მთავრდება $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{A}_1^1$ ნაწილის გარდაქმნით $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{A}_1^s$ ფორმად; ამით $\mathbb{A}_1$ გარდაიქმნება $\mathbb{A}_s$ ფორმად. $\mathbb{A}_s$-ს იგივე წარმოებული ოპერატორები აქვს, რაც $\mathbb{A}_1$-ს, გარდა σ ოპერატორისა. აქ იგულისხმება ოპერატორების შემოსვლები: არსებობს ბუნებრივი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $\mathbb{A}_s$ ფორმის წარმოებულ ოპერატორებსა და $\mathbb{A}_1$ ფორმის σ-საგან განსხვავებულ წარმოებულ ოპერატორებს შორის, და შესაბამისი ოპერატორები გაიგივებულია. ახლა მთელი პროცესის ბიჯების რაოდენობის სასრულობა ცხადია.

ადვილი დასანახია, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესისა და ნებისმიერი β'-პროცესის ბიჯების რაოდენობა ერთნაირია.

განვიხილოთ β-პროცესზე, შესაბამისად, β'-პროცესზე უფრო ზოგადი პროცესი: **γ-პროცესი**, შესაბამისად, **γ'-პროცესი**. იგი β-პროცესისაგან, შესაბამისად, β'-პროცესისაგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ ყოველ ბიჯზე მინიმალური მოქმედების არის მქონე წარმოებული ოპერატორი ნებისმიერად აირჩევა. ცხადია, ეს განზოგადებული პროცესებიც კანონიკურ უკუ ნორმალურ მიმდევრობებს იძლევა. ქვემოთ მოყვანილი თეორემიდან ჩანს, რომ ეს პროცესები დასრულებადია. მაშასადამე, $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული ეს პროცესები იძლევა $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებს, რომელთა შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{A}_1$. $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული γ-პროცესები და γ'-პროცესები, ისევე როგორც β'-პროცესები, ზოგადად, $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების $\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_n$ მიმდევრობას არაცალსახად განსაზღვრავს, ხოლო β-პროცესი შესაბამის მიმდევრობას ცალსახად განსაზღვრავს.

ცხადია, γ'-პროცესით განსაზღვრული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების მიმდევრობაც კანონიკური უკუ ნორმალური მიმდევრობაა. ამ გზით მიიღება ნებისმიერი კანონიკური უკუ ნორმალური მიმდევრობა, რომლის პირველი წევრია $\mathbb{A}_1$, ხოლო ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა. შესაძლებელია იმის ჩვენება, რომ ნებისმიერი γ'-პროცესი დასრულებადია და, მაშასადამე, ამ გზით მხოლოდ მითითებული სახის მიმდევრობები მიიღება. გარდა ამისა, ადვილი დასანახია, რომ თუ ამ პროცესში ყოველი ოპერატორის ტიპი, რომლის მიმართაც მისი განსაზღვრება გამოიყენება, ერთ-ერთია I–VII ტიპებიდან, მაშინ $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმა, რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{A}_1$, ცალსახად განისაზღვრება. აქ უნდა გავითვალისწინოთ $(—\,//\,—)$ შეცვლის სიმბოლოს მნიშვნელობის განსაზღვრება, განსაკუთრებით მაშინ, როცა იმ წარმოებულ ოპერატორებს შორის, რომელთა მიმართაც მათი განსაზღვრებები გამოიყენება, VII ტიპის ოპერატორები გვხვდება. ეს შედეგი ძალაში რჩება მაშინაც, როცა I–V ტიპის განსაზღვრებებში ზოგიერთი მოთხოვნა მნიშვნელოვნად სუსტდება. მაგალითად, I და II ტიპის განსაზღვრებებში ფრაზა „კვანტორული ასო“ შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „ცვლადი“. ანალოგიური შენიშვნა ქვემოთ მოყვანილი ზოგიერთი თეორემისთვისაც მართებულია.

6.2 β-, β'-, γ-, γ'-პროცესების ძირითადი თვისებები

მომდევნო თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ განხილულ γ'-პროცესში ყოველი წარმოებული ოპერატორის ტიპი, რომლის მიმართაც მისი განსაზღვრება გამოიყენება, ერთ-ერთია I–IV, II′, IV′ და VII ტიპებიდან, მაშინ $\mathbb{A}$ ფორმა, რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{A}_1$, ცალსახად განისაზღვრება კონგრუენტულობის სიზუსტემდე. ეს ნიშნავს, რომ სხვადასხვა γ'-პროცესით მიღებული $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმები ურთიერთკონგრუენტულია.

თეორემა 6.1. *1. $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული ნებისმიერი γ-პროცესი დასრულებადია და მისი ბიჯების რაოდენობა იგივეა, რაც $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესის ბიჯების რაოდენობა. ამასთან, $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული სხვადასხვა γ-პროცესის დასრულებისას მიღებული ფორმები ერთი და იგივე ფორმაა. მაშასადამე, ეს ერთადერთი ფორმა ემთხვევა $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესის დასრულების შედეგად მიღებულ ფორმას.*

2. თუ ყოველი განსაზღვრება-სქემის ტიპი ერთ-ერთია I–IV, II′ და IV′ ტიპებიდან, მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული ნებისმიერი γ'-პროცესი დასრულებადია და მისი ბიჯების რაოდენობა იგივეა, რაც $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესის ბიჯების რაოდენობა. ამასთან, $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული სხვადასხვა γ'-პროცესის დასრულებისას მიღებული ფორმები $\mathscr{T}$ თეორიის ურთიერთკონგრუენტული ფორმებია.

დამტკიცება. 1. ვთქვათ $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესის შესაბამისი ფორმების მიმდევრობა. ვთქვათ γ^* არის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული ისეთი γ-პროცესი, რომლის პირველი ბიჯის შემდეგ დარჩენილი ბიჯების მიმდევრობა არის γ^* პროცესის პირველი ბიჯით მიღებულ $\mathbb{A}'_2$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესის ბიჯების მიმდევრობა. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ γ^* პროცესის ბიჯების რაოდენობაა p და ამ პროცესის შესაბამისი $\mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}_1, \mathbb{A}'_2, \dots, \mathbb{A}'_m$ მიმდევრობის ბოლო წევრია $\mathbb{A}_p$.

ვთქვათ, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ არის $\mathbb{A}_1$ ფორმის მინიმალური მოქმედების არის მქონე წარმოებული ოპერატორების სრული გადათვლა, დალაგებული $\mathbb{A}_1$-ში მათი შემოსვლების რიგით; იგულისხმება ოპერატორების შემოსვლების გადათვლა. $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_n$ იყოს ამ ოპერატორების შესაბამისი $\mathbb{A}_1$ ფორმის ნაწილები. ეს ნაწილები წყვილ-წყვილად არ გადაიფარება. არსებობს ისეთი $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, რომ γ^*-პროცესის პირველ ბიჯს σ_i ოპერატორი შეესაბამება. შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $i > 1$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში γ^*-პროცესი β-პროცესია. γ^*-პროცესის პირველი ბიჯის შედეგად $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_i$ ნაწილი გარდაიქმნება $\mathbb{B}^*_i$ ფორმად (ნაწილად), რითაც $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}'_1$ გარდაიქმნება $\mathbb{A}'_2$ ფორმად. გავაიგივოთ $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_i$ ნაწილი $\mathbb{A}'_2$ ფორმის $\mathbb{B}^*_i$ ნაწილთან. ამით $\mathbb{A}'_2$ ბუნებრივად გაიგივდება $\mathbb{A}_1$-თან: მითითებული $\mathbb{B}_i$ და $\mathbb{B}^*_i$ ნაწილების გარეთ $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{A}'_2$ ერთმანეთს ემთხვევა. ამ გაიგივების შედეგად განხილული β-პროცესის ის საწყისი ბიჯები, რომლებიც წინ უსწრებს σ_i ოპერატორის შესაბამის ბიჯს, ემთხვევა γ^*-პროცესის პირველი ბიჯის მომდევნო საწყის ბიჯებს. ეს ბიჯები ქვემოთ აღწერილია $(1), (2), \dots, (i-1)$ პუნქტებში.

ვთქვათ, $\sigma'_1, \dots, \sigma'_{i-1}$ არის $\mathbb{A}_1$ ფორმის (და, მაშასადამე, $\mathbb{A}'_2$ ფორმის) წარმოებული ოპერატორების მიმდევრობა, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი პირობით:

ყოველი $k \in \{1, 2, \dots, i-1\}$-სთვის σ'_k არის მაქსიმალური მოქმედების არის მქონე წარმოებული ოპერატორი, რომლის მოქმედების არეში შედის $\mathbb{B}_k$ და არ შედის $\mathbb{B}_{k+1}, \dots, \mathbb{B}_n$ ნაწილებიდან არცერთი. $\mathbb{A}'_2$ ფორმის შემთხვევაში $\mathbb{B}_{k+1}, \dots, \mathbb{B}_n$ მიმდევრობაში უნდა ვიგულისხმოთ $\mathbb{B}_{k+1}, \dots, \mathbb{B}_{i-1}, \mathbb{B}^*_i, \mathbb{B}_{i+1}, \dots, \mathbb{B}_n$ მიმდევრობა. თუ ასეთი წარმოებული ოპერატორი არ არსებობს, მაშინ σ'_k არის σ_k. ცხადია, σ'_k ოპერატორის მოქმედების არეში არ შედის ოპერატორები

$$\sigma'_{k+1}, \dots, \sigma'_{i-1}, \qquad k \in \{1, 2, \dots, i-2\},$$

(1) ბიჯები, რომლებიც ბუნებრივად გაიგივებული $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{A}'_2$ ფორმების „საერთო“ $\mathbb{B}'_1$ ნაწილს, რომლის მთავარი ოპერატორია σ'_1, ერთნაირად გარდაქმნის $\mathscr{T}$ თეორიის ერთსა და იმავე $\mathbb{B}'_{11}$ ფორმად (ნაწილად). შედეგად მიიღება ბუნებრივად გაიგივებული $\mathbb{A}_{j_1}$ და $\mathbb{A}'_{j_1+1}$ ფორმები. აქაც და ქვემოთაც ფორმების „ბუნებრივი გაიგივება“ ემყარება ზემოთ მიღებულ შეთანხმებას $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{A}'_2$ ფორმების $\mathbb{B}_i$ და $\mathbb{B}^*_i$ ნაწილების გაიგივების შესახებ. ურთიერთგაიგივებული $\mathbb{A}_{j_1}$ და $\mathbb{A}'_{j_1+1}$ ფორმების იმ ოპერატორებს, რომლებიც ბუნებრივად შეესაბამება $\sigma'_2, \dots, \sigma'_{i-1}$ ოპერატორებს, კვლავ $\sigma'_2, \dots, \sigma'_{i-1}$ სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. ქვემოთ ანალოგიურ აღნიშვნებს შესაბამისი შეთანხმებების საგანგებო შემოტანის გარეშე გამოვიყენებთ.

(2) თუ $i > 2$, შემდეგი ბიჯები ბუნებრივად გაიგივებული $\mathbb{A}_{j_1}$ და $\mathbb{A}'_{j_1+1}$ ფორმების „საერთო“ $\mathbb{B}'_2$ ნაწილს, რომლის მთავარი ოპერატორია σ'_2, ერთნაირად გარდაქმნის $\mathscr{T}$ თეორიის ერთსა და იმავე $\mathbb{B}'_{21}$ ფორმად (ნაწილად). შედეგად მიიღება ბუნებრივად გაიგივებული $\mathbb{A}_{j_2}$ და $\mathbb{A}'_{j_2+1}$ ფორმები.

შემდეგ გვექნება (2) პუნქტის სრულიად ანალოგიური პუნქტები; ბოლო ასეთი პუნქტის ნომერი იქნება $(i-1)$, ხოლო მასში აღწერილი ბიჯების შედეგად მიიღება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ბუნებრივად გაიგივებული $\mathbb{A}_{j_{i-1}}$ და $\mathbb{A}'_{j_{i-1}+1}$ ფორმები.

ახლა ადვილი დასანახია, რომ განსახილველი β-პროცესის მომდევნო ბიჯი $\mathbb{A}_{j_{i-1}}$ ფორმის $\mathbb{B}_{i1}$ ნაწილს, რომელიც ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_i$ ნაწილს, გარდაქმნის $\mathbb{B}^*_i$ ფორმად და ამით $\mathbb{A}_{j_{i-1}}$ გარდაიქმნება $\mathbb{A}_{j_{i-1}+1}$ ფორმად, ანუ

$$\mathbb{A}_{j_{i-1}+1} = \mathbb{A}'_{j_{i-1}+1}.$$

მაშასადამე, რადგან β-პროცესი ცალსახად არის განსაზღვრული, გვაქვს $m = p$ და $\mathbb{A}'_m = \mathbb{A}_p$.

ახლა განვიხილოთ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული ნებისმიერი γ-პროცესი და აღვნიშნოთ იგი γ_1-ით. დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს, რომ γ_1 პროცესის პირველი ბიჯით მიღებულ $\mathbb{A}''_2$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესის ბიჯების რაოდენობაა $p-1$, მეორე ბიჯით მიღებულ $\mathbb{A}''_3$ ფორმასთან დაკავშირებულისა — $p-2$, და ა.შ. დაბოლოს, γ_1 პროცესის $(p-1)$-ე ბიჯით მიღებულ $\mathbb{A}''_p$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესის ბიჯების რაოდენობაა 1; ეს არის ნულოვანი ბიჯი, რომლის შედეგადაც თვით $\mathbb{A}''_p$ მიიღება. მაშასადამე, $\mathbb{A}''_p$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა, ანუ $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული ნებისმიერი γ-პროცესის ბიჯების რაოდენობაა p. დამტკიცებულიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{A}''_i$ და $\mathbb{A}''_{i+1}$ ფორმებთან დაკავშირებული β-პროცესები $\mathscr{T}$ თეორიის ერთსა და იმავე ფორმას იძლევა. აქედან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული β-პროცესი $\mathbb{A}''_p$ ფორმას იძლევა. ამრიგად, $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული ნებისმიერი γ-პროცესი

იმავე ფორმას იძლევა, რასაც β-პროცესი.

2. γ'_0-ით აღვნიშნოთ რომელიმე კონკრეტული γ'-პროცესი, ხოლო γ_0-ით — მისი შესაბამისი γ-პროცესი, რომელიც ინდუქციით შემდეგნაირად განისაზღვრება.

   ვთქვათ, $\mathbb{A}'_1, \dots, \mathbb{A}'_\ell$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების მიმდევრობა, რომელიც γ'_0 პროცესს შეესაბამება, თუ ეს მიმდევრობა სასრულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\mathbb{A}'_1, \dots, \mathbb{A}'_\ell$ იყოს γ'_0 პროცესის შესაბამისი მიმდევრობის საწყისი მონაკვეთი და $\ell = p$. შემდეგ, ვთქვათ, k ნატურალური რიცხვია, $k < \min(\ell; p)$, და ყოველი $i < k$ ნატურალური რიცხვისათვის γ_0 პროცესის i-ური ბიჯი ცალსახადაა განსაზღვრული; ამ ბიჯით მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_{i+1}$ ფორმა კი $\mathbb{A}'_{i+1}$ ფორმის კონგრუენტულია. $k = 1$-ისათვის ეს პირობა ტრივიალურად სრულდება. მაშინ, განსაზღვრებით, γ_0 პროცესის k-ური ბიჯი არის $\sigma\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ წარმოებული ოპერატორის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენება. აქ $\sigma\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ არის $\mathbb{A}_k$ ფორმის ის ოპერატორი, რომელიც ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{A}'_k$ ფორმის იმ $\sigma'\,\mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ ოპერატორს, რომლის მიმართაც γ'_0 პროცესის k-ურ ბიჯზე მისი განსაზღვრება გამოიყენება. იგულისხმება ამ ოპერატორების შემოსვლები; თვით ოპერატორები შეიძლება ერთმანეთისაგან არ განსხვავდებოდეს. ინდუქციური განსაზღვრების კორექტულობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ თეორემა 7.4-ის თანახმად, γ'_0 და γ_0 პროცესების მითითებული k ბიჯით მიღებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმები ურთიერთკონგრუენტულია. ახლა ადვილი დასანახია, რომ $\ell = p$, $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ არის γ_0 პროცესის შესაბამისი $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების მიმდევრობა და $\mathbb{A}_p \simeq \mathbb{A}'_p$. რჩება კონგრუენტულობის ტრანზიტიულობის გამოყენება; თეორემის პირველი ნაწილის თანახმად, $\mathbb{A}_p$ ცალსახად განისაზღვრება.

□

ბოლოს დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6.2. *ნებისმიერი γ'-პროცესი დასრულებადია.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\mathbb{A}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი ფორმა, რომელიც შეიცავს წარმოებულ ოპერატორს, ხოლო ℓ — $\mathbb{A}$-ში შემავალი წარმოებული ოპერატორების ნომრების მაქსიმუმი. ნატურალურ n რიცხვს ვუწოდოთ „$\mathbb{A}$ ფორმის შესაბამისი რიცხვი“, თუ არსებობს $\mathbb{A}$ ფორმის ერთმანეთის არაგადამფარავი ნაწილების არაცარიელი $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_m$ მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(1) ყოველი $i \in \{1, 2, \dots, m\}$-სთვის $\mathbb{B}_i$ შეიცავს წარმოებულ ოპერატორს; ამ ნაწილის მთავარი ოპერატორისგან განსხვავებული ყოველი წარმოებული ოპერატორის ნომერი ნაკლებია ℓ-ზე;

(2) $\mathbb{A}$ ფორმის არცერთი ნაწილი, რომელიც $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_m$ ნაწილების გარეთაა, არ შეიცავს წარმოებულ ოპერატორს;

(3) $n = m + n_1$, სადაც n_1 არის $\mathbb{A}$ ფორმის იმ წარმოებული ოპერატორების რაოდენობა, რომლებიც $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_m$ ნაწილების გარეთაა.

ყოველ ფორმას, რომელიც წარმოებულ ოპერატორს შეიცავს, აქვს სულ მცირე ერთი შესაბამისი რიცხვი.

საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ წარმოებული ოპერატორების შემცველი ფორმებისათვის.

თეორემის მართებულობა $\mathbb{A}$ ფორმისათვის ცხადია, როცა შესაბამისი ℓ არის 1. ამ შემთხვევაში γ'-პროცესის ნულოვანი ბიჯის მომდევნო ბიჯების რაოდენობა ემთხვევა $\mathbb{A}$ ფორმაში შემავალი წარმოებული ოპერატორების რაოდენობას.

დავუშვათ, რომ: (a) $k > 1$ და თეორემა მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ისეთი $\mathbb{A}$ ფორმისათვის, რომლის შესაბამისი ℓ ნაკლებია k-ზე.

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ: (a_1) თეორემა მართებულია ყველა ისეთი $\mathbb{A}$ ფორმისათვის, რომლის შესაბამისი ℓ არის k.

ადვილი დასანახია, რომ (a_1) დებულება მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ისეთი $\mathbb{A}$ ფორმისათვის, რომლის შესაბამისი ℓ არის k და რომლისთვისაც 1 შესაბამისი რიცხვია.

დავუშვათ, რომ: (b) $p > 1$ და (a_1) დებულება მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ისეთი $\mathbb{A}$ ფორმისათვის, რომლის შესაბამისი ℓ არის k და რომელსაც აქვს სულ მცირე ერთი p-ზე ნაკლები შესაბამისი რიცხვი.

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ: (b_1) (a_1) დებულება მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ისეთი $\mathbb{A}$ ფორმისათვის, რომლის შესაბამისი ℓ არის k და რომლისთვისაც p შესაბამისი რიცხვია.

ვთქვათ, $\mathbb{A}_1$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ისეთი ფორმა, რომლის შესაბამისი ℓ არის k და რომლისთვისაც p არის $\mathbb{A}_1$ ფორმის შესაბამისი რიცხვი.

საკმარისია დავამტკიცოთ თეორემის მართებულობა $\mathbb{A}_1$ ფორმისათვის.

არსებობს $\mathbb{A}_1$ ფორმის ნაწილების $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_m$ მიმდევრობა საჭირო თვისებებით. ვთქვათ, γ'_1 არის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული რომელიმე γ'-პროცესი. γ'_1 პროცესის საწყის ბიჯებზე გარდაქმნები ხდება $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_m$ ნაწილებში მანამ, სანამ ერთ-ერთი მათგანი (ვთქვათ, $\mathbb{B}_i$) $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმად არ გადაიქცევა. ამ ნაწილებისათვის თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს (a) დაშვებიდან და იქიდან, რომ ℓ ნომრის მქონე წარმოებული ოპერატორები მათში მხოლოდ მთავარი ოპერატორები შეიძლება იყოს. ამ ბიჯების შედეგად $\mathbb{A}_1$ გარდაიქმნება $\mathbb{A}_2$ ფორმად, ხოლო $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_m$ ნაწილები — $\mathbb{A}_2$ ფორმის $\mathbb{B}_{12}, \ldots, \mathbb{B}_{m2}$ ნაწილებად. $\mathbb{B}_{i2}$ ნაწილი ან შედის $\mathbb{A}_2$ ფორმის რომელიმე წარმოებული ოპერატორის მოქმედების არეში, ან არ შედის. პირველ შემთხვევაში $\mathbb{B}'_{i2}$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}_2$ ფორმის ის მინიმალური ნაწილი, რომელიც შეიცავს $\mathbb{B}_{i2}$ ნაწილს და რომლის მთავარი ოპერატორი წარმოებულია. მაშინ

$$\mathbb{B}_{12}, \ldots, \mathbb{B}_{i-1,2}, \mathbb{B}'_{i2}, \mathbb{B}_{i+1,2}, \ldots, \mathbb{B}_{m2} \tag{1}$$

იქნება $\mathbb{A}_2$ ფორმის ერთმანეთის არაგადამფარავი ნაწილების არაცარიელი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $(1')$ (1) მიმდევრობიდან აღებული $\mathbb{A}_2$ ფორმის ნებისმიერი $\mathbb{B}$ ნაწილი შეიცავს წარმოებულ ოპერატორს, ხოლო ამ ნაწილის მთავარი ოპერატორისაგან განსხვავებული ყოველი წარმოებული ოპერატორის ნომერი ნაკლებია ℓ-ზე; $(2')$ არ არსებობს (1) ნაწილების გარეთ მდებარე $\mathbb{A}_2$ ფორმის ნაწილი, რომელიც წარმოებულ ოპერატორს შეიცავს. მეორე შემთხვევაში იმავე თვისებებს ფლობს მიმდევრობა

$$\mathbb{B}_{12}, \ldots, \mathbb{B}_{i-1,2}, \mathbb{B}_{i+1,2}, \ldots, \mathbb{B}_{m2}$$

(ამ შემთხვევაში, რადგან $p > 1$, გვაქვს $m > 1$). მაშასადამე, ორივე შემთხვევაში ან $\mathbb{A}_2$ ფორმის შესაბამისი ℓ ნაკლებია k-ზე, ან ℓ ტოლია k-სი და $p - 1$ არის $\mathbb{A}_2$ ფორმის

შესაბამისი რიცხვი. ამიტომ (a) და (b) დაშვებების თანახმად, თეორემა მართებულია $\mathbb{A}_2$ ფორმისათვის და, მაშასადამე, $\mathbb{A}_1$ ფორმისთვისაც.

□

თავი 7

შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და შემოკლებული ფორმების ძირითადი თვისებები. შემოკლებული ფორმებიდან ფორმების აღდგენის α- და α^*-პროცესები

7.1 შემამოკლებელი სიმბოლოებისა და შემოკლებული ფორმების ძირითადი თვისებები

თეორემა 7.1. *ვთქვათ $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ურთიერთკონგრუენტული ფორმები, ხოლო $\sigma'\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ და $\sigma''\mathsf{a}''_1\cdots\mathsf{a}''_m$ მათი ურთიერთშესაბამისი წარმოებული ოპერატორებია ($m=0$ შემთხვევა გამორიცხული არ არის). შემდეგ, ვთქვათ შემამოკლებელი σ' სიმბოლოს ტიპი და, მაშასადამე, შემამოკლებელი σ'' სიმბოლოს ტიპიც ერთ-ერთია* I–IV, II′ *და* IV′ *ტიპებიდან, ხოლო $\mathbb{A}'_0$ და $\mathbb{B}'_0$ არის $\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის ფორმები, რომლებიც მიიღება $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმებიდან $\sigma'\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ და $\sigma''\mathsf{a}''_1\cdots\mathsf{a}''_m$ ოპერატორებზე მათი განსაზღვრებების კვაზიგამოყენებებით. მაშინ $\mathbb{A}'_0\simeq\mathbb{B}'_0$.*

თეორემა 7.2. *ვთქვათ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის ურთიერთკონგრუენტული ფორმები, ხოლო*

$$\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_m\mathbb{A}_1\cdots\mathbb{A}_m\mathbb{A}_0 \qquad \text{და} \qquad \widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{b}_1\cdots\mathsf{b}_m\mathbb{B}_1\cdots\mathbb{B}_m\mathbb{B}_0$$

მათი ურთიერთშესაბამისი ნაწილებია, რომელთა მთავარი ოპერატორები მოქმედების მინიმალური არეების მქონე ჩანაცვლების $(m+1)$-ადგილიანი ოპერატორებია; ანუ თითოეული ამ ოპერატორის მოქმედების არეში ჩანაცვლების ოპერატორი არ გვხვდება. შემდეგ, ვთქვათ $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ არის $\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის ფორმები, რომლებიც მიიღება $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმებიდან მითითებული ნაწილების შეცვლით $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის იმ ფორმებით, რომლებიც ამ ნაწილების მთავარი ოპერატორების შესაბამისი ჩანაცვლებების შედეგებია. მაშინ $\mathbb{A}'\simeq\mathbb{B}'$.

შენიშვნა. წინა თეორემაში ჩანაცვლების ოპერატორების მოქმედების არეების მინიმალურობის მოთხოვნა არსებითი არ არის. ეს თვით თეორემის მარტივი შედეგია. ასეთი მო-

გადი ფორმულირებისას მითითებული ნაწილები უნდა შეიცვალოს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის იმ ფორმებით, რომლებიც მათი მთავარი ოპერატორების შესაბამისი ჩანაცვლებების შედეგებია. ეს მოითხოვს, რომ $\mathbb{A}_0$ ფორმით, შესაბამისად, $\mathbb{B}_0$ ფორმით აღნიშნულ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმაში ჩაისვას $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ის ფორმები, რომლებიც $\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m$, შესაბამისად, $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_m$ ფორმებით აღინიშნება. ეს მიიღწევა პროცესით, რომლის ყოველი ბიჯი მინიმალური მოქმედების არის მქონე ჩანაცვლების ოპერატორის მიხედვით ჩანაცვლებაა. საკმარისია, ბიჯების ყოველი წყვილი შესაბამისი ჩანაცვლების ოპერატორების მიხედვით შესრულებული ჩანაცვლებებისაგან შედგებოდეს და ამ ჩანაცვლებების მიმართ თეორემა გამოვიყენოთ. აღნიშნულ ზოგად შემთხვევაში თეორემის დასკვნა მართებულია მაშინაც, თუ მითითებული ნაწილები იცვლება $\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის იმ ფორმებით, რომლებიც ამ ნაწილების მთავარი ოპერატორების შესაბამისი ჩანაცვლებების შედეგებია $\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის მიმართ. ფრაზა „$\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის მიმართ“ მიუთითებს, მაგალითად, რომ $\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m$ ფორმები უნდა ჩაისვას $\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის $\mathbb{A}_0$ ფორმაში. ამ შედეგის მისაღებად საკმარისია განხილულ ნაწილებში შემავალი არამთავარი ჩანაცვლების ოპერატორები შესაბამისი ტიპის ძირითად ოპერატორებად, ანუ რთულ კვანტორებად, მივიჩნიოთ.

ამ თეორემების დამტკიცებამდე შევნიშნოთ, რომ მათი მარტივი შედეგებია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 7.3. *$\widetilde{\mathscr{T}_\mathsf{S}}$ თეორიის ურთიერთკონგრუენტული $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{B}_1$ ფორმებით აღნიშნული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმები ურთიერთკონგრუენტულია.*

თეორემა 7.4. *ვთქვათ $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ურთიერთკონგრუენტული ფორმები, ხოლო $\sigma'\mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ და $\sigma''\mathsf{a}''_1 \cdots \mathsf{a}''_m$ მათი ურთიერთშესაბამისი წარმოებული ოპერატორებია ($m = 0$ შემთხვევა გამორიცხული არ არის). შემდეგ, ვთქვათ შემამოკლებელი σ' სიმბოლოს ტიპი და, მაშასადამე, შემამოკლებელი σ'' სიმბოლოს ტიპიც ერთ-ერთია* I–IV, II′ *და* IV′ *ტიპებიდან, ხოლო $\mathbb{A}'_0$ და $\mathbb{B}'_0$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმები, რომლებიც მიიღება $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმებიდან $\sigma'\mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ და $\sigma''\mathsf{a}''_1 \cdots \mathsf{a}''_m$ ოპერატორებზე მათი განსაზღვრების გამოყენებით. მაშინ $\mathbb{A}'_0 \simeq \mathbb{B}'_0$.*

თეორემა 7.5. *ვთქვათ $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ურთიერთკონგრუენტული ფორმები, ხოლო $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ისეთი ფორმები, რომელთა შემოკლებული სახეებია, შესაბამისად, $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$. თუ $\mathbb{A}_0$-ში და, მაშასადამე, $\mathbb{B}_0$-შიც არსებული ყოველი წარმოებული ოპერატორის ტიპი, აგრეთვე $\mathbb{A}_0$-ის რომელიმე წარმოებული ოპერატორის წინამორბედი ყოველი წარმოებული ოპერატორის ტიპი ერთ-ერთია*[1] I–IV, II′ *და* IV′ *ტიპებიდან, მაშინ $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$.*

თეორემა 7.6. *ვთქვათ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_0$ ფორმაში არსებული ყოველი წარმოებული ოპერატორის ტიპი, აგრეთვე $\mathbb{A}_0$-ის რომელიმე ოპერატორის წინამორბედი ყოველი წარმოებული ოპერატორის ტიპი ერთ-ერთია* I–IV *და* VII *ტიპებიდან (შესაბამისად,* I–IV, II′ *და* IV′ *ტიპებიდან). მაშინ $\mathscr{T}$ თეორიის ის $\mathbb{A}$ ფორმა, რომლის შემოკლებული სახეცაა $\mathbb{A}_0$, განისაზღვრება ცალსახად (შესაბამისად, განისაზღვრება ცალსახად კონგრუენტულობის სიზუსტემდე იმ აზრით, რომ ყველა ფორმა, რომელთა შემოკლებული სახეცაა $\mathbb{A}_0$, ურთიერთკონგრუენტულია).*

[1] ცხადია, ეს უკანასკნელი პირობა სრულდება, თუ $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ მიმდევრობიდან ყოველი განსაზღვრებასქემის ტიპი ერთ-ერთია I–IV, II′ და IV′ ტიპებიდან.

შენიშვნა. მაგალითად, ამ თეორემის პირველი ნაწილის პირობა შემდეგი პირობის ეკვივალენტურია: $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_0$ ფორმაში შემავალი ყოველი შემამოკლებელი სიმბოლოს ტიპი, აგრეთვე $\mathbb{A}_0$-ის რომელიმე შემამოკლებელი სიმბოლოს წინამორბედი ყოველი შემამოკლებელი სიმბოლოს ტიპი ერთ-ერთია I–IV და VII ტიპებიდან. ამ შენიშვნის სრული ანალოგები სხვა თეორემების შემთხვევებშიც უნდა გავითვალისწინოთ.

მართლაც, თეორემა 7.3-ის მისაღებად თეორემა 7.2 იმდენჯერ უნდა გამოვიყენოთ, რამდენჯერაც $\mathbb{A}_1$ ფორმაში (და, მაშასადამე, $\mathbb{B}_1$-შიც) ჩანაცვლების ოპერატორი გვხვდება. თეორემა 7.4-ის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების გამოყენება იშლება იმავე ოპერატორის განსაზღვრების კვაზიგამოყენებად და ამ კვაზიგამოყენებით მიღებული ფორმის ჩასმული ნაწილიდან ჩანაცვლების ოპერატორების გამორიცხვების მიმდევრობად, თეორემა 7.2-ის საფუძველზე. უფრო დაწვრილებით მოვიყვანოთ თეორემა 7.5-ის დამტკიცება.

ვთქვათ

$$\mathbb{A}_1 \eqsim \mathbb{A}_0, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_n \eqsim \mathbb{A} \qquad \text{და} \qquad \mathbb{B}_1 \eqsim \mathbb{B}_0, \mathbb{B}_2, \ldots, \mathbb{B}_m \eqsim \mathbb{B}$$

არის კანონიკური ნორმალური მიმდევრობები; მათი არსებობა ფორმის შემოკლებული სახის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს. ვთქვათ, K არის უდიდესი ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი ნატურალური $i \leq K$ რიცხვისათვის $\mathbb{A}_i \simeq \mathbb{B}_i$ და, თუ $i > 1$, მაშინ $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ მიიღება $\mathbb{A}_{i-1}$ და $\mathbb{B}_{i-1}$ ფორმებიდან შესაბამისი ოპერატორების მიმართ მათი განსაზღვრებების გამოყენებით. დავუშვათ, $K < \min(m; n)$. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_m$ მიმდევრობა შეგვიძლია გარდავქმნათ პირველი K წევრის, ბოლო წევრისა და წევრების რაოდენობის შეუცვლელად ისე, რომ ახალი კანონიკური ნორმალური მიმდევრობისათვის განხილული თვისების მქონე უდიდესი ნატურალური რიცხვი K-ზე მეტი იყოს. აქედან ადვილად გამომდინარეობს აგრეთვე $m = n$.

ვთქვათ, $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_\ell$ და $\sigma''_1, \ldots, \sigma''_\ell$ არის ურთიერთკონგრუენტული $\mathbb{A}_K$ და $\mathbb{B}_K$ ფორმების მინიმალური მოქმედების არის მქონე ყველა წარმოებული ოპერატორის ისეთი გადათვლა, რომ σ'_i და σ''_i ურთიერთშესაბამისი ოპერატორებია ($i = 1, 2, \ldots, \ell$). ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $\mathbb{A}_{K+1}$ მიიღება $\mathbb{A}_K$-დან σ'_1 ოპერატორის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენებით, ხოლო $\mathbb{B}_{K+1}$ მიიღება $\mathbb{B}_K$-დან σ''_2 ოპერატორის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენებით (იხ. თეორემა 7.4). ჩვენი დაშვებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $K < \min(m; n) - 1$. $\mathbb{A}'_i$ და $\mathbb{B}'_i$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}_K$ და $\mathbb{B}_K$ ფორმების ნაწილები, რომელთა მთავარი ოპერატორებია σ'_i და σ''_i ($i = 1, 2, \ldots, \ell$). ამ ნაწილებს ბუნებრივად შეესაბამება გარდაქმნილი ან უცვლელი ნაწილები განხილული მიმდევრობების მომდევნო წევრებში. არსებობს ისეთი ნატურალური $p > 0$ რიცხვი, რომ $\mathbb{B}_{K+1}, \ldots, \mathbb{B}_{K+p}$ ფორმების ის ნაწილები, რომლებიც $\mathbb{B}'_1$ ნაწილს შეესაბამება, როგორც $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმები, $\mathbb{B}'_1$-ს ემთხვევა, ხოლო $\mathbb{B}_{K+p}$ ფორმიდან $\mathbb{B}_{K+p+1}$ ფორმაზე გადასვლისას შესაბამისი ნაწილი გარდაიქმნება. კერძოდ, $\mathbb{B}_{K+p+1}$ მიიღება $\mathbb{B}_{K+p}$-დან σ''_1 ოპერატორის შესაბამისი ოპერატორის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენებით: ამ გამოყენებით $\mathbb{B}'_1$-ის შესაბამისი ნაწილი რომელიმე $\mathbb{D}$ ფორმით იცვლება. $\mathbb{B}_K, \ldots, \mathbb{B}_{K+p}$ წევრებში $\mathbb{B}'_1$ ნაწილი და მისი შესაბამისი ნაწილები შევცვალოთ $\mathbb{D}$ ფორმით და მიღებული ფორმები, შესაბამისად, $\mathbb{B}^*_{K+1}, \ldots, \mathbb{B}^*_{K+p+1}$ სიმბოლოებით აღვნიშნოთ. თეორემა 7.4-ის საფუძველზე ადვილი დასანახია, რომ

$$\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_K, \mathbb{B}^*_{K+1}, \dots, \mathbb{B}^*_{K+p+1} \rightrightarrows \mathbb{B}_{K+p+1}, \mathbb{B}_{K+p+2}, \dots, \mathbb{B}_m$$

არის საჭირო თვისებების მქონე კანონიკური ნორმალური მიმდევრობა. ასეთი გარდაქმნებით მიიღება კანონიკური ნორმალური მიმდევრობა

$$\overline{\mathbb{B}}_1 \rightrightarrows \mathbb{B}_1, \overline{\mathbb{B}}_2, \dots, \overline{\mathbb{B}}_m \rightrightarrows \mathbb{B}$$

რომლის შესაბამისი უდიდესი ნატურალური რიცხვია $\min(m; n)$ და, მაშასადამე, $m = n$.

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება თეორემა 7.6-ის ორივე ნაწილი, თუ როგორც $\mathbb{A}_0$-ის, ისე $\mathbb{B}_0$-ის როლში ავიღებთ $\mathbb{A}_0$-ს და პირველი ნაწილის დამტკიცებისას კონგრუენტულობის ნაცვლად გრაფიკულ ტოლობაზე ვისაუბრებთ. ეს უკანასკნელი გარემოება შესაძლებელს ხდის VII ტიპის წარმოებული ოპერატორების გათვალისწინებას.

შენიშვნა. თეორემა 7.6-ის მეორე ნაწილი შეიძლება გავრცელდეს შემთხვევაზეც, როცა $\mathbb{A}_0$ ფორმაში VII ტიპის წარმოებული ოპერატორები გვხვდება, იმ პირობით, რომ $\mathbb{A}_0$ ფორმის ოპერატორების წინამორბედ ოპერატორებს შორის VII ტიპის ოპერატორები არ გვხვდება. მართლაც, ამ შემთხვევაში ორივე მიმდევრობაში, მეორე მიმდევრობის გარდაქმნის შემდეგ, VII ტიპის წარმოებული ოპერატორების გამორიცხვა კონგრუენტულობას არ არღვევს: ამ გამორიცხვისას წარმოებული ოპერატორები (კონსტანტები) „ერთი და იმავე“ ასოების მოქმედების არეში ხვდება. VII ტიპის წარმოებული ოპერატორები შეიძლება თავიდანვე გამოვრიცხოთ საბოლოო შედეგების ერთობლიობის შეუცვლელად. თეორემა 7.5-ის შემთხვევაში ასეთი შენიშვნა მართებული არ არის; სათანადო მაგალითის მითითება სირთულეს არ წარმოადგენს.

დამტკიცება. თეორემა 7.1-ის დამტკიცება. რადგან III, II და I ტიპის ყოველი განსაზღვრება IV ტიპის განსაზღვრების კერძო შემთხვევაა, ხოლო II′ ტიპის განსაზღვრება IV′ ტიპის განსაზღვრების კერძო შემთხვევაა, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ σ არის IV ან IV′ ტიპის წარმოებული ოპერატორი ან ოპერატორული ნიშანი განსაზღვრებით

$$\sigma\, \mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}_{\mathrm{S}}, \tag{1}$$

სადაც σ არის σ' ან, რაც იგივეა, σ'', განხილული როგორც წარმოებული ოპერატორი ან ოპერატორული ნიშანი იმის მიხედვით, $m = 0$ თუ $m \neq 0$.

ვივარაუდოთ, რომ $\mathbb{A}'_0$ და $\mathbb{B}'_0$ ფორმები მიიღება $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმებიდან $\sigma'\mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ და $\sigma''\mathsf{a}''_1 \cdots \mathsf{a}''_m$ ოპერატორების მიმართ (1) განსაზღვრების შემდეგი კვაზიკერძო შემთხვევების გამოყენებით:

$$\sigma\, \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m \mathbb{A}'_1 \cdots \mathbb{A}'_n \text{ ——— } \mathbb{B}'_{\mathrm{S}}, \tag{2}$$
$$\sigma\, \mathsf{a}''_1 \cdots \mathsf{a}''_m \mathbb{A}''_1 \cdots \mathbb{A}''_n \text{ ——— } \mathbb{B}''_{\mathrm{S}}. \tag{3}$$

ცხადია, ამ კვაზიკერძო შემთხვევებისათვის სრულდება 4.4-ის (c'_1) პირობა. $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმების ის ნაწილები, რომელთა მთავარი ოპერატორებია $\sigma'\mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ და $\sigma''\mathsf{a}''_1 \cdots \mathsf{a}''_m$. ეს ნაწილები, ფორმებად განხილვისას, (1) განსაზღვრების (2) და (3) კვაზიკერძო შემთხვევების მარცხენა ნაწილებია.

შემდეგ, ვთქვათ, $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ არის $\mathbb{A}_0$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფების ზოგიერთი კანონიკური წარმომადგენლის გადათვლა, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი პირობით: $\mathbb{A}_0$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფის ნებისმიერი კანონიკური $\mathbb{A}$ წარმომადგენელი $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ მიმდევრობის წევრია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathbb{A}$ მოქმედებს $\mathbb{A}'$ ნაწილზე; ამასთან, $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ მიმდევრობაში ამ წარმომადგენლების რიგი იგივეა, რაც $\mathbb{A}_0$ ფორმაში. $\mathbb{B}_0$ ფორმის ის ასოები, რომლებიც $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ ასოებს შეესაბამება, $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_p$-ით აღვნიშნოთ. $\mathbb{A}_0 \simeq \mathbb{B}_0$-დან გამომდინარეობს $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ნაწილების ურთიერთვარიანტულობა (იხ. თეორემა 2.6). ამ კონგრუენტულობიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_p$ მიმდევრობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\mathbb{B}_0$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფების კანონიკური წარმომადგენლების გადათვლა, რომელიც $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ გადათვლის ანალოგიურად განისაზღვრება. ამასთან, $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ნაწილების ურთიერთშესაბამისი თავისუფალი ასოები, რომლებიც, შესაბამისად, განსხვავდება $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ და $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_p$ ასოებისაგან, ერთი და იგივე ასოებია. სწორედ ეს და მხოლოდ ეს ასოებია $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმების თავისუფალი ასოები, რომლებიც $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ნაწილებში შედის; აქ იგულისხმება ასოების შემოსვლები.

თეორემა 5.1-ის თანახმად,

$$\mathbb{A}'_0 \rightleftharpoons (\mathbb{B}'_{\mathsf{S}} /\!\!/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}:}} \mathbb{A}')\mathbb{A}_0 \qquad \text{და} \qquad \mathbb{B}'_0 \rightleftharpoons (\mathbb{B}''_{\mathsf{S}} /\!\!/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}:}} \mathbb{B}')\mathbb{B}_0.$$

$\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$-ით, შესაბამისად, $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{B}'_{\mathsf{S}}$ ფორმის ჩასმული შემოსვლა $\mathbb{A}'_0$-ში, შესაბამისად, $\mathbb{B}''_{\mathsf{S}}$ ფორმის ჩასმული შემოსვლა $\mathbb{B}'_0$-ში. ცხადია,

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}'_{\mathsf{S}} \rightleftharpoons (&\mathsf{a}'_1, \dots, \mathsf{a}'_m, \mathbb{A}'_1, \dots, \mathbb{A}'_n, \mathsf{b}'_1, \dots, \mathsf{b}'_k \\
&/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}:}} \mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n, \mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B}_{\mathsf{S}}, \\
\mathbb{B}''_{\mathsf{S}} \rightleftharpoons (&\mathsf{a}''_1, \dots, \mathsf{a}''_m, \mathbb{A}''_1, \dots, \mathbb{A}''_n, \mathsf{b}''_1, \dots, \mathsf{b}''_k \\
&/_{\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathsf{S}:}} \mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_m, \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n, \mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B}_{\mathsf{S}}.
\end{aligned}$$

გავაიგივოთ $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{A}'_0$ ფორმების, შესაბამისად, $\mathbb{B}_0$ და $\mathbb{B}'_0$ ფორმების შესაბამისი სიმბოლოები, რომლებიც $\mathbb{A}'$ და $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$ ნაწილების, შესაბამისად, $\mathbb{B}'$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$ ნაწილების გარეთ მდებარეობს. შესაბამისი სიმბოლოები ერთი და იგივე სიმბოლოები იქნება.

ვთქვათ, $\overline{\mathbb{A}}_1, \dots, \overline{\mathbb{A}}_p$, შესაბამისად, $\overline{\mathbb{B}}_1, \dots, \overline{\mathbb{B}}_p$ არის $\mathbb{A}'_0$ ფორმაში, შესაბამისად, $\mathbb{B}'_0$ ფორმაში ასოების შემოსვლების მიმდევრობა, რომელიც $\mathbb{A}'_0$ და $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$-ის, შესაბამისად, $\mathbb{B}'_0$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$-ის საშუალებით განისაზღვრება ისევე, როგორც $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p$ განისაზღვრება $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{A}'$-ის საშუალებით. ახლა ადვილი დასანახია შემდეგი დებულებების მართებულობა.

$(1')$ $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathsf{S}}}$ თეორიის $\mathbb{A}'_0$ და $\mathbb{B}'_0$ ფორმებს ერთნაირი სიგრძე აქვს და, მათ სიმბოლოებს შორის კანონიკური ურთიერთცალსახა შესაბამისობისას, $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$ ნაწილები ერთმანეთს ისე შეესაბამება, რომ ურთიერთშესაბამისია $\mathbb{A}'_i$ და $\mathbb{A}''_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ნაწილების, აგრეთვე $\mathsf{a}'_1, \dots \mathsf{a}'_m, \mathsf{b}'_1, \dots \mathsf{b}'_k$ და $\mathsf{a}''_1, \dots \mathsf{a}''_m, \mathsf{b}''_1, \dots \mathsf{b}''_k$ ასოების ჩასმული შემოსვლები; დანარჩენი შესაბამისი შემოსვლები კი ერთი და იგივე სიმბოლოებია. ასევე, შესაბამისად, ერთმანეთს შეესაბამება $\overline{\mathbb{A}}_1, \dots, \overline{\mathbb{A}}_p$ და $\overline{\mathbb{B}}_1, \dots, \overline{\mathbb{B}}_p$ შემოსვლები.

$(2')$ $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{A}'_0$ ფორმების, შესაბამისად, $\mathbb{B}_0$ და $\mathbb{B}'_0$ ფორმების ზოგიერთი შესაბამისი სიმბოლოს გაიგივების შესახებ ზემოთ მიღებული შეთანხმების საფუძველზე $\overline{\mathbb{A}}_1, \dots, \overline{\mathbb{A}}_p, \overline{\mathbb{B}}_1, \dots, \overline{\mathbb{B}}_p$ შემოსვლები, შესაბამისად, გაიგივდება $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p, \mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_p$

შემოსვლებთან (იხ. 4.4-ის (c'_1) პირობა). ერთმანეთთან გაიგივებული შემოსვლები, სიმბოლოებად განხილვისას, ერთი და იგივე სიმბოლოებია.

$(3')\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_p$ შემოსვლები, შესაბამისად, $\mathbb{B}_1,\dots,\mathbb{B}_p$ შემოსვლები, ასოებად განხილვისას, წყვილ-წყვილად განსხვავებულია. მაშასადამე, $\overline{\mathbb{A}}_1,\dots,\overline{\mathbb{A}}_p$ შემოსვლებიც, შესაბამისად, $\overline{\mathbb{B}}_1,\dots,\overline{\mathbb{B}}_p$ შემოსვლებიც, ასოებად განხილვისას, წყვილ-წყვილად განსხვავებულია.

$(4')\mathbb{A}'_i$ და $\mathbb{A}''_i$ ურთიერთვარიანტულია, $i=1,2,\dots,n$ (იხ. თეორემა 2.6). ასევე ურთიერთვარიანტულია $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$.

$(5')\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმების ურთიერთშესაბამისი თავისუფალი ასოები, რომლებიც $\mathbb{A}'_i$ და $\mathbb{A}''_i$ ნაწილებში შედის, ერთმანეთს ემთხვევა; იგულისხმება ასოების შემოსვლები.

$(6')\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმების $\mathbb{A}'_i$ და $\mathbb{A}''_i$ ნაწილების დაბმული ასოები ერთმანეთს დაბმული ასოების ჯგუფების მიხედვით შეესაბამება.

$(7')\mathsf{b}'_i$ და b''_i ასოების ჩასმული შემოსვლები $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}}$ ნაწილებში შეადგენს დაბმული ასოების ჯგუფების ერთ ან რამდენიმე ურთიერთშესაბამის წყვილს (იხ. (d_{S}) პირობა).

$(8')$ $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathrm{S}}}$ თეორიის $\mathbb{B}_{\mathrm{S}}$ ფორმის ცხადი სახით მოცემული დაბმული მათემატიკური ასოების ჯგუფები უცვლელად გადადის, როგორც დაბმული ასოების ჯგუფები, $\widetilde{\mathscr{T}_{\mathrm{S}}}$ თეორიის $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}}$ ფორმებში (იხ. 4.4-ის $(a_{1\mathrm{S}})$ და (b_{S}) პირობები, აგრეთვე 4.1-ის I ტიპის განსაზღვრების (b) პირობის შესაბამისი შენიშვნა).

$(9')$ ვთქვათ, $m\neq 0$, $(n_1,\dots,n_\ell)$ არის σ ოპერატორული ნიშნის დაბმულობის მაჩვენებელი, ხოლო $m_1,\dots,m_{n-\ell}$ მიიღება $1,2,\dots,n$ მიმდევრობიდან $n_1,\dots,n_\ell$ წევრების ამოღებით. ყოველი $j\in\{1,2,\dots,m\}$-სთვის a'_j და a''_j ასოების ყველა შემოსვლა, შესაბამისად, $\sigma'\mathsf{a}'_1\cdots\mathsf{a}'_m$ და $\sigma''\mathsf{a}''_1\cdots\mathsf{a}''_m$ ოპერატორებში და მათი ყველა თავისუფალი შემოსვლა ამ ოპერატორების $\mathbb{A}'_{n_1},\dots,\mathbb{A}'_{n_\ell}$ და $\mathbb{A}''_{n_1},\dots,\mathbb{A}''_{n_\ell}$ ოპერანდებში ერთმანეთს შეესაბამება როგორც $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ნაწილების დაბმული ასოების ჯგუფების ერთი წყვილი. მაშასადამე, ეს შემოსვლები $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ნაწილებში ერთნაირადაა განაწილებული. მათ შეესაბამება a'_j და a''_j ასოების ერთნაირად განაწილებული შემოსვლები $\mathbb{A}'_0$ და $\mathbb{B}'_0$ ფორმების $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}}$ ნაწილებში. სიმბოლოებით

$$\mathbb{A}'_{j\sigma},\ \mathbb{B}'_{j\sigma},\ \mathbb{A}'_j,\ \mathbb{B}'_j,\ \overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}j},\ \overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}j}$$

აღვნიშნოთ ამ შემოსვლების სიმრავლეები, შესაბამისად, მითითებულ ორ ოპერატორსა და $\mathbb{A}',\mathbb{B}',\overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}},\overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}}$ ნაწილებში. $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}j}$ სიმრავლე, შესაბამისად, $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}j}$, შედგება $\mathbb{A}'_{j\sigma}$-ის, შესაბამისად, $\mathbb{B}'_{j\sigma}$-ის ელემენტების ყველა ჩასმული შემოსვლისაგან და a'_j, შესაბამისად, a''_j ასოს ყველა თავისუფალი შემოსვლისაგან $\mathbb{A}'_{n_1},\dots,\mathbb{A}'_{n_\ell}$, შესაბამისად, $\mathbb{A}''_{n_1},\dots,\mathbb{A}''_{n_\ell}$ ნაწილების ჩასმულ შემოსვლებში (იხ. 4.4-ის $(a_{1\mathrm{S}})$ და (d_{S}) პირობები). აქედან აღვილად გამომდინარეობს, რომ $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}}$ ნაწილების დაბმული ასოები ერთმანეთს დაბმული ასოების ჯგუფების მიხედვით შეესაბამება (იხ. $(6')$, $(7')$, $(8')$ და 4.4-ის $(a_{1\mathrm{S}})$, (d_{S}), (c'_1) პირობები).

$(10')$ $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}}$ ნაწილებში, $\mathbb{A}'_1,\dots,\mathbb{A}'_n$ და $\mathbb{A}''_1,\dots,\mathbb{A}''_n$ ნაწილების ჩასმული შემოსვლების გარეთ, ასოების თავისუფალი შემოსვლები არ არის. ამ ჩასმულ შემოსვლებში გვხვდება $\overline{\mathbb{A}}_1,\dots,\overline{\mathbb{A}}_p$ და $\overline{\mathbb{B}}_1,\dots,\overline{\mathbb{B}}_p$ ასოების ისეთი შემოსვლები, რომლებიც, შესაბამისად, თავისუფალია $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathrm{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathrm{S}}$ ნაწილებში. ნებისმიერი წყვილის $\overline{\mathbb{A}}_j$ და $\overline{\mathbb{B}}_j$ ასოების ყველა ასეთი შემოსვლა ამ ნაწილებში ერთნაირადაა განაწილებული ($j=1,2,\dots,p$). მართლაც, ისინი შეესაბამება $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმების დაბმული ასოების შესაბამისი ჯგუფების

იმ ნაწილებს, რომელთა კანონიკური წარმომადგენლებია $\mathbb{A}_j$ და $\mathbb{B}_j$ და რომლებიც $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ნაწილებში მდებარეობს. ეს ნაწილები, თავის მხრივ, ერთნაირადაა განაწილებული $\mathbb{A}'_1, \dots, \mathbb{A}'_n$ და $\mathbb{A}''_1, \dots, \mathbb{A}''_n$ ოპერანდებში. ამიტომ $\overline{\mathbb{A}}_1, \dots, \overline{\mathbb{A}}_p$ და $\overline{\mathbb{B}}_1, \dots, \overline{\mathbb{B}}_p$ ასოების განხილული შემოსვლები $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$ ნაწილებში შეადგენს $\mathbb{A}'_0$ და $\mathbb{B}'_0$ ფორმების დაბმული ასოების ურთიერთშესაბამისი ჯგუფების არაცარიელ ნაწილებს. ამ ჯგუფების კანონიკური წარმომადგენლებია $\overline{\mathbb{A}}_1, \dots, \overline{\mathbb{A}}_p$ და $\overline{\mathbb{B}}_1, \dots, \overline{\mathbb{B}}_p$; აღნიშნული ნაწილები $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$ ნაწილებში მდებარეობს. ჯგუფების ასეთი წყვილების რაოდენობაა p.

შენიშვნა. თუ $\mathbb{A}_j$ და a'_i სიმბოლოებად განხილვისას ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ $\mathbb{A}_j$ ასო (შემოსვლა) $\mathbb{A}'_{n_1}, \dots, \mathbb{A}'_{n_\ell}$ ნაწილებზე არ მოქმედებს. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში $\mathbb{A}_j$ ასო მოქმედებს $\mathbb{A}'_{m_1}, \dots, \mathbb{A}'_{m_{n-\ell}}$ ნაწილებიდან სულ მცირე ერთზე.

$(11')$ ვთქვათ, $\mathfrak{A}$ არის $\mathbb{A}'$ ნაწილში რომელიმე a ასოს ყველა იმ თავისუფალი შემოსვლის არაცარიელი სიმრავლე, რომლებიც $\mathbb{A}_0$ ფორმაშიც თავისუფალია, ხოლო $\mathfrak{B}$ — $\mathbb{B}_0$ ფორმაში შესაბამისი შემოსვლების სიმრავლე. $\mathfrak{B}$ იმავე a ასოს თავისუფალი შემოსვლების სიმრავლეა და მისი შემოტანა $\mathfrak{A}$ სიმრავლის განსაზღვრების სრული ანალოგიით შეიძლება. $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ არის კონგრუენტული $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმების თავისუფალი ასოების შესაბამისი ჯგუფების ნაწილები. მათ შეესაბამება a ასოს ერთნაირად განაწილებული თავისუფალი შემოსვლების $\mathfrak{A}_{\mathsf{S}}$ და $\mathfrak{B}_{\mathsf{S}}$ სიმრავლეები $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$ ნაწილებში. $\mathfrak{A}_{\mathsf{S}}$, შესაბამისად, $\mathfrak{B}_{\mathsf{S}}$ შეიძლება განისაზღვროს $\mathfrak{A}$ სიმრავლის სრული ანალოგიით: $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{A}_0$-ის როლში უნდა ავიღოთ $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$ და $\mathbb{A}'_0$, შესაბამისად, $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$ და $\mathbb{B}'_0$. ახლა ადვილი დასანახია, რომ თუ რომელიმე b ასოს აქვს თავისუფალი შემოსვლები $\mathbb{A}_0$ ფორმასა და მის $\mathbb{A}'$ ნაწილში, მაშინ $\mathbb{A}'_0$ და $\mathbb{B}'_0$ ფორმებში b ასოს თავისუფალი შემოსვლების ჯგუფები ერთმანეთს შეესაბამება.

$(12')$ $\mathbb{A}'_0$ და $\mathbb{B}'_0$ ფორმების დაბმული, შესაბამისად, თავისუფალი ასოების დანარჩენი, გემოთ განუხილველი ჯგუფები ერთმანეთს შეესაბამება. ეს ჯგუფები $\overline{\mathbb{B}}'_{\mathsf{S}}$ და $\overline{\mathbb{B}}''_{\mathsf{S}}$ ნაწილების გარეთ მდებარეობს; ამასთან, შესაბამისი თავისუფალი შემოსვლები ერთი და იმავე ასოს შემოსვლებია.

მოყვანილი დებულებებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{A}'_0 \simeq \mathbb{B}'_0$.

□

დამტკიცება. თეორემა 7.2-ის დამტკიცება. $\mathbb{A}_{\mathsf{S}}$ და $\mathbb{B}_{\mathsf{S}}$-ით აღვნიშნოთ თეორემის ფორმულირებაში მითითებული ჩანაცვლებების შედეგები, განხილული როგორც $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ფორმების ნაწილები. $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების კონგრუენტულობიდან მათი შესაბამისი ნაწილების ურთიერთვარიანტულობა გამომდინარეობს (იხ. თეორემა 2.6).

კერძოდ, $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ნაწილები ურთიერთვარიანტულია $(i = 0, 1, \dots, m)$.

ვთქვათ, $\mathfrak{A}'$ არის $\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ ოპერატორში ერთი და იმავე ასოს ყველა შემოსვლის ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლე, ხოლო $\mathfrak{B}'$ — $\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_m$ ოპერატორში ასოების შესაბამისი შემოსვლების სიმრავლე. მაშინ $\mathfrak{B}'$ იქნება $\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_m$ ოპერატორში ერთი და იმავე ასოს ყველა შემოსვლის სიმრავლე.

ადვილი დასანახია, რომ $\mathfrak{A}'$ და $\mathfrak{B}'$ დაბმული ასოების ჯგუფების ნაწილებია. ამ ჯგუფებამდე მათი შემავსებელი, შესაძლოა ცარიელი ნაწილები $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ნაწილებში მდებარეობს და ურთიერთშესაბამისი შემოსვლებისაგან შედგება. აქ იგულისხმება ურთიერთკონგრუენტული $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების სიმბოლოების შემოსვლებს შორის ბუნებრივი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mathfrak{A}'$ სიმრავლის ელემენტი, ასოდ განხილვისას, $\mathbb{A}_0$-ში თავისუფალი შემოსვლების სახით ისევეა განაწილებული, როგორც $\mathfrak{B}'$ სიმრავლის ელემენტი, ასოდ განხილვისას, $\mathbb{B}_0$-ში.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{A}_S$ და $\mathbb{B}_S$ ნაწილებში $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ნაწილების ჩასმული შემოსვლები **ერთნაირადაა** განაწილებული ($i = 1, 2, \ldots, m$). $\mathbb{A}_i$ ნაწილს შეიძლება არ ჰქონდეს ჩასმული შემოსვლა $\mathbb{A}_S$-ში მაშინაც კი, როცა a_i-ს $\mathbb{A}_0$-ში თავისუფალი შემოსვლა აქვს; ეს ზუსტად მაშინ ხდება, როცა a_i არის $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ მიმდევრობის განმეორებული წევრი. $\mathbb{A}$ სიტყვის ის ნაწილები, რომლებიც $\mathbb{A}$ ფორმის $\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_m \mathbb{A}_0$ ნაწილის გარეთ მდებარეობს, „იგივეა“, რაც $\mathbb{A}'$ სიტყვის ნაწილები $\mathbb{A}_S$ ნაწილის გარეთ. (—/—) ტიპის ჩანაცვლების განსაზღვრებიდან ვასკვნით, რომ $\mathbb{A}_S$-ში $\mathbb{A}_i$ ნაწილის ჩასმულ შემოსვლაზე, თუ ასეთი არსებობს, მოქმედებს მხოლოდ $\mathbb{A}_S$ ნაწილის გარეთ მდებარე $\mathbb{A}'$ ფორმის ასოები, ისევე როგორც $\mathbb{A}_i$ ნაწილზე მოქმედებს მხოლოდ $\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_m \mathbb{A}_0$ ნაწილის გარეთ მდებარე $\mathbb{A}$ ფორმის ასოები. მაშასადამე, $\mathbb{A}_S$-ში $\mathbb{A}_i$ ნაწილის ჩასმულ შემოსვლაში ყოველი ასოს შემოსვლის დაბმულობისა და თავისუფლების თვისებები $\mathbb{A}_S$-ისა და $\mathbb{A}'$-ის მიმართ ისეთივეა, როგორიც იმავე ასოს შესაბამისი შემოსვლის თვისებები $\mathbb{A}_i$-ში ზემოთ მითითებული ნაწილისა და $\mathbb{A}$ ფორმის მიმართ. ასევე, $\mathbb{A}$-დან $\mathbb{A}'$-ზე გადასვლისას უცვლელი რჩება $\mathbb{A}_0$-ში ასოების იმ შემოსვლების დაბმულობისა და თავისუფლების თვისებები, რომლებიც განსხვავდება $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ ასოების $\mathbb{A}_0$-ში თავისუფალი შემოსვლებისაგან. თუმცა, (—/—) ტიპის ჩანაცვლების განსაზღვრების შესაბამისად, ამ გადასვლისას $\mathbb{A}_0$-ში დაბმული ასოების ზოგიერთი ჯგუფი იცვლება.

ამრიგად, $\mathbb{A}$-დან $\mathbb{A}'$-ზე გადასვლისას ქრება $\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ ოპერატორი, მისი $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m$ ოპერანდები და $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ ასოების თავისუფალი შემოსვლები $\mathbb{A}_0$-ში. ამასთან, a_i ასოს ყველა ამ თავისუფალი შემოსვლის ნაცვლად ჩნდება რომელიმე $\mathbb{A}_j (j \leq i)$ ნაწილის ჩასმული შემოსვლები. მაშასადამე, $\mathbb{A}$-დან $\mathbb{A}'$-ზე გადასვლისას ქრება $\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ ოპერატორით წარმოქმნილი დაბმული ასოების ჯგუფები.

$\mathbb{A}$ ფორმისა და მასთან დაკავშირებული სიმბოლოების შესახებ ნათქვამის სრული ანალოგები მართებულია $\mathbb{B}$ ფორმისა და მასთან დაკავშირებული ანალოგიური სიმბოლოებისთვისაც; $\mathbb{A}$-სა და $\mathbb{B}$-თან დაკავშირებული აღნიშვნები შესაბამისად იცვლება.

ახლა ადვილი დასანახია, რომ $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ფორმებში სიმბოლოების შემოსვლებს შორის ბუნებრივად მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა: ოპერატორებს შეესაბამება ოპერატორები, ხოლო ასოებს — ასოები. $\mathbb{A}_S$ და $\mathbb{B}_S$ ურთიერთშესაბამისი ნაწილებია. ამ შესაბამისობისას დაბმული ასოების ის ჯგუფები, რომელთა ყველა ელემენტი $\mathbb{A}_S$ და $\mathbb{B}_S$ ნაწილებში, ჩასმული შემოსვლების გარეთ მდებარეობს, ურთიერთშესაბამისია, ისევე როგორც $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმებში. $\mathbb{A}_0$-ში დაბმული ასოების ზოგიერთი ჯგუფის შეცვლა ამას ხელს არ უშლის. ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$-სთვის $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ნაწილების ჩასმული შემოსვლები $\mathbb{A}_S$ და $\mathbb{B}_S$ ფორმებში ერთნაირადაა განაწილებული. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{A}'$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფს, რომელიც $\mathbb{A}_i$ ნაწილის ერთ ჩასმულ შემოსვლაში მდებარეობს, შეესაბამება $\mathbb{B}'$ ფორმის დაბმული ასოების ჯგუფი $\mathbb{B}_i$ ნაწილის ერთ ჩასმულ შემოსვლაში ($i = 1, 2, \ldots, m$). ადვილი დასანახია, რომ $\mathbb{A}_S$ და $\mathbb{B}_S$ ნაწილებში დაბმული ასოების სხვა ჯგუფები არ არის.

ახლა განვიხილოთ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების დაბმული ასოების ისეთი ურთიერთშესაბამისი $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ ჯგუფები, რომლებიც მთლიანად არ მდებარეობს $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ნაწილებში და არ ქრება $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ფორმებზე გადასვლისას. ასეთია ის და მხოლოდ ის ჯგუფები, რომელთა კანონიკური წარმომადგენლები შემდეგი ნაწილების გარეთ მდებარეობს:

$$\widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_m \mathbb{A}_0 \qquad \text{და} \qquad \widetilde{\mathsf{S}}\,\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_m \mathbb{B}_1 \cdots \mathbb{B}_m \mathbb{B}_0. \tag{4}$$

$\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმებიდან $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ფორმებზე გადასვლისას ამ ჯგუფების ის ნაწილები, რომლებიც (4) ნაწილების გარეთ ან $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ნაწილებში მდებარეობს, უცვლელი რჩება; $\mathbb{A}_0$-სა და $\mathbb{B}_0$-ში მდებარე ნაწილები შეიძლება ცარიელი იყოს. $\mathfrak{A}^i$ და $\mathfrak{B}^i$-ით აღვნიშნოთ $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ ჯგუფების ის ნაწილები, რომლებიც $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{B}_i$ ნაწილებში მდებარეობს. ეს ნაწილები ქრება, მაგრამ სანაცვლოდ, ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$-სთვის, $\mathfrak{A}$ ჯგუფს $\mathbb{A}_S$-ში $\mathbb{A}_i$-ის ყოველი ჩასმული შემოსვლიდან ემატება ის შემოსვლები, რომლებიც $\mathfrak{A}^i$-ის შემოსვლებს შეესაბამება. ანალოგიურად, $\mathfrak{B}$ ჯგუფს $\mathbb{B}_S$-ში $\mathbb{B}_i$-ის ყოველი ჩასმული შემოსვლიდან ემატება $\mathfrak{B}^i$-ის შემოსვლების შესაბამისი შემოსვლები. ცხადია, ამ გზით $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ დაბმული ასოების ჯგუფები გარდაიქმნება დაბმული ასოების ჯგუფებად, რომლებიც ერთმანეთს შეესაბამება $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ფორმების შემოსვლებს შორის ბუნებრივი ურთიერთცალსახა შესაბამისობის მიხედვით.

ახლა განვიხილოთ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმების თავისუფალი ასოების ურთიერთშესაბამისი $\mathfrak{A}_i$ და $\mathfrak{B}_i$ ჯგუფები. ისინი ერთი და იმავე ასოს შემოსვლებისაგან შედგება. ამ ჯგუფების ის ნაწილები, რომლებიც (4) ნაწილების გარეთ ან $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{B}_0$ ნაწილებში მდებარეობს, $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ ფორმებიდან $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ფორმებზე გადასვლისას უცვლელი რჩება. $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m, \mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_m$ ოპერანდებში მდებარე ნაწილები წინა შემთხვევის ანალოგიურად გარდაიქმნება. შედეგად $\mathfrak{A}_i$ და $\mathfrak{B}_i$ გარდაიქმნება $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$ ფორმების თავისუფალი ასოების ურთიერთშესაბამის ჯგუფებად. აქ იგულისხმება შემთხვევაც, როცა ამ ჯგუფების განხილული სამი სახის ნაწილებიდან ერთი ან ორი ცარიელია.

ახლა ცხადია, რომ $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{B}'$. □

რადგან $\mathscr{T}$ თეორიის შემოკლებული ფორმების კლასი $\widetilde{\mathscr{T}}$ გაფართოებული თეორიის ფორმების კლასს ემთხვევა, შემოკლებულ ფორმებს ფორმების თვისებები აქვს და მათ მიმართ ფორმებთან დაკავშირებული ცნებები გამოიყენება, სპეციალური განსაზღვრებების შემოტანის გარეშე. კერძოდ, შეიძლება ვისაუბროთ **შემოკლებული ფორმის გამარტივებულ სახეებზე**, **შემოკლებული ფორმის ნაწილებზე** და ა.შ.

რადგან $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმის ცნება შემოკლებული ფორმის ცნების კერძო შემთხვევაა, ქვემოთ ყველგან, თუ სხვა რამ არ იქნება ნათქვამი, ვიგულისხმებთ, რომ შემოკლებულ ფორმასთან დაკავშირებული ნებისმიერი ცნების შემოტანით შემოტანილია $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმასთან დაკავშირებული შესაბამისი ცნებაც. ამ შეთანხმების ანალოგს გამოვიყენებთ ყოველთვის, როცა რომელიმე ზოგადი ცნება მის კერძო შემთხვევებთან ერთად განიხილება.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.7. *ვთქვათ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმა მიიღება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_0$ ფორმიდან წარმოებულ σ ოპერატორზე მისი განსაზღვრების გამოყენებით. შემდეგ, ვთქვათ $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{A}_1$ ფორმებიდან ერთ-ერთში მაინც არსებული ყოველი წარმოებული ოპერატორის ტიპი, აგრეთვე ნებისმიერი ასეთი ოპერატორის წინამორბედი ყოველი წარმოებული ოპერატორის ტიპი ერთ-ერთია* I–VI, II′, IV′ *და* VI′ *ტიპებიდან (შესაბამისად,* I–VI *ტიპებიდან), ხოლო σ-ის ტიპი ერთ-ერთია* I, II *და* II′ *ტიპებიდან (შესაბამისად,* I *და* II *ტიპებიდან). მაშინ $\mathbb{A}_0$ და $\mathbb{A}_1$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ერთი და იმავე $\mathbb{A}$ ფორმის შემოკლებული სახეები (შესაბამისად, σ-ზე მისი განსაზღვრების გამოყენება არ ცვლის $\mathbb{A}_0$ შემოკლებული ფორმის ერთადერთ მნიშვნელობას).*

შენიშვნა. თუ ფრაზას „I–VI, II′, IV′ და VI′ ტიპებიდან“ შევცვლით ფრაზით „I–IV, VII, II′

და IV′ ტიპებიდან“, მივიღებთ დებულებას, რომელიც მართებული იქნება, მაგალითად, მაშინ, როცა $\mathscr{T}$ თეორიის ოპერატორებს შორის პროპოზიციული ოპერატორული ასოების მქონე კვანტორები არ გვხვდება. ამ შემთხვევაში არც ასეთი წარმოებული კვანტორი არსებობს და არც შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებებში გვხვდება მეტაასოები, რომელთა ცვალებადობის არეები პროპოზიციულ ასოებს შეიცავს.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $\mathbb{A}_1$ მიიღება $\mathbb{A}_0$-დან $\sigma\,\mathbb{B}'_1\cdots\mathbb{B}'_n$ ნაწილის $\mathbb{B}'$ ფორმით შეცვლით, სადაც

$$\sigma\,\mathbb{B}'_1\cdots\mathbb{B}'_n \text{ ——— } \mathbb{B}' \tag{5}$$

არის σ ოპერატორის შემდეგი განსაზღვრების კერძო შემთხვევა:

$$\sigma\,\mathbb{B}_1\cdots\mathbb{B}_n \text{ ——— } \mathbb{B}. \tag{6}$$

ცხადია, $\mathbb{B}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, აგებული $\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_n,\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k$ მეტაცვლადების გამოყენებით,

$$\mathbb{B}' \rightleftharpoons (\mathbb{B}'_1,\ldots,\mathbb{B}'_n,\mathsf{b}'_1,\ldots,\mathsf{b}'_k\,/_{\vdots}\,\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_n,\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k)\mathbb{B},$$

$\mathbb{B}'_i$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, ხოლო $\mathsf{b}'_1,\ldots,\mathsf{b}'_k$ ასოებია; აქ n და k ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. თუ σ არის II ტიპის წარმოებული ოპერატორი, მაშინ $\mathsf{b}'_1,\ldots,\mathsf{b}'_k$ ასოები ცალსახად განისაზღვრება σ ოპერატორითა და $\mathbb{B}'_1,\ldots,\mathbb{B}'_n$ ფორმებით.

$\mathbb{A}^*_0$-ით აღვნიშნოთ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathbb{A}_0$-დან მიიღება შემდეგნაირად: ჯერ $\mathbb{B}'_1,\ldots,\mathbb{B}'_n$ ნაწილები წარმოებული ოპერატორების განსაზღვრებების კანონიკური გამოყენებებით გარდაიქმნება $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{B}^*_1,\ldots,\mathbb{B}^*_n$ ფორმებად; შემდეგ გამოიყენება σ ოპერატორის განსაზღვრების ის კერძო შემთხვევა, რომელიც (6)-დან მიიღება $\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_n,\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k$ მეტაცვლადების ნაცვლად $\mathbb{B}^*_1,\ldots,\mathbb{B}^*_n,\mathsf{b}'_1,\ldots,\mathsf{b}'_k$ სისტემის ჩასმით. აქ არსებითია, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{B}^*_i$ და $\mathbb{B}'_i$ ფორმებს თავისუფალი კვანტორული ასოების ერთი და იგივე სისტემა აქვს. ამიტომ $\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_n$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა $\mathbb{B}^*_1,\ldots,\mathbb{B}^*_n$ სისტემისათვის $\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k$ მეტაცვლადების მნიშვნელობებად შეიძლება ავიღოთ $\mathsf{b}'_1,\ldots,\mathsf{b}'_k$; შესაბამისად, $\mathbb{B}^*_1,\ldots,\mathbb{B}^*_n$ ფორმებით ცალსახად განსაზღვრული ეს სისტემა კვლავ $\mathsf{b}'_1,\ldots,\mathsf{b}'_k$ იქნება. შემდეგ, $\mathbb{A}^*_1$-ით აღვნიშნოთ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathbb{A}_1$-დან მიიღება $\mathbb{B}'$ ნაწილში $\mathbb{B}'_1,\ldots,\mathbb{B}'_n$ ფორმების ჩასმული შემოსვლების $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებად გარდაქმნით. ამისათვის გამოვიყენოთ ოპერატორების განსაზღვრებების იგივე კანონიკური კერძო შემთხვევები, რომლებითაც $\mathbb{A}_0$ ფორმის $\mathbb{B}'_1,\ldots,\mathbb{B}'_n$ ნაწილები $\mathbb{B}^*_1,\ldots,\mathbb{B}^*_n$ ფორმებად გარდავქმენით.[2] ადვილი დასანახია, რომ $\mathbb{A}^*_0 \rightleftharpoons \mathbb{A}^*_1$. აქედან ადვილად გამომდინარეობს თეორემის მართებულობა. □

წინა თეორემიდან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.8. *ვთქვათ* $\mathrm{D}1,\mathrm{D}2,\ldots$ *მიმდევრობიდან ყოველი განსაზღვრება-სქემის ტიპი ერთ-ერთია* I *და* II *ტიპებიდან. იმისათვის, რომ* $\widetilde{\mathscr{T}}$ *თეორიის* $\mathbb{A}_1$ *ფორმა იყოს* $\mathscr{T}$ *თეორიის*

[2] შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ ამ გარდაქმნებში განსაზღვრებები (d_2) პირობით გამოიყენებოდა.

$\mathbb{A}$ ფორმის შემოკლებული სახე, აუცილებელია და საკმარისია, რომ არსებობდეს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების ისეთი რეგულარული, შესაბამისად ნორმალური, მიმდევრობა, რომლის კიდურა წევრებია $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{A}$.

თუ ამ თეორემის ფორმულირებაში ფრაზას „I და II ტიპებიდან“ შევცვლით ფრაზით „I, II და II′ ტიპებიდან“, მცდარ დებულებას მივიღებთ; მისი მეორე ნაწილიც მცდარი იქნება. მართლაც, პირობის აუცილებლობა ყველა შემთხვევაში ცხადია. ამიტომ უნდა მოვიყვანოთ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების ისეთი ნორმალური $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$ მიმდევრობა, რომლის ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა, მაგრამ $\mathbb{A}_1$ არ არის $\mathbb{A}_n$ ფორმის შემოკლებული სახე. იგულისხმება, რომ წარმოებულ ოპერატორებს შორის II′ ტიპის ოპერატორი გვხვდება. ასეთი მაგალითისათვის საკმარისია $\mathbb{A}_1$-ად ავიღოთ $\sigma\,\mathbb{B}_1 \cdots \mathbb{B}_m$ სახის ფორმა, სადაც $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_m$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმები, $\mathbb{B}_1$ შეიცავს II′ ტიპის წარმოებულ ოპერატორს, ხოლო σ არის ისეთი წარმოებული ოპერატორი განსაზღვრებით $\sigma\,\mathbb{A}'_1 \cdots \mathbb{A}'_m$ ——— $\mathbb{B}'$, რომ $\mathbb{A}'_1$ მეტაცვლადს $\mathbb{B}'$-ში სულ მცირე ორი შემოსვლა აქვს. $\mathbb{A}_2$-ად ავიღოთ $\mathbb{A}_1$-დან σ ოპერატორის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენებით მიღებული ფორმა. შემდგომი გარდაქმნები ისე შევასრულოთ, რომ $\mathbb{A}_n$ ფორმის სულ მცირე ორი ნაწილი განსხვავებული იყოს: იგულისხმება ნაწილები, რომლებიც ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{A}_2$ ფორმის სხვადასხვა ნაწილს, ეს უკანასკნელნი კი $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_1$ ნაწილს შეესაბამება.

მიუხედავად ამისა, მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 7.9. *ვთქვათ $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \dots$ მიმდევრობიდან ყოველი განსაზღვრება-სქემის ტიპი ერთ-ერთია I, II და II′ ტიპებიდან. თუ $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების რეგულარული მიმდევრობა, რომლის ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა, ხოლო $\mathbb{A}'_1$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა, რომლის შემოკლებული სახეცაა $\mathbb{A}_1$, მაშინ $\mathbb{A}_n \simeq \mathbb{A}'_1$.*

სხვა სიტყვებით: რეგულარული მიმდევრობები, რომელთა პირველი წევრი $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მოცემული $\mathbb{A}_1$ ფორმაა, ხოლო ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის რომელიმე ფორმა, $\mathbb{A}_1$-ით აღნიშნულ $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებს განსაზღვრავს კონგრუენტულობის სიზუსტემდე. კერძოდ, მიმდევრობის ბოლო წევრი $\mathbb{A}_1$-ით აღნიშნული $\mathscr{T}$ თეორიის ნებისმიერი ფორმის კონგრუენტულია.

დამტკიცება. თეორემა 7.7-ის თანახმად, $\mathbb{A}_i$ და $\mathbb{A}_{i+1}$ შემოკლებული ფორმები $\mathscr{T}$ თეორიის ერთი და იმავე ფორმის შემოკლებული სახეებია ($i = 1, 2, \dots, n-1$). ვთქვათ, $\mathbb{A}'_i$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ნებისმიერი ფორმა, რომლის შემოკლებული სახეცაა $\mathbb{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). აქედან კონგრუენტულობის ტრანზიტიულობისა და თეორემა 7.6-ის ან 7.5-ის გამოყენებით ადვილად ვასკვნით, რომ

$$\mathbb{A}'_1 \simeq \mathbb{A}'_2 \simeq \cdots \simeq \mathbb{A}'_n = \mathbb{A}_n.$$

მაშასადამე, $\mathbb{A}'_1 \simeq \mathbb{A}_n$. □

თეორემა 7.8-იდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \dots$ მიმდევრობის ყოველი განსაზღვრება-სქემის ტიპი ერთ-ერთია I და II ტიპებიდან, მაშინ $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმების შემოკლებული სახეების გემოთ მოცემული განსაზღვრება ქვემოთ მოყვანილი თითოეული განსაზღვრების ეკვივალენტურია.

ვიტყვით, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმა არის $\mathscr{T}$ **თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმის შემოკლებული სახე $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \dots$ განსაზღვრებათა სისტემის მიმართ**, თუ არსებობს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის

ფორმების ნორმალური, შესაბამისად, რეგულარული მიმდევრობა, რომლის კიდურა წევრებია $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$.

თუ ურთიერთკონგრუენტულ ფორმებს გავაიგივებთ, მაშინ თეორემა 7.9-ის საფუძველზე შეიძლება ითქვას, რომ ეს დებულება ვრცელდება შემთხვევაზეც, როცა $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ მიმდევრობის ყოველი განსაზღვრება-სქემის ტიპი ერთ-ერთია I, II და II′ ტიპებიდან.

7.2 შემოკლებული ფორმებიდან ფორმების აღდგენის α- და α^*-პროცესები

$\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის მოცემული $\mathbb{A}_1$ ფორმისათვის $\mathscr{T}$ თეორიის ისეთი $\mathbb{A}$ ფორმის საპოვნელად, რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{A}_1$, ხშირად გამოიყენება შემდეგი ზოგადი სახის ე.წ. **α-პროცესი**, შესაბამისად, **α^*-პროცესი**.

$\mathbb{A}_1$-ში ნებისმიერად ავირჩიოთ წარმოებული ოპერატორი და მის მიმართ გამოვიყენოთ მისი განსაზღვრება, შესაბამისად, მისი განსაზღვრება (d_2) პირობით. მიღებული $\mathbb{A}_2$ ფორმა იმავე გზით გარდავქმნათ $\mathbb{A}_3$ ფორმად და ა.შ. პროცესი გავაგრძელოთ $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმის მიღებამდე.

თეორემა 7.12-ის თანახმად, პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვან შემთხვევებში ეს პროცესები დასრულებადია.

ყოველი α^*-პროცესი α-პროცესია. ამიტომ ამ პროცესებთან დაკავშირებული ცნებების შემოტანა მხოლოდ α-პროცესებისათვის საკმარისია.

$\mathbb{A}_i$ ფორმის $\mathbb{A}_{i+1}$ ფორმად გარდაქმნას აღნიშნულ α-პროცესში ვუწოდოთ **ამ α-პროცესის i-ური ბიჯი**. $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული α-პროცესით განსაზღვრული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების მიმდევრობაში ბოლო $\mathbb{A}$ წევრი და მხოლოდ ის, თუ არსებობს, ანუ თუ α-პროცესი დასრულებადია, იქნება $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა. პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვან შემთხვევებში $\mathbb{A}_1$ იქნება $\mathscr{T}$ თეორიის სათანადოდ არჩეული $\mathbb{A}'$ ფორმის შემოკლებული სახე, სადაც $\mathbb{A}'$ კონგრუენტულია $\mathbb{A}$ ფორმისა. პრაქტიკულად მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევებში კი $\mathbb{A}_1$ თვით $\mathbb{A}$ ფორმის შემოკლებული სახე იქნება.

ადვილი დასანახია, რომ $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული α^*-პროცესი და, მაშასადამე, α-პროცესიც, ტრივიალური შემთხვევების გარდა, ცალსახად არ განისაზღვრება. ამასთან, $\mathbb{A}_1$-თან დაკავშირებულ სხვადასხვა α^*-პროცესს შეიძლება ბიჯების განსხვავებული რაოდენობა ჰქონდეს. ცხადია, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების ნებისმიერი ისეთი ნორმალური მიმდევრობა, რომლის ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა, ცალსახად განსაზღვრული დასრულებადი α-პროცესით განისაზღვრება. პირიქითაც, ნებისმიერი დასრულებადი α-პროცესი ცალსახად განსაზღვრული ისეთი ნორმალური მიმდევრობით განისაზღვრება, რომლის ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა.

ორ α-პროცესს, α_1-სა და β_1-ს, ვუწოდოთ **შესაბამისი** ან **პარალელური**, თუ შესაბამისი ნორმალური მიმდევრობები

$$\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots \qquad \text{და} \qquad \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots$$

აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: მათი შესაბამისი წევრები ურთიერთკონგრუენტულია. მაშასადამე, ამ მიმდევრობებს ერთნაირი სასრული ან უსასრულო სიგრძე აქვს და პირველი წევრების გარდა, შესაბამისი წევრები წინადან შესაბამისი ოპერატორების მიმართ

მათი განსაზღვრებების გამოყენებით მიიღება.

თეორემა 7.4-ის საფუძველზე ადვილი დასანახია შემდეგი დებულების მართებულობა.

ლემა 7.10. *ვთქვათ* $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ *განსაზღვრება-სქემების მიმდევრობის ყოველი წევრის ტიპი ერთ-ერთია* I–IV, II′ *და* IV′ *ტიპებიდან. შემდეგ, ვთქვათ* $\mathbb{A}_1$ *და* $\mathbb{B}_1$ *არის* $\widetilde{\mathscr{T}}$ *თეორიის ურთიერთკონგრუენტული ფორმები, ხოლო* α_1 *არის* $\mathbb{A}_1$*-თან დაკავშირებული მოცემული* α*-პროცესი შესაბამისი ნორმალური* $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots$ *მიმდევრობით. მაშინ* $\mathbb{B}_1$*-თან დაკავშირებული და* α*-პროცესის* α_1 *პარალელური* α*-პროცესი* β_1*, შესაბამის ნორმალურ* $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots$ *მიმდევრობასთან ერთად, შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს.* β_1 *პროცესის* i*-ური ბიჯი* ($i = 1, 2, \ldots$) *ნიშნავს: (1) ვიპოვოთ* $\mathbb{B}_i$ *ფორმის ის წარმოებული* σ'_i *ოპერატორი, რომელიც შეესაბამება* $\mathbb{A}_i$ *ფორმის იმ წარმოებულ* σ_i *ოპერატორს, რომელზეც მისი განსაზღვრება გამოიყენება* $\mathbb{A}_{i+1}$ *ფორმის მისაღებად* ($(i-1)$*-ურ ბიჯზე,* $i = 2, 3, \ldots$*, ნაჩვენებია, რომ* $\mathbb{A}_i \simeq \mathbb{B}_i$*); (2)* σ'_i *ოპერატორზე გამოვიყენოთ მისი განსაზღვრება და აღვნიშნოთ, რომ ამ გამოყენებით მიღებული* $\mathbb{B}_{i+1}$ *ფორმა კონგრუენტულია* $\mathbb{A}_{i+1}$ *ფორმისა.* σ'_i *ოპერატორის განსაზღვრების საჭირო კერძო შემთხვევა ცალსახად განისაზღვრება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* σ'_i *ოპერატორის ტიპი ერთ-ერთია* I–IV *ტიპებიდან. ზოგად შემთხვევაში ყოველთვის შეიძლება დამატებითი შეზღუდვების შემოტანა, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავს* σ'_i *ოპერატორის განსაზღვრების საჭირო კერძო შემთხვევას.*

თეორემა 7.11. *ვთქვათ* $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ *განსაზღვრება-სქემების მიმდევრობის ყოველი წევრის ტიპი ერთ-ერთია* I–IV, II′ *და* IV′ *ტიპებიდან, ხოლო* $\mathbb{A}_1$ *და* $\mathbb{B}_1$ *არის* $\widetilde{\mathscr{T}}$ *თეორიის ურთიერთკონგრუენტული ფორმები.* $\mathbb{A}_1$*-თან დაკავშირებული ნებისმიერი* α*-პროცესისთვის* α_1 *არსებობს* $\mathbb{B}_1$*-თან დაკავშირებული ერთადერთი* α^**-პროცესი* β_1^**, რომელიც* α*-პროცესის* α_1 *პარალელურია.*

$\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის რომელიმე $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული ნებისმიერი α_1 α-პროცესისათვის α_1^*-ით აღვნიშნავთ იმავე $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებულ α^*-პროცესს, რომელიც α_1 პროცესის პარალელურია.

თუ $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანს პროპოზიციულ ცვლადებს დავუმატებთ, მივიღებთ თეორიას, რომელიც $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$-ით აღინიშნება. თუ $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანი პროპოზიციულ ცვლადებს უკვე შეიცავს, $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$ ერთმანეთს ემთხვევა. $\mathscr{T}$-დან $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$-ზე გადასვლისას ვინარჩუნებთ $\mathscr{T}$-ში შემოტანილ ყველა განსაზღვრებას, მათ შორის შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებებს. ხშირად თეორემის მართებულობა $\mathscr{T}$-სთვის ადვილად გამომდინარეობს მისი მართებულობიდან $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$-ში. ასეთ შემთხვევაში, საჭიროებისამებრ, დამტკიცებისას ვივარაუდებთ, რომ $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$ ერთმანეთს ემთხვევა, მკითხველის საგანგებო გაფრთხილების გარეშე (იხ. თეორემა 7.12-ის დამტკიცება).

ანალოგიურად, $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$ თეორიის ფორმებთან დაკავშირებული ცნებებიდან ხშირად ბუნებრივად მიიღება $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმების შესაბამისი ცნებები, რომლებიც იმავე ტერმინებით აღინიშნება. ასეთ შემთხვევაში ცნების განსაზღვრისასაც შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$ ერთმანეთს ემთხვევა. ამ გზით შემოტანილ ცნებებს განსაზღვრულად მივიჩნევთ მაშინაც, როცა $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$ ერთმანეთს არ ემთხვევა. მაგალითად, $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმების რომელიმე რიცხვითი მახასიათებლის განსასაზღვრად საკმარისია განსაზღვრება $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$ თეორიის ფორმებისათვის ჩამოვაყალიბოთ: რადგან $\mathscr{T}$ თეორიის ყოველი ფორმა იმავდროულად $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}$ თეორიის ფორმაცაა, ეს მახასიათებელი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმებისთვისაც განისაზღვრება. ამგვარ შემთხვევებში მკითხველის გაფრთხილების

გარეშე ვივარაუდებთ, რომ $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}_{\text{P}}$ ერთმანეთს ემთხვევა, ხოლო განსაზღვრების ჩამოყალიბების შემდეგ ცნებას შესაბამისი გზით განსაზღვრულად მივიჩნევთ იმ $\mathscr{T}$ თეორიებისთვისაც, რომლებიც $\mathscr{T}_{\text{P}}$-ს არ ემთხვევა.

ამ განყოფილების ბოლოსა და მე-8 თავში წარმოდგენილია შედეგები, რომლებიც [4] ნაშრომში მიღებულ შედეგებს განაზოგადებს.

შემდეგ თეორემას ე.წ. რთული (ჩადგმული) მათემატიკური ინდუქციით დავამტკიცებთ.

თეორემა 7.12. *ვთქვათ* $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ *განსაზღვრება-სქემების მიმდევრობის ყოველი წევრის ტიპი ერთ-ერთია* I *და* II *ტიპებიდან (შესაბამისად,* I, II *და* II′ *ტიპებიდან). მაშინ* $\widetilde{\mathscr{T}}$ *თეორიის ნებისმიერი ფიქსირებული* $\mathbb{A}_1$ *ფორმისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური* n_0 *რიცხვი, რომ* $\mathbb{A}_1$*-თან დაკავშირებული ნებისმიერი* α*-პროცესის ბიჯების რაოდენობა არ აღემატება* n_0*-ს. ამასთან,* $\mathbb{A}_1$*-თან დაკავშირებული ნებისმიერი* α*-პროცესით განსაზღვრული* $\widetilde{\mathscr{T}}$ *თეორიის ფორმების ნორმალური მიმდევრობის ბოლო* $\mathbb{A}_n$ *წევრი* $\mathscr{T}$ *თეორიის ფორმაა (შესაბამისად, კონგრუენტულია* $\mathscr{T}$ *თეორიის ისეთი* $\mathbb{A}$ *ფორმისა, რომლის შემოკლებული სახეცაა* $\mathbb{A}_1$*). გარდა ამისა, ასეთი მიმდევრობების ბოლო წევრები გრაფიკულად ტოლია (შესაბამისად, ურთიერთკონგრუენტულია).*

დამტკიცება. საკმარისია დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება. (a). ვთქვათ განსაზღვრება-სქემის $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ მიმდევრობის ყოველი წევრის ტიპი არის ერთ-ერთი I და II ტიპებიდან. მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი ფიქსირებული $\mathbb{A}_1$ ფორმისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური n_0 რიცხვი, რომ $\mathbb{A}_1$-თან დაკავშირებული ნებისმიერი α-პროცესის ბიჯების რიცხვი არ აღემატება n_0-ს. ამასთან, $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნორმალური მიმდევრობის ბოლო $\mathbb{A}_n$ წევრი, განსაზღვრული $\mathbb{A}_1$-თან დაკავშირებული თვითნებური α-პროცესით, განისაზღვრება ცალსახად.

მართლაც, ვთქვათ, დამტკიცებულია (a) დებულება. მაშინ თეორემის პირველი ნაწილი ადვილად გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\mathbb{A}_n$ ცალსახად არის განსაზღვრული. მეორე ნაწილის დამტკიცება ასე სრულდება: (a) დებულებიდან გამომდინარეობს (a^*) დებულება, რომლის ფორმულირებაც (a) დებულების ფორმულირებიდან მიიღება ფრაზის „I და II“ შეცვლით ფრაზით „I, II და II′“, ხოლო α სიმბოლოს შეცვლით α^* სიმბოლოთი. მაშასადამე, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ (a^*) დებულება დამტკიცებულია. შემდეგ, ვთქვათ,

$$\mathbb{A}'_1 \rightleftharpoons \mathbb{A}_1, \mathbb{A}'_2, \ldots \tag{1}$$

არის $\mathbb{A}_1$-თან დაკავშირებული ნებისმიერი მოცემული α-პროცესით α_1 განსაზღვრული ნორმალური მიმდევრობა, ხოლო

$$\mathbb{A}^*_1 \rightleftharpoons \mathbb{A}_1, \mathbb{A}^*_2, \ldots \tag{2}$$

არის α^*_1 α^*-პროცესით განსაზღვრული ნორმალური მიმდევრობა; ეს პროცესი α_1 α-პროცესის შესაბამისი α^*-პროცესია (იხ. თეორემა 7.11). (a^*) დებულების თანახმად, არსებობს მხოლოდ $\mathbb{A}_1$-ზე დამოკიდებული ისეთი ნატურალური n_0 რიცხვი, რომ (2) მიმდევრობის წევრების რაოდენობა m, და, მაშასადამე, (1) მიმდევრობის წევრების რაოდენობაც, n_0-ს არ აღემატება. დაბოლოს, იქიდან, რომ (2) მიმდევრობის ბოლო $\mathbb{A}^*_m$ წევრი ცალსახად არის განსაზღვრული, გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{A}_1$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{A}^*_m$ ფორმის შემოკლებული სახე. რჩება შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{A}'_m \simeq \mathbb{A}^*_m$, და გამოვიყენოთ (1) ნორმალური მიმდევრობის ნებისმიერობა, $\mathbb{A}^*_m$ ფორმის ერთადერთობა და კონგრუენტულობის

ტრანზიტიულობა.

დავამტკიცოთ (a) დებულება.

დავუშვათ, ℓ და m დადებითი ნატურალური რიცხვებია და (a) დებულება მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ისეთი ფორმისათვის, რომელშიც ℓ ნომრის მქონე შემამოკლებელი სიმბოლოების შემოსვლების რაოდენობა m-ზე ნაკლებია, ხოლო ℓ-ზე მეტი ნომრის მქონე შემამოკლებელი სიმბოლოების შემოსვლების რაოდენობა ნულია. $\ell = 1$ და $m = 1$ შემთხვევაში (a) დებულება ტრივიალურად მტკიცდება. საკმარისია ვაჩვენოთ დებულების მართებულობა $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი ისეთი $\mathbb{A}_1$ ფორმისათვის, რომელშიც ℓ ნომრის მქონე შემამოკლებელი სიმბოლოების შემოსვლების რაოდენობა $m+1$-ზე ნაკლებია, ხოლო ℓ-ზე მეტი ნომრის მქონე შემამოკლებელი სიმბოლოების შემოსვლების რაოდენობა ნულია.

მართლაც, ინდუქციური ბიჯის შესრულების შემდეგ (a) დებულების დამტკიცება ასე სრულდება: თუ $\ell = 1$, მაშინ m-ის მიმართ მარტივი მათემატიკური ინდუქციით (a) დებულება მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ფორმისათვის, რომელთა შემამოკლებელი სიმბოლოების ნომრები 1-ს არ აღემატება. თუ დავუშვებთ, რომ (a) დებულება მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ფორმისათვის, რომელთა შემამოკლებელი სიმბოლოების ნომრები K-ს არ აღემატება, მაშინ m-ის მიმართ მარტივი მათემატიკური ინდუქციით დავასკვნით, რომ (a) დებულება მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ფორმისათვის, რომელთა შემამოკლებელი სიმბოლოების ნომრები $K+1$-ს არ აღემატება. აქედან K-ის მიმართ მარტივი მათემატიკური ინდუქციით გამომდინარეობს (a) დებულების მართებულობა.

ვთქვათ, $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმის წყვილ-წყვილად განსხვავებული ნაწილების ისეთი არაცარიელი მიმდევრობა, რომ ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, K\}$-სთვის $\mathbb{B}_i$ ნაწილის მთავარი σ_i ოპერატორი ℓ ნომრის მქონე წარმოებული ოპერატორია და მის მოქმედების არეში იმავე ℓ ნომრის მქონე სხვა წარმოებული ოპერატორი არ შედის.[3] ცხადია, ასეთი ნაწილები არ გადაიფარება. $\mathbb{A}_1'$ იყოს გამოსახულება, რომელიც $\mathbb{A}_1$-დან მიიღება $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ ნაწილებში ყოველი შემამოკლებელი სიმბოლოს ზემოდან წერტილით მონიშვნით და ამ სიმბოლოების შესაბამისი ტიპის ძირითად სიმბოლოებად მიჩნევით. მაშინ $\mathbb{A}_1'$ იქნება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ისეთი ფორმა, რომელშიც ℓ ნომრის მქონე წარმოებული ოპერატორების რაოდენობა m-ზე ნაკლებია. დაშვების თანახმად, (a) დებულება $\mathbb{A}_1'$-სთვის მართებულია.

ახლა შევნიშნოთ, რომ (a) დებულების მართებულობა $\mathbb{A}_1$ ფორმისათვის და, მაშასადამე, თვით (a) დებულებაც ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი დებულებიდან.

<u>დებულება 1.</u> ვთქვათ, $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ განსაზღვრება-სქემების მიმდევრობის ყოველი წევრის ტიპი ერთ-ერთია I და II ტიპებიდან. $\mathbb{A}_1$ იყოს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი ფორმა, ხოლო $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ — მისი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ნაწილები, რომელთათვისაც (a) დებულება მართებულია. $\mathbb{A}_1'$ იყოს გამოსახულება, რომელიც $\mathbb{A}_1$-დან მიიღება $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ ნაწილებში ყოველი შემამოკლებელი სიმბოლოს ზემოდან წერტილით მონიშვნით და ამ მონიშნული სიმბოლოების შესაბამისი ტიპის ძირითად სიმბოლოებად მიჩნევით. მაშინ $\mathbb{A}_1'$ იქნება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა; უფრო ზუსტად, $\widetilde{\mathscr{T}_1}$ თეორიის ფორმა, სადაც $\mathscr{T}_1$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის გაფართოება აღნიშნული მონიშნული სიმბოლოებით. მონიშნული შემამოკლებელი სიმბოლო სრულიად ახალ სიმბოლოდ უნდა განვიხილოთ, რომელიც შესაბამისი მოუნიშ-

[3] დამტკიცების ამ ნაწილში საკმარისი იქნებოდა $K = 1$ შემთხვევის განხილვა. უფრო ზოგადად ვმსჯელობთ, რათა ეს მსჯელობა დამტკიცების სხვა ნაწილშიც გამოვიყენოთ.

ნავი სიმბოლოსაგან განსხვავდება. თუ (a) დებულება $\mathbb{A}'_1$-სთვის მართებულია, მაშინ იგი $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}_1$ ფორმისთვისაც მართებულია.

მართლაც, ამ დებულების გამოყენებით (a) დებულებისა და, მაშასადამე, თეორემა 7.12-ის დამტკიცება შეგვიძლია შემდეგნაირად დავასრულოთ.

დებულება 1-ის თანახმად, საკმარისია (a) დებულების მართებულობა $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ ნაწილებისათვის ვაჩვენოთ. დავაფიქსიროთ $i \in \{1, 2, \ldots, K\}$. $\mathbb{B}_i$ ნაწილი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\sigma\, \mathbb{B}_{i1} \cdots \mathbb{B}_{i\beta}$ სახით, სადაც σ არის ℓ ნომრის მქონე წარმოებული ოპერატორი, ხოლო $\mathbb{B}_{i1}, \ldots, \mathbb{B}_{i\beta}$ — მისი ოპერანდები; შემთხვევა $\beta = 0$ არ გამოირიცხება. $\mathbb{B}'_i$ იყოს გამოსახულება, რომელიც $\mathbb{B}_i$-დან მიიღება $\mathbb{B}_{i1}, \ldots, \mathbb{B}_{i\beta}$ ნაწილებში ყოველი შემამოკლებელი სიმბოლოს გემოდან წერტილით მონიშვნით და ამ სიმბოლოების შესაბამისი ტიპის ძირითად სიმბოლოებად მიჩნევით. ჩვენი დაშვების თანახმად, (a) დებულება მართებულია $\mathbb{B}_{i1}, \ldots, \mathbb{B}_{i\beta}$ ფორმებისათვის. იმავე დაშვებიდან ადვილად გამომდინარეობს მისი მართებულობა $\mathbb{B}'_i$ ფორმისთვისაც. $\mathbb{B}'_i$ ფორმაში ℓ ნომრის მქონე წარმოებული ოპერატორების რაოდენობა შეიძლება m იყოს ზუსტად მაშინ, როცა $m = 1$. მაგრამ $\mathbb{B}'_i$-თან დაკავშირებული α-პროცესის პირველი ბიჯი ცალსახად განისაზღვრება; იგი სათანადო განსაზღვრების კანონიკური გამოყენებაა, რომელიც $\mathbb{B}'_i$ შემოკლებული ფორმის მნიშვნელობას არ ცვლის. ამ ბიჯით მიღებულ ფორმაში ℓ ნომრის მქონე წარმოებული ოპერატორების რაოდენობა m-ზე ნაკლებია. აქედან, დებულება 1-ის თანახმად, გამომდინარეობს (a) დებულების მართებულობა $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_i$ ნაწილისათვის.

I <u>დებულების დამტკიცება.</u> $\dot{\mathbb{B}}_1, \ldots, \dot{\mathbb{B}}_K$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}'_1$ ფორმის ის ნაწილები, რომლებიც ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ ნაწილებს, და მათ $\widetilde{\mathscr{T}_1}$ თეორიის $\mathbb{A}'_1$ ფორმის **მონიშნული ნაწილები** ვუწოდოთ. $\mathbb{A}'_1$ ფორმის $\mathbb{B}_i$ ნაწილი გავაიგივოთ $\dot{\mathbb{B}}_i$ სიმბოლოსთან ისე, რომ $\dot{\mathbb{B}}_i$ ნაწილის ნაცვლად, თუ კონტექსტი საპირისპიროს არ მოითხოვს, ყოველთვის $\dot{\mathbb{B}}_i$ სიმბოლო დავწეროთ. ეს სიმბოლო დამატებით საგნობრივ ან პროპოზიციულ კონსტანტად გვესმის იმის მიხედვით, $\mathbb{A}'_1$ ფორმის $\mathbb{B}_i$ ნაწილი ტერმია თუ ფორმულა. თუმცა, $\mathbb{A}'_1$ ფორმასთან დაკავშირებული α-პროცესების განხილვისას $\dot{\mathbb{B}}_i$ სიმბოლოში, უფრო ზუსტად, $\dot{\mathbb{B}}_i$ სიმბოლოს ყოველ შემოსვლაში, მისით აღნიშნული ნაწილი უნდა ვიგულისხმოთ და წარმოებული ოპერატორების განსაზღვრებების საჭირო კერძო შემთხვევების პოვნისას მისი თავისუფალი ასოები გავითვალისწინოთ ($i = 1, 2, \ldots, K$).

პირობის თანახმად, (a) დებულება მართებულია $\mathbb{A}'_1$ ფორმისათვის და თითოეული $\mathbb{B}_i$ ფორმისათვის. ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური m_1 და n'_i რიცხვები, რომ $\mathbb{A}'_1$-თან დაკავშირებული ნებისმიერი α-პროცესის ბიჯების რაოდენობა $\leq m_1$, ხოლო $\mathbb{B}_i$-თან დაკავშირებულისა $\leq n'_i$. ამასთან, ასეთი პროცესები ცალსახად განსაზღვრავს $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'_i$ ფორმებს ($i = 1, 2, \ldots, K$). ვთქვათ, n_i არის $\mathbb{A}'$ ფორმაში $\mathbb{B}_i$ მეტაცვლადის შემოსვლების რაოდენობა. ცხადია, $n_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \ldots, K$). $\mathbb{A}$ იყოს $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathbb{A}'$-დან მიიღება $\dot{\mathbb{B}}_1, \ldots, \dot{\mathbb{B}}_K$ მეტაცვლადების ნაცვლად $\mathbb{B}'_1, \ldots, \mathbb{B}'_K$ ფორმების უშუალო ჩასმით. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\mathbb{A}_1$-თან დაკავშირებული α-პროცესების ბიჯების რაოდენობა არ აღემატება $m_1 + \sum_{i=1}^{K} n_i n'_i$-ს, რომ ასეთი პროცესები $\mathscr{T}$ თეორიის ერთადერთ ფორმას განსაზღვრავს და ეს ფორმა $\mathbb{A}$ არის.

$\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებულ α-პროცესს ვუწოდოთ **რეგულარული**, თუ მისი გარკვეული საწყისი ნაწილი ბუნებრივად შეესაბამება რომელიმე α-პროცესს, რომელიც $\mathbb{A}'_1$-ს $\mathbb{A}'$-ში გარდაქმნის. ეს ნიშნავს, რომ ამ უკანასკნელი პროცესის შესაბამის ნორმალურ მიმდევრობაში $\dot{\mathbb{B}}_1, \ldots, \dot{\mathbb{B}}_K$ მეტაცვლადების ნაცვლად $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ ნაწილების ჩასმით მიიღება პირველი, $\mathbb{A}_1$-თან დაკავშირებული პროცესის შესაბამისი ნორმალური

მიმდევრობის გარკვეული საწყისი ნაწილი.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $\mathbb{A}_1$-თან დაკავშირებული α-პროცესი რეგულარულია, მაშინ ამ α-პროცესის ბიჯების რაოდენობა არ აღემატება $m_1 + \sum_{i=1}^{K} n_i n_i'$-ს და შესაბამისი ნორმალური მიმდევრობის ბოლო წევრია $\mathbb{A}$.

მართლაც, ვთქვათ, $\mathbb{A}_1''$ არის მოცემული რეგულარული α-პროცესის აღნიშნული საწყისი ნაწილის შესაბამისი ნორმალური მიმდევრობის ბოლო წევრი. იგი $\mathbb{A}'$-დან მიიღება $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ მეტაცვლადების ნაცვლად $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ ნაწილების უშუალო ჩასმით. განხილული α-პროცესის დარჩენილი ნაწილი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გარდაქმნის $\mathbb{A}_1''$-ში $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ ფორმების ჩასმულ შემოსვლებს. თითოეული $\mathbb{B}_i$ ჩასმული შემოსვლის გარდაქმნას არაუმეტეს n_i' ბიჯი სჭირდება. რადგან ეს შემოსვლები წყვილ-წყვილად არ გადაიფარება, მნიშვნელობა არ აქვს, რომელიმე $\mathbb{B}_i$ ფორმის ჩასმული შემოსვლა პროცესის მეორე ნაწილის ზედიზედ ბიჯებით გარდაიქმნება თუ იმავე ურთიერთრიგის მქონე ბიჯებით, რომლებიც მეორე ნაწილში ნებისმიერადაა განაწილებული. ამასთან, ყოველი $\mathbb{B}_i$ ჩასმული შემოსვლა პროცესის მეორე ნაწილით $\mathbb{B}_i'$-ში გარდაიქმნება ($i = 1, 2, \ldots, K$). მაშასადამე, $\mathbb{A}_1''$ გარდაიქმნება $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმად.

ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება.

ვთქვათ, მოცემულია $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული α-პროცესი და მისი შესაბამისი $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების ნორმალური მიმდევრობაა

$$\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots \tag{3}$$

მაშინ არსებობს ისეთი რეგულარული α-პროცესი, რომლის შესაბამისი ნორმალური მიმდევრობის წევრების რაოდენობა (3) მიმდევრობის წევრების რაოდენობაზე ნაკლები არ არის; მაშასადამე, (3) მიმდევრობა სასრულია. ამასთან, ამ მიმდევრობების ბოლო წევრები $\mathscr{T}$ თეორიის ერთი და იგივე ფორმაა.

ამ დებულების დასამტკიცებლად (3) მიმდევრობა გარდავქმნათ ნორმალურ მიმდევრობად, წევრების რაოდენობის შეუმცირებლად და კიდურა წევრების შეუცვლელად, ისე, რომ მისი შესაბამისი α-პროცესი რეგულარული გახდეს.

ვთქვათ, σ_i არის იმ წარმოებული ოპერატორის შემოსვლა, რომლის მიმართაც მისი განსაზღვრება გამოიყენება $\mathbb{A}_i$ ფორმის $\mathbb{A}_{i+1}$ ფორმად გარდაქმნისას ($i = 1, 2, \ldots$). განვსაზღვროთ ტერმინი „$\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$ ნაწილების წინამორბედი ფორმების მონიშნული შემოსვლები“ (3) მიმდევრობის ფორმებში. $\mathbb{B}_i$ ნაწილის წინამორბედი ფორმის მონიშნულ შემოსვლას ვუწოდოთ „i-ური მონიშნული შემოსვლა“, „i-ური მონიშნული ნაწილი“ ან „i ნომრის მქონე მონიშნული ნაწილი“ ($i = 1, 2, \ldots, K$). $\mathbb{A}_1$ ფორმის მონიშნული ნაწილებია $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_K$; კერძოდ, $\mathbb{B}_i$ არის $\mathbb{A}_1$ ფორმის i-ური მონიშნული ნაწილი. ისინი წყვილ-წყვილად არ გადაიფარება და ყოველი i-ური მონიშნული ნაწილი $\mathbb{B}_i$ ფორმის წინამორბედი ფორმაა. ვთქვათ, $j \geq 1$ და $\mathbb{A}_j$ ფორმის i-ური მონიშნული ნაწილები ($i = 1, 2, \ldots, K$) უკვე განსაზღვრულია ისე, რომ წყვილ-წყვილად არ გადაიფარება და ყოველი i-ური მონიშნული ნაწილი $\mathbb{B}_i$ ფორმის წინამორბედია. მაშინ $\mathbb{A}_{j+1}$ ფორმის i-ური მონიშნული ნაწილები შემდეგნაირად განისაზღვრება.

შემთხვევა I. σ_j ოპერატორის მოქმედების არეში მონიშნული ნაწილები არ შედის და თვით σ_j-ც მონიშნულ ნაწილში არ მდებარეობს. ამ შემთხვევაში $\mathbb{A}_{j+1}$ მიიღება $\mathbb{A}_j$-დან მონიშნული ნაწილებისაგან განცალკევებული ნაწილის ახალი ნაწილით შეცვლით. განსაზღვრებით, $\mathbb{A}_{j+1}$ ფორმის i-ური მონიშნული ნაწილებია ის და მხოლოდ ის ნაწილები,

რომლებიც ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{A}_j$ ფორმის i-ურ მონიშნულ ნაწილებს.

შემთხვევა II. σ_j ოპერატორის მოქმედების არეში $\mathbb{A}_j$ ფორმის ერთი ან რამდენიმე მონიშნული ნაწილი შედის. $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_{j_0}$ იყოს ასეთი ნაწილების სრული გადათვლა, ხოლო $\mathbb{C}$ — $\mathbb{A}_j$ ფორმის σ_j ოპერატორის შესაბამისი ნაწილი. ამ შემთხვევაში $\mathbb{C}$ და დანარჩენი, $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_{j_0}$-საგან განსხვავებული მონიშნული ნაწილები წყვილ-წყვილად არ გადაიფარება. ვთქვათ, $\sigma_j\, \mathbb{E}_1 \cdots \mathbb{E}_{j_1}$ ——— $\mathbb{E}$ არის σ_j ოპერატორის განსაზღვრება, ხოლო $\sigma_j \mathbb{E}'_1 \cdots \mathbb{E}'_{j_1}$ ———$\mathbb{E}'$ — მისი ის კერძო შემთხვევა, რომლის გამოყენებითაც $\mathbb{A}_j$-დან $\mathbb{A}_{j+1}$ მიიღება: $\mathbb{A}_j$-ში $\sigma_j\, \mathbb{E}'_1 \cdots \mathbb{E}'_{j_1}$ ფორმის ფიქსირებული შემოსვლა $\mathbb{E}'$ ფორმით იცვლება. აქ $\mathbb{E}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, აგებული მეტაცვლადების

$$\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_{j_1}, \mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_{k_1}, \tag{4}$$

გამოყენებით; $\mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_{k_1}$ არის წარმოებული σ_j ოპერატორის განსაზღვრების დამატებითი მეტაასოები, ხოლო $\mathbb{E}'$ მიიღება $\mathbb{E}$-დან მეტაცვლადების მნიშვნელობათა ცალსახად განსაზღვრული დასაშვები სისტემის ჩასმით:

$$\mathbb{E}'_1, \dots, \mathbb{E}'_{j_1}, \mathsf{b}'_1, \dots, \mathsf{b}'_{k_1}$$

ეს არის (4) მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემა. ყოველი $\mathbb{C}_i$ არის სათანადოდ არჩეული $\mathbb{E}'_{i_0}$-ის ნაწილი. $\mathbb{E}_{i_0}$-ს $\mathbb{E}$-ში ერთი ან რამდენიმე შემოსვლა აქვს. მათ ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{E}'_{i_0}$ ფორმის შემოსვლები $\mathbb{E}'$-ში, ამ უკანასკნელთ კი — $\mathbb{C}_i$ ნაწილის ამდენივე შემოსვლა $\mathbb{E}'$-ში. განსაზღვრებით, ეს შემოსვლები $\mathbb{E}'$-ში, სადაც $\mathbb{E}'$ $\mathbb{A}_{j+1}$-ში $\sigma_j\, \mathbb{E}'_1 \cdots \mathbb{E}'_{j_1}$ ნაწილის ადგილას მდებარეობს, არის $\mathbb{A}_{j+1}$ ფორმის მონიშნული ნაწილები იმავე ნომრით, რაც $\mathbb{C}_i$-ს აქვს ($i = 1, 2, \dots, j_0$). $\mathbb{A}_{j+1}$-ში დანარჩენი მონიშნული ნაწილები და მათი ნომრები I შემთხვევის მსგავსად განისაზღვრება. ისინი $\mathbb{E}'$-ის გარეთ მდებარეობს და $\mathbb{A}_j$-ის იმ მონიშნულ შემოსვლებს შეესაბამება, რომლებიც $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_{j_0}$-საგან განსხვავდება; აქაც გამოიყენება I შემთხვევის წესი.

შემთხვევა III. σ_j არის მონიშნული $\mathbb{C}$ ნაწილის ოპერატორი; σ_j შეიძლება კონსტანტაც იყოს. მაშინ $\mathbb{C}'$ ნაწილი, რომელიც $\mathbb{C}$ ნაწილს ცვლის, იქნება $\mathbb{A}_{j+1}$ ფორმის მონიშნული ნაწილი იმავე ნომრით, რაც $\mathbb{C}$-ს აქვს. დანარჩენი მონიშნული ნაწილები და მათი ნომრები I შემთხვევის მსგავსად განისაზღვრება; ისინი $\mathbb{C}'$-ის გარეთ მდებარეობს.

ცხადია, სამივე შემთხვევაში $\mathbb{A}_{j+1}$ ფორმის მონიშნული ნაწილები წყვილ-წყვილად არ გადაიფარება და ყოველი i-ური მონიშნული ნაწილი $\mathbb{B}_i$ ფორმის წინამორბედია.

აღწერილი პროცესი (3) მიმდევრობის ყოველი $\mathbb{A}_j$ წევრისათვის ცალსახად განსაზღვრავს მონიშნულ ნაწილებს ისე, რომ ისინი წყვილ-წყვილად არ გადაიფარება და ყოველი i-ური მონიშნული ნაწილი $\mathbb{B}_i$ ფორმის წინამორბედია.

გარკვეული აზრით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ I შემთხვევაში მონიშნული ნაწილები არ იცვლება; II შემთხვევაში ერთი i-ური მონიშნული ნაწილის ნაცვლად შეიძლება რამდენიმე ასეთივე i-ური ნაწილი წარმოიქმნას; და მხოლოდ III შემთხვევაში გარდაიქმნება ერთი მონიშნული ნაწილი იმავე ნომრის მქონე მონიშნულ ნაწილად, რომელიც მისგან, როგორც $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, განსხვავდება.

შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ (3) მიმდევრობის შესაბამისი α-პროცესი არარეგულარულია. მაშინ არსებობს ისეთი $j \in \{2, 3, \dots\}$, რომ σ_{j-1}-ისათვის III შემთხვევა სრულდება, ხოლო σ_j-ისათვის — I ან II შემთხვევა. σ_j ოპერატორს ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{A}_{j-1}$-ში ოპერატორის ცალსახად განსაზღვრული შემოსვლა; აღვნიშნოთ იგი σ'_j-ით. შემ-

დეგ, $\mathbb{A}_{j1}$-ით აღვნიშნოთ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, რომელიც $\mathbb{A}_{j-1}$-დან მიიღება σ'_j-ის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენებით.

თუ σ_j-ისათვის I შემთხვევა სრულდება, მაშინ $\mathbb{A}_{j+1}$ მიიღება $\mathbb{A}_{j1}$-დან σ'_{j-1}-ის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენებით. აქ σ'_{j-1} არის $\mathbb{A}_{j1}$ ფორმის ის ოპერატორი, რომელიც ბუნებრივად შეესაბამება σ_{j-1} ოპერატორს; ეს ერთი და იმავე ოპერატორის შემოსვლებია. ამრიგად, თუ (3) მიმდევრობაში $\mathbb{A}_j$ წევრს $\mathbb{A}_{j1}$ ფორმით შევცვლით, მივიღებთ $(3')$ მიმდევრობას, რომლისთვისაც შემდეგი პირობა სრულდება:

(a) ნორმალური $(3')$ მიმდევრობა (3)-დან მიიღება $\mathbb{A}_j$ წევრის ნაცვლად „ახალი წევრების“ $\mathbb{A}_{j1}, \dots, \mathbb{A}_{j\gamma}$ ჩასმით ისე,[4] რომ „ძველ წევრებში“ მონიშნული ნაწილები და მათი ნომრები უცვლელი რჩება. ვიგულისხმოთ, რომ $(3')$ მიმდევრობისათვის მონიშნული ნაწილებისა და მათი ნომრების ზემოთ მოცემული განსაზღვრება შენარჩუნებულია. ამასთან, $\mathbb{A}_{j-1}$-დან $\mathbb{A}_{j1}$-ზე გადასვლა ხდება ოპერატორით, რომლისთვისაც I ან II შემთხვევა სრულდება. $\mathbb{A}_{j\gamma}$-დან $\mathbb{A}_{j+1}$-ზე გადასვლა, ისევე როგორც $\mathbb{A}_{jk}$-დან $\mathbb{A}_{j,k+1}$-ზე გადასვლა $(k = 1, 2, \dots, \gamma - 1)$, ხდება ოპერატორით, რომლისთვისაც III შემთხვევა სრულდება.

ახლა ვივარაუდოთ, რომ σ_j ოპერატორისათვის II შემთხვევა სრულდება. მაშინ σ_j-ს ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{A}_{j-1}$ ფორმის σ'_j ოპერატორი, რომლის მოქმედების არეში მონიშნული ნაწილები მდებარეობს. $\mathbb{A}_{j1}$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}_{j-1}$-დან σ'_j ოპერატორის მიმართ მისი განსაზღვრების გამოყენებით მიღებული ფორმა. თუ σ_{j-1} ოპერატორი σ'_j-ის მოქმედების არეში შედის, მაშინ σ_{j-1} შედის რომელიმე i-ურ მონიშნულ $\mathbb{C}$ ნაწილში, რომელიც σ'_j ოპერატორის მოქმედების არეში მდებარეობს. $\mathbb{C}$ ნაწილს შეესაბამება $\mathbb{C}$ ფორმის ერთი ან რამდენიმე შემოსვლა $\mathbb{A}_{j1}$-ში; ეს მონიშნული შემოსვლები $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_\gamma$-ით აღვნიშნოთ. მათში σ_{j-1} ოპერატორს ბუნებრივად შეესაბამება $\sigma^1_{j-1}, \dots, \sigma^\gamma_{j-1}$ ოპერატორები, რომლებიც σ_{j-1} ოპერატორის შემოსვლებია. ამ ოპერატორების მიმართ მათი განსაზღვრებების ნებისმიერი რიგით გამოყენებით მივიღებთ $\mathbb{A}_{j2}, \dots, \mathbb{A}_{j,\gamma+1}$ ფორმებს, სადაც $\mathbb{A}_{j,\gamma+1}$ ემთხვევა $\mathbb{A}_{j+1}$-ს. ადვილი დასანახია, რომ თუ (3) მიმდევრობაში $\mathbb{A}_j$ წევრს $\mathbb{A}_{j1}, \dots, \mathbb{A}_{j\gamma}$ ახალი წევრებით შევცვლით, მიღებული $(3')$ მიმდევრობისათვის (a) პირობა შესრულდება. დაბოლოს, თუ σ_{j-1} არ შედის σ'_j ოპერატორის მოქმედების არეში, მაშინ (3) მიმდევრობაში $\mathbb{A}_j$-ის ნაცვლად $\mathbb{A}_{j1}$-ის ჩასმით მივიღებთ $(3')$ მიმდევრობას, რომლისთვისაც ასევე სრულდება (a) პირობა.

აღვნიშნოთ, რომ მოყვანილი მსჯელობა ემყარება შემდეგ ფაქტს: $\mathbb{A}_{j1}$ ფორმის $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_\gamma$ სიმბოლოებით აღნიშნული ნაწილები ერთნაირად გარდაიქმნება, როდესაც $\sigma^1_{j-1}, \dots, \sigma^\gamma_{j-1}$ ოპერატორების მიმართ მათი განსაზღვრებები გამოიყენება. ეს შეიძლება აღარ სრულდებოდეს, თუ II′ ტიპის განსაზღვრება-სქემები დაიშვება. განსაკუთრებით არსებითია, რომ შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებების გამოყენების რიგის შეცვლა დამატებითი მეტაასოების მნიშვნელობათა დასაშვებ სისტემებს არ ცვლის. ასევე მნიშვნელოვანია, რომ განსაზღვრებების გამოყენებების შესაბამისი შეცვლები თავისუფალია.

ახლა ვივარაუდოთ, რომ განხილული j რიცხვი უმცირესია შესაძლო მნიშვნელობებს შორის. ამ შემთხვევაში (3)-დან მითითებული გზით მიღებული მიმდევრობა $[2]$-ით აღვნიშნოთ, მისგან იმავე გზით მიღებული მიმდევრობა — $[3]$-ით, და ა.შ.; თვით (3) მიმდევრობა აგრეთვე $[1]$-ით აღვნიშნოთ. (3) მიმდევრობის **„სწორი მონაკვეთი“** ვუწოდოთ მისი მაქსიმალური სიგრძის $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_\delta$ საწყის მონაკვეთს, რომლის ყოველი წევრი, მეორიდან დაწყებული, წინადან მიიღება ოპერატორით, რომლისთვისაც I ან II შემ-

[4] ამ შემთხვევაში $\gamma = 1$.

თხვევა სრულდება. ანალოგიურად განისაზღვრება $[i)$ მიმდევრობის სწორი მონაკვეთი $(i = 2, 3, \dots)$. ცხადია, $j \geq \delta + 1$ და $\delta \geq 1$. ადვილი დასანახია, რომ $[1 + j - \delta)$ მიმდევრობის სწორი მონაკვეთის სიგრძეა $\delta + 1$, ხოლო თითოეული $[1), [2), \dots, [j - \delta)$ მიმდევრობისა — δ. ნებისმიერი $[i)$ მიმდევრობის სწორი მონაკვეთი არის $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული, i-ზე დამოკიდებული სათანადოდ არჩეული რეგულარული α-პროცესის საწყისი ნაწილის შესაბამისი მიმდევრობის ნაწილი. ამიტომ მისი სიგრძე m_1-ს არ აღემატება. ახლა ცხადია, რომ (3)-დან $[2)$, $[3)$ და ა.შ. მიმდევრობების მიღების პროცესი დასრულებადია; წინააღმდეგ შემთხვევაში მათი სწორი მონაკვეთების სიგრძეები ზემოდან შეუზღუდავი იქნებოდა. ვთქვათ,

$$\mathbb{A}_1^*, \dots, \mathbb{A}_\beta^*, \mathbb{A}_{\beta+1}^*, \dots \tag{5}$$

არის განხილული პროცესით მიღებული ბოლო მიმდევრობა, ხოლო β — მისი სწორი მონაკვეთის სიგრძე. ყოველი $i \in \{2, 3, \dots, \beta\}$-სთვის $\mathbb{A}_i^*$ მიიღება $\mathbb{A}_{i-1}^*$-დან წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების გამოყენებით, რომლისთვისაც I ან II შემთხვევა სრულდება; ხოლო $i \in \{\beta + 1, \beta + 2, \dots\}$-სთვის — ოპერატორის განსაზღვრებით, რომლისთვისაც III შემთხვევა სრულდება. $\mathbb{A}_\beta^*$ ფორმის i-ური მონიშნული ნაწილები $\mathbb{B}_i$ ფორმის შემოსვლებია; $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_K$ ფორმებისათვის თეორემა მართებულია; მონიშნული ნაწილები არ გადაიფარება, ხოლო III შემთხვევის შესაბამისი ოპერატორები მონიშნულ ნაწილებში მდებარეობს. აქედან გამომდინარეობს (5) მიმდევრობის სასრულობა. რადგან მისი წევრების რაოდენობა (3) მიმდევრობის წევრების რაოდენობაზე ნაკლები არ არის, (3) მიმდევრობაც სასრულია და მისი ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა. (5) მიმდევრობის აგებიდან გამომდინარეობს, რომ მისი კიდურა წევრები (3) მიმდევრობის შესაბამის კიდურა წევრებს ემთხვევა. მაშასადამე, (5) მიმდევრობის ბოლო $\mathbb{A}_\lambda^*$ წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა. $\mathbb{A}_\lambda^*$ ფორმაში მონიშნული ნაწილების გარეთ წარმოებული ოპერატორი არ არის, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს ფორმა $\mathscr{T}$ თეორიას არ ეკუთვნოდა. აქედან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{A}_1$ ფორმასთან დაკავშირებული, (5) მიმდევრობის შესაბამისი α-პროცესი რეგულარულია. □

წინა თეორემის დამტკიცებიდან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.13. *ვთქვათ* $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \dots$ *განსაზღვრება-სქემების მიმდევრობის ყოველი წევრის ტიპი ერთ-ერთია* I, II *და* II′ *ტიპებიდან. იმისათვის, რომ ისეთი* $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n$ *ნორმალური მიმდევრობის წევრების რაოდენობა, რომლის ბოლო წევრიც* $\mathscr{T}$ *თეორიის ფორმაა, იყოს მინიმალური (შესაბამისად, მაქსიმალური), საკმარისია, რომ ყოველი* $i \in \{2, 3, \dots, n\}$*-სთვის* $\mathbb{A}_i$ *ფორმა მიიღებოდეს* $\mathbb{A}_{i-1}$*-დან შესაფერისი განსაზღვრების გამოყენებით ისეთ წარმოებულ ოპერატორზე, რომელსაც მოქმედების მინიმალური (შესაბამისად, მაქსიმალური) არე აქვს.*

შედეგი. *ვთქვათ* $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \dots$ *განსაზღვრება-სქემების მიმდევრობის ყოველი წევრის ტიპი ერთ-ერთია* I, II *და* II′ *ტიპებიდან, ხოლო* $\mathbb{A}_1$ *არის* $\mathscr{T}$ *თეორიის* $\mathbb{A}$ *ფორმის შემოკლებული სახე. იმისათვის, რომ* $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n = \mathbb{A}$ *სახის ნორმალური მიმდევრობის წევრების რაოდენობა მინიმალური იყოს, საკმარისია ეს მიმდევრობა კანონიკური იყოს.*

შენიშვნა. ზოგჯერ გამოიყენება შემამოკლებელი სიმბოლოების ისეთი განსაზღვრებები, რომლებზეც ზემოთ მიღებული შედეგები არ ვრცელდება. მაგალითად, თუ მათ შორის

გვხვდება 2.5.2 განყოფილების (1) განსაზღვრება, მაშინ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ზოგიერთი ფორმა შეიძლება არ იყოს $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმის შემოკლებული სახე. ასეთი ფორმის მაგალითია $\sigma\,\mathsf{x}\,\mathsf{y}$ ტერმი, სადაც x და y საგნობრივი ცვლადებია.

თავი 8

წარმოებული ოპერატორებისა და შემოკლებული ფორმების ზოგიერთი რიცხვითი მახასიათებელი, მათი გამოთვლისა და შემოკლებული ფორმიდან ფორმის აღდგენის ალგორითმული პროცესები

8.1 წარმოებული ოპერატორებისა და შემოკლებული ფორმების ზოგიერთი რიცხვითი მახასიათებელი და მათი ძირითადი თვისებები

ამ თავში ვიგულისხმებთ, რომ ყოველი განსაზღვრება-სქემის ტიპი ერთ-ერთია I, II და II′ ტიპებიდან, თუ კონტექსტიდან საპირისპირო ცხადად არ გამომდინარეობს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია შემოვიტანოთ წარმოებული ოპერატორებისა და შემოკლებული ფორმების ზოგიერთი მნიშვნელოვანი რიცხვითი მახასიათებელი.

ვთქვათ $\mathbb{A}_1$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის შემოკლებული ფორმა, ხოლო $\mathbb{B}_1$ — $\mathbb{A}_1$ ფორმის რომელიმე ნაწილი. ცხადია, $\mathbb{A}_1$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა. შემდეგი სახის ნორმალური მიმდევრობების წევრთა რაოდენობების მაქსიმუმს, შესაბამისად მინიმუმს,

$$\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_n, \tag{1}$$

სადაც $\mathbb{A}_n$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა, ვუწოდებთ $\mathbb{A}_1$ **შემოკლებული ფორმის ზედა**, შესაბამისად **ქვედა ინდექსს**. ვთქვათ a არის სიმბოლო, რომელიც არ გვხვდება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ანბანში და განიხილება როგორც არაკვანტორული პროპოზიციული ან საგნობრივი ასო, იმის მიხედვით, $\mathbb{B}_1$ ფორმულაა თუ ტერმი. $\mathbb{A}'_1$-ით აღვნიშნოთ შემოკლებული ფორმა, რომელიც $\mathbb{A}_1$-დან მიიღება $\mathbb{B}_1$ ნაწილის ნაცვლად a-ს ჩასმით. გარდა ამისა, ვთქვათ $\mathbb{A}$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის (უფრო ზუსტად, $\mathscr{T}$-დან a სიმბოლოს შესაბამის ასოდ დამატებით მი-

ღებული თეორიის) ისეთი ფორმა, რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{A}_1'$. a ასოს შემოსვლათა რაოდენობას $\mathbb{A}$-ში ვუწოდებთ $\mathbb{A}_1$ **შემოკლებული ფორმის** $\mathbb{B}_1$ **ნაწილის ჯერადობას**. ამ განსაზღვრების კორექტულობა ადვილად გამომდინარეობს 7.6 თეორემიდან. იმავე რიცხვს ვუწოდებთ b **სიმბოლოს (შემოსვლის) ჯერადობას**, თუ $\mathbb{B}_1$ არის $\mathbb{A}_1$ შემოკლებული ფორმის მინიმალური ნაწილი, რომელიც შეიცავს b სიმბოლოს (შემოსვლას). $\mathbb{B}_1$ ნაწილის b **სიმბოლოს (შემოსვლის) ჯერადობა** $\mathbb{B}_1$ **ნაწილის მიმართ** ნიშნავს b სიმბოლოს (შემოსვლის) ჯერადობას თვით $\mathbb{B}_1$ ფორმაში.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ (1) ფორმებისთვის „მონიშნულ შემოსვლებს“ განვსაზღვრავთ ისევე, როგორც 7.12 თეორემის დამტკიცებაში (ამ შემთხვევაში $K = 1$), მაშინ $\mathbb{A}_n$-ში მონიშნულ შემოსვლათა რაოდენობა ტოლია $\mathbb{A}_1$ ფორმის $\mathbb{B}_1$ ნაწილის ჯერადობისა. ამასთან, $\mathbb{A}_n$-ში ყოველი მონიშნული შემოსვლა კონგრუენტულია $\mathscr{T}$ თეორიის ნებისმიერი ფორმისა, რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{B}_1$. უკანასკნელი მტკიცება უფრო ძლიერი სახითაც სრულდება, თუ ნორმალური (1) მიმდევრობა კანონიკურია (შესაბამისად, თუ $\mathrm{D}1, \mathrm{D}2, \ldots$ მიმდევრობიდან ყოველი განსაზღვრება-სქემის ტიპია I ან II). კერძოდ, ამ შემთხვევაში $\mathbb{A}_n$-ში ყოველი მონიშნული შემოსვლა არის $\mathscr{T}$ თეორიის ის ფორმა (შესაბამისად, ის ცალსახად განსაზღვრული ფორმა), რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{B}_1$ (იხ. თეორემები 7.8 და 7.6).

ახლა ვთქვათ σ არის n-ადგილიანი წარმოებული ოპერატორი, ხოლო $\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_n$ — წყვილ-წყვილად განსხვავებული სიმბოლოები, რომლებიც არ გვხვდება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ანბანში და განიხილება როგორც არაკვანტორული ასოები ისე, რომ $\sigma\,\mathsf{c}_1 \cdots \mathsf{c}_n$ იყოს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა (უფრო ზუსტად, $\widetilde{\mathscr{T}}$-დან $\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_n$ სიმბოლოების შესაბამის ასოებად დამატებით მიღებული გაფართოებული თეორიის ფორმა). $\sigma\,\mathsf{c}_1 \cdots \mathsf{c}_n$ შემოკლებული ფორმის ზედა, შესაბამისად ქვედა ინდექსს ვუწოდებთ σ **წარმოებული ოპერატორის ზედა**, შესაბამისად **ქვედა ინდექსს**. ამ შემოკლებული ფორმის c_j სიმბოლოს ჯერადობას ვუწოდებთ σ **წარმოებული ოპერატორის** j**-ურ ინდექსს** (ან j **ნომრის ინდექსს**), $j = 1, 2, \ldots, n$. გარდა ამისა, σ **წარმოებული ოპერატორის** j**-ური მარტივი ინდექსი** ეწოდება c_j ოპერანდის შემოსვლათა რაოდენობას იმ შემოკლებულ ფორმაში, რომელიც $\sigma\,\mathsf{c}_1 \cdots \mathsf{c}_n$-დან მიიღება σ ოპერატორის განსაზღვრების გამოყენებით.

შემოკლებულ ფორმებთან დაკავშირებულ სხვადასხვა ცნებას, ტერმინსა და მათ განსაზღვრებებს „ბუნებრივად“ გამოვიყენებთ მეტაცვლადებით აგებული შემოკლებული ფორმების მიმართაც. აქ ყოველი მეტაცვლადი ან კვანტორული მეტაასოა, ან არაკვანტორული მეტაასო, ან ისეთი მეტაცვლადი, რომელიც მეტაასო არ არის და რომლის მნიშვნელობათა არე ფორმულების ან ტერმების რომელიმე კლასია. ამ მიზნით მეტაცვლადებით აგებულ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის განხილულ ფორმებს $\mathscr{T}_a$ თეორიების შემოკლებულ ფორმებად მივიჩნევთ. $\mathscr{T}_a$ არის $\mathscr{T}$-თეორია, რომლის ანბანიც $\mathscr{T}$ თეორიის ანბანიდან მიიღება განხილულ ფორმებში შემავალი მეტაცვლადების დამატებით: ყოველი კვანტორული, შესაბამისად, არაკვანტორული მეტაასო ემატება როგორც შესაბამისი ტიპის დამატებითი კვანტორული, შესაბამისად, არაკვანტორული ასო; დანარჩენი მეტაცვლადები კი ემატება როგორც დამატებითი არაკვანტორული პროპოზიციული ან საგნობრივი ასოები იმის მიხედვით, მათი მნიშვნელობათა არე ფორმულების კლასია თუ ტერმების კლასი. ვიგულისხმოთ, რომ დამატებითი კვანტორული ასოს ინდექსი ნებისმიერი ძირითადი კვანტორული ასოს ინდექსზე მეტია. ამ შეთანხმებით შემოკლებულ ფორმებთან, კერძოდ, ფორმებთან დაკავშირებული ცნებებისა და ტერმინების სრული ანალოგები განსაზღვრული იქნება მეტაცვლა-

დებით აგებული შემოკლებული ფორმების შემთხვევაშიც. მსჯელობის გასამარტივებლად ხშირად გამოვტოვებთ ფრაზას „მეტაცვლადებით აგებული“, თუ ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს. მაგალითად, გამოთქმის „მეტაცვლადებით აგებული $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმა არის მეტაცვლადებით აგებული $\mathscr{T}$ თეორიის $\mathbb{B}$ ფორმის შემოკლებული სახე“ ნაცვლად ხშირად ვიტყვით: „$\mathbb{A}$ არის $\mathbb{B}$ ფორმის შემოკლებული სახე“.

შემოტანილ ცნებებთან დაკავშირებით აღვნიშნოთ შემდეგი. ვთქვათ, $n \neq 0$ და

$$\sigma\, \mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}$$

არის σ შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრება, ხოლო

$$\sigma\, \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_n \text{ ——— } \mathbb{B}_1$$

არის $\sigma \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრება; შემთხვევა $m = 0$ არ გამოირიცხება. მაშინ $\sigma \mathsf{a}'_1 \cdots \mathsf{a}'_m$ ოპერატორის j-ური მარტივი ინდექსი არის $\mathbb{A}_j$ მეტაცვლადის შემოსვლების რაოდენობა $\mathbb{B}_1$-ში ან, რაც იგივეა, $\mathbb{B}$-ში. შემდეგ, ვთქვათ, $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ არის $\mathbb{B}$-ში, ან, რაც იგივეა, $\mathbb{B}_1$-ში შემავალი დამატებითი მეტაასოები და

$$\mathbb{B}^* \rightleftharpoons (\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}:}\, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B},$$

შესაბამისად

$$\mathbb{B}^*_1 \rightleftharpoons (\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k \,/_{\widetilde{\mathscr{T}}:}\, \mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k)\mathbb{B}_1,$$

სადაც $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$ არის $\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემა შემდეგი პირობით: $\mathsf{b}'_1, \ldots, \mathsf{b}'_k$ ასოები ერთმანეთისაგან განსხვავდება, არცერთ მათგანს არ აქვს შემოსვლა $\mathbb{B}$-ში, შესაბამისად, $\mathbb{B}_1$-ში, და მათი ინდექსები მინიმალურია. თუ $k = 0$, მაშინ $\mathbb{B}^* \rightleftharpoons \mathbb{B}$ და $\mathbb{B}^*_1 \rightleftharpoons \mathbb{B}_1$. $\mathbb{B}'_1$-ით, შესაბამისად, $\mathbb{B}'$-ით აღვნიშნოთ $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა, აგებული $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$, შესაბამისად, $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ მეტაცვლადების გამოყენებით, რომლის შემოკლებული სახეცაა $\mathbb{B}^*_1$, შესაბამისად, $\mathbb{B}^*$.

ორ **ოპერატორს** ვუწოდოთ **მსგავსი**, თუ მათი პირველი სიმბოლოები ერთმანეთს ემთხვევა. ორ შემოკლებულ **ფორმას** ვუწოდოთ **მსგავსი**, თუ მათ ერთნაირი სიგრძე აქვს და მათ სიმბოლოებს შორის კანონიკური ურთიერთცალსახა შესაბამისობისას ყოველ ოპერატორს მსგავსი ოპერატორი შეესაბამება. აქ იგულისხმება როგორც ძირითადი არანულადგილიანი ოპერატორები, ისე წარმოებული ოპერატორები, ნულადგილიანების ჩათვლით. ცხადია, მსგავსი მარტივი ოპერატორები ერთმანეთს ემთხვევა.

ადვილი დასანახია, რომ მსგავსი წარმოებული ოპერატორების განსაზღვრებების მარჯვენა ნაწილები მსგავსია, ხოლო მსგავსი მარტივი წარმოებული ოპერატორების შემთხვევაში ერთმანეთს ემთხვევა. შესაბამისი მეტაცვლადებიც ერთმანეთს ემთხვევა. ამიტომ, თუ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ მსგავსი შემოკლებული ფორმებია და $\mathbb{A}'$, $\mathbb{B}'$ მათგან შესაბამისი წარმოებული ოპერატორების მიმართ მათი განსაზღვრებების გამოყენებით მიიღება, მაშინ $\mathbb{A}'$ და $\mathbb{B}'$-ც მსგავსი იქნება. აქედან ადვილად გამომდინარეობს: (1) მსგავს შემოკლებულ ფორმებს ერთნაირი ზედა და ქვედა ინდექსები აქვს (იხ. თეორემა 7.13); (2) თუ $\mathbb{A}$ და $\mathbb{B}$ მსგავსი შემოკლებული ფორმებია, ხოლო $\mathbb{A}_1$ და $\mathbb{B}_1$ მათი შესაბამისი ნაწილები ან სიმბოლოებია, მაშინ ამ ნაწილების ან სიმბოლოების ჯერადობები ერთმანეთს ემთხვევა; (3) მსგავს წარმოებულ ოპერატორებს ერთნაირი ზედა, შესაბამისად, ქვედა ინდექსები აქვს; (4) მსგავს n-ადგილიან ($n > 0$) წარმოებულ ოპერატორებს ერთნაირი j-ური ინდექსები

და j-ური მარტივი ინდექსები აქვს ($j = 1, 2, \ldots, n$).

მითითება. შემოვიტანოთ ცნება „პარალელური α-პროცესები ფორმების მსგავსების მიმართ“, ისევე როგორც 7.2-ში შემოტანილია პარალელური α-პროცესების ცნება კონგრუენტულობის მიმართ. დავამტკიცოთ ლემა 7.10-ისა და თეორემა 7.11-ის შესაბამისი ანალოგები მსგავსებისათვის. ამასთან, უნდა დავამტკიცოთ, რომ ასეთი პარალელური α-პროცესებისას შენარჩუნებულია არაკვანტორულ საგნობრივ ან პროპოზიციულ ასოდ მიჩნეული a მეტაასოს შემოსვლების ერთნაირი განაწილება.

ახლა ადვილი დასანახია შემდეგი განსაზღვრებების კორექტულობა.

ვთქვათ, σ წარმოებული ოპერატორული ნიშანია, ხოლო $\sigma\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ — ნებისმიერი წარმოებული ოპერატორი (კვანტორი). $\sigma\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ ოპერატორის ქვედა ინდექსს ვუწოდოთ σ **წარმოებული ოპერატორული ნიშნის ქვედა ინდექსი**. ანალოგიურად განისაზღვრება ტერმინები: **წარმოებული ოპერატორული ნიშნის ზედა ინდექსი**, **წარმოებული ოპერატორული ნიშნის j-ური ინდექსი** და **წარმოებული ოპერატორული ნიშნის j-ური მარტივი ინდექსი**.

შემოტანილ სხვადასხვა ინდექსსა და ჯერადობას შორის არსებობს კავშირი, რომელსაც შემდეგი ორი თეორემა გამოხატავს.

თეორემა 8.1. *ვთქვათ $\mathbb{A}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, $\mathbb{C}$ არის $\mathbb{A}$ ფორმის ნაწილი, ხოლო $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1}$ არის $\mathbb{A}$ ფორმის ოპერატორების (ოპერატორთა შემოსვლების) მიმდევრობა, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი პირობებით:* a) *მიმდევრობის ბოლო წევრი $\mathbb{C}$ ნაწილის მთავარი ოპერატორია,*[1] *ხოლო დანარჩენი წევრები წარმოებული ოპერატორებია;* b) *მიმდევრობის თითოეული ოპერატორის მოქმედების არეში მოთავსებულია ყველა მომდევნო ოპერატორი;* c) *მიმდევრობის წევრების რაოდენობა მაქსიმალურია. ყოველი $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$-სთვის δ_k-ით აღვნიშნოთ σ_k ოპერატორის j-ური ინდექსი, სადაც j ისეთი ნატურალური რიცხვია, რომ σ_{n+1} და, მაშასადამე, $\mathbb{C}$ მოთავსებულია σ_k ოპერატორის j-ურ ოპერანდში. მაშინ $\mathbb{A}$ ფორმის $\mathbb{C}$ ნაწილის γ ჯერადობა, ანუ σ_{n+1} ოპერატორის ჯერადობა, გამოითვლება ფორმულით*

$$\gamma = 1\,\delta_1\delta_2 \cdots \delta_n. \tag{2}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, a არის სიმბოლო, რომელიც $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ანბანში არ გვხვდება და განიხილება როგორც არაკვანტორული პროპოზიციული ან საგნობრივი ასო იმის მიხედვით, $\mathbb{C}$ ფორმულაა თუ ტერმი. $\mathbb{A}'$-ით აღვნიშნოთ შემოკლებული ფორმა, რომელიც $\mathbb{A}$-დან მიიღება $\mathbb{C}$ ნაწილის ნაცვლად a-ს ჩასმით. $\mathbb{A}'$ ფორმის a ნაწილი გავაიგივოთ $\mathbb{A}$ ფორმის $\mathbb{C}$ ნაწილთან. ამით $\mathbb{A}'$ შემოკლებული ფორმის a ნაწილის მთავარი a ოპერატორი გაიგივდება $\mathbb{A}$ შემოკლებული ფორმის $\mathbb{C}$ ნაწილის მთავარ σ_{n+1} ოპერატორთან. შესაბამისად, ქვემოთ $\mathbb{A}'$ ფორმის ოპერატორებზე საუბრისას ვიგულისხმებთ, რომ σ_{n+1} არის ნულადგილიანი a ოპერატორი. $\mathbb{B}_j$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}'$ შემოკლებული ფორმის ის ნაწილი, რომლის მთავარი ოპერატორია σ_j ($j = 1, 2, \ldots, n+1$). ცხადია, $\mathbb{B}_{n+1}$ არის a.

განვიხილოთ ნორმალური მიმდევრობა

$$\mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}',\ \mathbb{A}'_2,\ \ldots,\ \mathbb{A}'_m, \tag{3}$$

რომლის ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა და რომელიც შემდეგი პროცესით ცალსა-

[1] იგი შეიძლება ნულადგილიანიც იყოს.

ხად განისაზღვრება. განსაზღვრებით, $\mathbb{B}_j, (j = 1, 2, \dots, n+1)$ იყოს $\mathbb{B}_j$ ფორმის მონიშნული შემოსვლა $\mathbb{A}' = \mathbb{A}'_1$ ფორმაში. ვიგულისხმოთ, რომ ქვემოთ მოცემული პროცესით (3) მიმდევრობის ყოველი წევრის განსაზღვრისას, ისევე როგორც თეორემა 7.12-ის დამტკიცებაში, განისაზღვრება „მონიშნული შემოსვლები“ და „j-ური მონიშნული შემოსვლები“ ($j = 1, 2, \dots, n+1$). ისეთ j-ურ მონიშნულ შემოსვლას, რომელიც $\mathbb{B}_j$ შემოკლებული ფორმის შემოსვლაა, ვუწოდოთ „$\mathbb{B}_j$ შემოკლებული ფორმის მონიშნული შემოსვლა“, ხოლო $\mathbb{B}_j$ შემოკლებული ფორმის ნებისმიერი მონიშნული შემოსვლის მთავარ ოპერატორს — „σ_j ოპერატორის მონიშნული შემოსვლა“ ($j = 1, 2, \dots, n+1$). (3) მიმდევრობის პირველი წევრი განისაზღვრება $\mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}'$ გრაფიკული ტოლობით, დანარჩენი წევრები კი — შემდეგი ზოგადი წესით.

(a_i) ბოლოს განსაზღვრულ წევრში მოვძებნოთ წარმოებული ოპერატორის პირველი შემოსვლა, რომელიც $\mathbb{B}_i$ ფორმის მონიშნული შემოსვლების გარეთ მდებარეობს, და ამ ოპერატორის მიმართ გამოვიყენოთ მისი განსაზღვრება (d_2) პირობით.

ჯერ (a_1) წესი $\mathbb{A}'_1$-ის მომდევნო წევრების მისაღებად იმდენჯერ გამოვიყენოთ, რამდენჯერაც შესაძლებელია. შემდეგ იმავე გზით გამოვიყენოთ (a_2) წესი და ა.შ. ბოლოს გამოიყენება (a_{n+1}) წესი.

ინდუქციით ადვილად დამტკიცდება შემდეგი:

(3) მიმდევრობის ახალი წევრების მიღებისას (a_i) წესის გამოყენების პროცესი მთავრდება (იხ. თეორემა 7.12) ისეთი $\mathbb{A}'_{\ell_i}$ ფორმის მიღებით, რომელშიც $\mathbb{B}_i$-ს მონიშნული შემოსვლების გარეთ წარმოებული ოპერატორები არ არის. ამასთან, ყოველი $j \in \{i, i+1, \dots, n+1\}$-სთვის $\mathbb{A}'_{\ell_i}$-ში ნებისმიერი j-ური მონიშნული შემოსვლა $\mathbb{B}_j$ შემოკლებული ფორმის მონიშნული შემოსვლაა. ყოველი ასეთი j-სთვის $\mathbb{A}'_{\ell_i}$-ში $\mathbb{B}_j$ ფორმის მონიშნული შემოსვლების რაოდენობა ტოლია δ_{i-1}-ისა და $\mathbb{A}'_{\ell_{i-1}}$-ში $\mathbb{B}_j$ ფორმის მონიშნული შემოსვლების რაოდენობის ნამრავლისა; შეთანხმებით, $\ell_0 = \delta_0 = 1$. გარდა ამისა, ყოველი ასეთი j-სთვის $\mathbb{A}'_{\ell_i}$-ში $\mathbb{B}_j$ ფორმის ნებისმიერი მონიშნული შემოსვლა არის $\mathbb{A}'_{\ell_i}$-ში $\mathbb{B}_i$ ფორმის ცალსახად განსაზღვრული მონიშნული შემოსვლის ნაწილი. ამასთან, $\mathbb{A}'_{\ell_i}$-ში $\mathbb{B}_i$-ს ყოველი მონიშნული შემოსვლა $\mathbb{B}_j$ ფორმის ერთადერთ მონიშნულ შემოსვლას შეიცავს. მაშასადამე, $\mathbb{A}'_{\ell_i}$-ში $\mathbb{B}_j$ ფორმის მონიშნული შემოსვლების რაოდენობა იგივეა, რაც $\mathbb{A}'_{\ell_i}$-ში $\mathbb{B}_i$ ფორმის მონიშნული შემოსვლების რაოდენობა.

შევნიშნოთ, რომ $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ მიმდევრობის მაქსიმალურობის თვისებიდან (იხ. c) პირობა) გამომდინარეობს შემდეგი დებულება: მონიშნული შემოსვლები არ შედის იმ წარმოებული ოპერატორების მოქმედების არეში, რომელთა მიმართაც მათი განსაზღვრებები გამოიყენება (a_1) წესით ახალი წევრების მისაღებად. ამიტომ, ისევე როგორც $\mathbb{A}'_1$-ში, (a_1) წესით მიღებულ ყოველ წევრში თითოეულ $\mathbb{B}_j$-ს ერთადერთი მონიშნული შემოსვლა აქვს ($j = 1, 2, \dots, n+1$).

ახლა ადვილი დასანახია, რომ (3) ნორმალური მიმდევრობაა, მისი ბოლო $\mathbb{A}'_m$ წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა და მასში $\mathbb{B}_{n+1}$ ფორმის, ანუ a-ს, შემოსვლების რაოდენობაა $\delta_0\delta_1 \cdots \delta_n$. თეორემა 7.9-ის თანახმად, $\mathbb{A}'_m$ კონგრუენტულია a ასოთი გაფართოებული $\mathscr{T}$ თეორიის ნებისმიერი ფორმისა, რომლის შემოკლებული სახეცაა $\mathbb{A}'_1$. ამიტომ $\gamma = 1\,\delta_1\delta_2 \cdots \delta_n$.

□

თეორემა 8.2. *ვთქვათ $\mathbb{A}$ არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა, ხოლო $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ არის $\mathbb{A}$-ში მოთავსებული ყველა წარმოებული ოპერატორის (ოპერატორთა შემოსვლების) გადათვლა. γ_i-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}$ ფორმის σ_i ოპერატორის ჯერადობა, ხოლო α_i-ით და β_i-ით, შესა-*

ბამისად, σ_i ოპერატორის ქვედა და ზედა ინდექსები, $i = 1, 2, \ldots, n$. მაშინ $\mathbb{A}$ ფორმის ქვედა $\underline{\mathrm{J}}(\mathbb{A})$ და ზედა $\overline{\mathrm{J}}(\mathbb{A})$ ინდექსები გამოითვლება შემდეგი ტოლობებით:

$$\underline{\mathrm{J}}(\mathbb{A}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - 1), \tag{4}$$

$$\overline{\mathrm{J}}(\mathbb{A}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\beta_i - 1). \tag{5}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ (4) ტოლობა. იმ შემთხვევაში, როცა $n = 0$, (4) ტოლობის მართებულობა ცხადია. დავუშვათ, რომ $n > 0$.

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_\ell = \mathbb{A}^*, \tag{6}$$

სახის ნორმალური მიმდევრობა, რომლის ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა და რომლის წევრების რაოდენობაც მინიმალურია, შემდეგი პროცესით შეიძლება ავაგოთ. პირველი $\mathbb{A}_1$ წევრი $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}$ გრაფიკული ტოლობით განისაზღვრება. ვთქვათ, i_1 არის $\{1, 2, \ldots, n\}$-დან ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომ σ_{i_1} არის $\mathbb{A}_1$ ფორმის მინიმალური მოქმედების არის მქონე წარმოებული ოპერატორი, რომელიც ყველა სხვა ასეთ ოპერატორზე მარცხნივ მდებარეობს. $\mathbb{B}_1$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}_1$ ფორმის ის ნაწილი, რომლის მთავარი ოპერატორია σ_{i_1}. შემდეგ, ვთქვათ,

$$\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots, \mathbb{B}_{j_1} = \mathbb{B}^* \tag{7}$$

არის კანონიკური ნორმალური მიმდევრობა, რომლის ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა და რომელიც შემდეგი პირობით ცალსახად განისაზღვრება: ყოველი $i \in \{2, 3, \ldots, j_1\}$-სთვის $\mathbb{B}_i$ მიიღება $\mathbb{B}_{i-1}$-დან სათანადო განსაზღვრების (d_2) პირობით გამოყენებით იმ წარმოებული ოპერატორის მიმართ, რომელსაც მინიმალური მოქმედების არე აქვს და ყველა სხვა ასეთ ოპერატორზე მარცხნივ მდებარეობს. თეორემა 7.13-ის თანახმად, (7) მიმდევრობას წევრების მინიმალური რაოდენობა აქვს იმ ნორმალურ მიმდევრობებს შორის, რომელთა პირველი წევრია $\mathbb{B}_1$, ხოლო ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა. ადვილი დასანახია, რომ $j_1 = \alpha_{i_1}$. ეს გამომდინარეობს $\mathbb{B}_1$ და $\mathbb{B}_0$ ფორმებთან დაკავშირებული ნორმალური მიმდევრობების სიმრავლეებს შორის ბუნებრივი ურთიერთცალსახა შესაბამისობიდან. აქ $\mathbb{B}_0$ მიიღება $\mathbb{B}_1$-დან σ_{i_1} ოპერატორის ყველა ოპერანდის ერთდროული შეცვლით ერთმანეთისაგან განსხვავებული ახალი სიმბოლოებით, რომელთაგან თითოეული სათანადო არაკვანტორულ პროპოზიციულ ან საგნობრივ ასოდ განიხილება. ახლა (6) მიმდევრობის პირველი წევრის მომდევნო $\alpha_{i_1} - 1$ წევრი ასე განისაზღვრება: ყოველი $i \in \{2, 3, \ldots, \alpha_{i_1}\}$-სთვის $\mathbb{A}_i$ მიიღება $\mathbb{A}_1$-დან $\mathbb{B}_1$ ნაწილის ნაცვლად $\mathbb{B}_i$ ფორმის ჩასმით. ამ გზით აგებული მიმდევრობის ბოლო წევრიდან იმავე წესით მიიღება ახალი წევრები და ა.შ. ეს პროცესი საჭირო ნორმალური მიმდევრობის აგებით მთავრდება (იხ. თეორემა 7.13). ახლა (4) ტოლობის მართებულობა ცხადია.

შემდეგ, n-ის მიმართ ინდუქციით დავამტკიცოთ (5) ტოლობა. $n = 0$ შემთხვევაში იგი ცხადია. ამიტომ საკმარისია (5) დავამტკიცოთ იმ დაშვებით, რომ $n > 0$ და ამ ტოლობის ანალოგი მართებულია $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ყველა ფორმისათვის, რომელშიც წარმოებული ოპერატორების რაოდენობა n-ზე ნაკლებია.

ავირჩიოთ ნატურალური $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ რიცხვი იმ პირობით, რომ σ_ℓ ოპერატორის მოქმედების არეში წარმოებული ოპერატორები არ შედის. $\mathbb{C}$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}$ შემოკლებული ფორმის ის ნაწილი, რომლის მთავარი ოპერატორია σ_ℓ. შემდეგ, $\mathbb{A}'$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{A}$-დან $\mathbb{C}$ ნაწილის ნაცვლად a სიმბოლოს ჩასმით მიღებული ფორმა. ეს სიმბოლო არ შედის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ანბანში და განიხილება როგორც არაკვანტორული პროპოზიციული ან საგნობრივი ასო იმის მიხედვით, $\mathbb{C}$ ფორმულაა თუ ტერმი.

შემდეგ, ვთქვათ,

$$\mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}', \mathbb{A}'_2, \ldots, \mathbb{A}'_m \tag{8}$$

არის ისეთი ნორმალური მიმდევრობა, რომლის ბოლო წევრი $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმაა და რომლის ყოველი წევრი, მეორიდან დაწყებული, წინადან მიიღება მაქსიმალური მოქმედების არის მქონე ოპერატორის მიმართ სათანადო განსაზღვრების (d_2) პირობით გამოყენებით.

თეორემა 7.13-ის თანახმად, ინდუქციური დაშვებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$m = \bar{\mathsf{J}}(\mathbb{A}') = 1 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\beta_i - 1) - \gamma_\ell(\beta_\ell - 1). \tag{9}$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\bar{\mathsf{J}}(\mathbb{C}) = \beta_\ell$$

(აქ ნებისმიერი შემოკლებული $\mathbb{D}$ ფორმის ზედა ინდექსი $\bar{\mathsf{J}}(\mathbb{D})$-ით აღინიშნება). ვთქვათ,

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_m, \mathbb{A}^1_1, \ldots, \mathbb{A}^1_K \tag{10}$$

არის ფორმების მიმდევრობა, ცალსახად განსაზღვრული შემდეგი პირობებით:

1) $\mathbb{A}_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ მიიღება $\mathbb{A}'_i$-დან a-ს ნაცვლად $\mathbb{C}$-ს ჩასმით;
2) ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, K\}$-სთვის შემოკლებული $\mathbb{A}^1_i$ ფორმა წინადან მიიღება სათანადო განსაზღვრების (d_2) პირობით გამოყენებით იმ წარმოებული ოპერატორის მიმართ, რომელსაც მაქსიმალური მოქმედების არე აქვს და ყველა სხვა ასეთ ოპერატორზე მარცხნივ მდებარეობს;
3) $\mathbb{A}^1_K$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა. ცხადია, (10) ნორმალური მიმდევრობაა. თეორემა 7.13-ის საფუძველზე ადვილი დასანახია, რომ

$$m + K = \bar{\mathsf{J}}(\mathbb{A}). \tag{11}$$

შემდეგ, ვთქვათ,

$$\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}, \mathbb{C}_2, \ldots, \mathbb{C}_\tau = \mathbb{C}^*$$

არის $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმების მიმდევრობა, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება პირობებით:

1) ყოველი $i \in \{2, 3, \ldots, \tau\}$-სთვის $\mathbb{C}_i$ ფორმა წინადან მიიღება სათანადო განსაზღვრების (d_2) პირობით გამოყენებით იმ წარმოებული ოპერატორის მიმართ, რომელსაც მაქსიმალური მოქმედების არე აქვს და ყველა სხვა ასეთ ოპერატორზე მარცხნივ მდებარეობს;
2) $\mathbb{C}_\tau$ არის $\mathscr{T}$ თეორიის ფორმა.

ადვილი დასანახია, რომ (10) მიმდევრობის $\mathbb{A}^1_1, \ldots, \mathbb{A}^1_K$ წევრების მისაღებად პრო-

ცესი ჯერ $\mathbb{A}_m$ ფორმაში $\mathbb{C}$-ს პირველ შემოსვლას $\mathbb{C}^*$ ფორმად გარდაქმნის და ამისათვის $\beta_\ell - 1$ ბიჯი იხარჯება. შემდეგ იგი $\mathbb{C}$ ფორმის პირველ შემოსვლას $\mathbb{A}^1_{\beta_\ell - 1}$-ში $\mathbb{C}^*$ ფორმად გარდაქმნის; ეს ის შემოსვლაა, რომელიც ბუნებრივად შეესაბამება $\mathbb{C}$ ფორმის მეორე შემოსვლას $\mathbb{A}_m$-ში, და ა.შ. ცხადია, $K = \gamma(\beta_\ell - 1)$, სადაც γ არის a ასოს შემოსვლების რაოდენობა $\mathbb{A}'_m$-ში. მაშასადამე, γ არის $\mathbb{A}$ შემოკლებული ფორმის $\mathbb{C}$ ნაწილის ჯერადობა, ანუ $\mathbb{A}$ ფორმის σ_ℓ ოპერატორის ჯერადობა; ამიტომ $\gamma = \gamma_\ell$. შედეგად, $K = \gamma_\ell(\beta_\ell - 1)$ და (5) ტოლობა (9)-ისა და (11)-ისაგან გამომდინარეობს.

□

8.2 შემოკლებული ფორმებიდან ფორმების აღდგენისა და წარმოებული ოპერატორებისა და შემოკლებული ფორმების რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლის ალგორითმები

წარმოებული $\sigma'\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_m$ კვანტორის ნებისმიერი ინდექსის გამოთვლა თანაბარძალოვანია σ' ოპერატორული ნიშნის შესაბამისი ინდექსის გამოთვლისა: ეს ინდექსები ერთმანეთის ტოლია.

წარმოებული ოპერატორის (ან წარმოებული ოპერატორული ნიშნის) j-ური მარტივი ინდექსის გამოთვლა სირთულეს არ წარმოადგენს, ხოლო σ წარმოებული ოპერატორის j-ური ინდექსი შემდეგი ალგორითმით გამოითვლება.

1. შევადგინოთ ყველა იმ *მარტივი* წარმოებული ოპერატორისა და წარმოებული ოპერატორული ნიშნის სია, რომლებზეც დამოკიდებულია σ წარმოებული ოპერატორი. ეს ოპერატორები და ოპერატორული ნიშნები, თვით σ-ს ჩათვლით, დავყოთ ჯგუფებად: i-ურ ჯგუფს მივაკუთვნოთ i ნომრის მქონე ოპერატორები და ოპერატორული ნიშნები (σ შეიძლება კვანტორიც იყოს). ვთქვათ $\sigma^i_1, \ldots, \sigma^i_{n_i}$ არის i-ური ჯგუფის წარმოებული ოპერატორებისა და ოპერატორული ნიშნების გადათვლა ($i = 1, 2, \ldots, \ell$). ზოგიერთი ჯგუფი შეიძლება ცარიელი იყოს. ვიგულისხმოთ, რომ ბოლო ჯგუფი არაცარიელია; ცხადია, იგი შეიცავს ერთადერთ σ ოპერატორს. $n(i,k)$-ით აღვნიშნოთ σ^i_k ოპერატორის წონა ან σ^i_k წარმოებული ოპერატორული ნიშნის წონის პირველი ინდექსი ($i = 1, 2, \ldots, \ell$; $k = 1, 2, \ldots, n_i$).
2. ყოველი $k \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$-სთვის გამოვთვალოთ σ^1_k წარმოებული ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის j-ური ინდექსი ($j = 1, 2, \ldots, n(1,k)$). ამისთვის საკმარისია ამოვწეროთ $\sigma^1_k\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_\gamma$ სახის ნებისმიერი წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრება (თუ σ^1_k წარმოებული ოპერატორია, მაშინ $\gamma = 0$) და ამ განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილში დავითვალოთ $\sigma^1_k\mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_\gamma$ ოპერატორის j-ური ოპერანდის (მეტაცვლადის) შემოსვლები.
3. ყოველი $k \in \{1, 2, \ldots, n_2\}$-სთვის გამოვთვალოთ σ^2_k წარმოებული ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის j-ური ინდექსი ($j = 1, 2, \ldots, n(2,k)$) და ა.შ. გამოთვლები სრულდება შემდეგი ზოგადი რეკურსიული წესით.

(1) ვთქვათ $1 < m \leq \ell$ და ყოველი არანულოვანი ნატურალური $d < m$ რიცხვისთვის უკვე გამოთვლილია $\sigma^d_1, \ldots, \sigma^d_{n_d}$ გადათვლის თითოეული ოპერატორისა თუ ოპერატორული

ნიშნის ყველა ნომრის ინდექსები. მაშინ ყოველი $k \in \{1, 2, \ldots, n_m\}$-სთვის σ_k^m წარმოებული ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის j-ური ინდექსი ($j = 1, 2, \ldots, n(m,k)$) შემდეგნაირად გამოითვლება. ამოვწეროთ $\sigma_k^m \mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_\gamma$ სახის ნებისმიერი წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრება (თუ σ_k^m წარმოებული ოპერატორია, მაშინ $\gamma = 0$):

$$\sigma_k^m \mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_\gamma \mathbb{A}_1 \cdots \mathbb{A}_{n(m,k)} \text{ ——— } \mathbb{B}.$$

ვთქვათ $\mathbb{A}_{j1}, \ldots, \mathbb{A}_{j\beta}$ არის $\mathbb{A}_j$ მეტაცვლადის შემოსვლების გადათვლა $\mathbb{B}$-ში (j ფიქსირებულად ითვლება). ყოველი $i \in \{1, 2, \ldots, \beta\}$-სთვის გამოვთვალოთ $\mathbb{B}$ შემოკლებული ფორმის $\mathbb{A}_{ji}$ ნაწილის γ_i ჯერადობა. იგი გამოითვლება 8.1 თეორემის (2) ტოლობით: ინდუქციური დაშვების თანახმად, ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში შემავალი ყველა რიცხვი უკვე გამოთვლილია. მაშინ σ_k^m ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის j-ური ინდექსი იქნება $\sum_{i=1}^{\beta} \gamma_i$.

წარმოებული σ ოპერატორის ქვედა, შესაბამისად ზედა ინდექსი შემდეგი ალგორითმით გამოითვლება.

1. შევასრულოთ წინა ალგორითმის ყველა მითითება და თითოეული σ_k^i წარმოებული ოპერატორისა თუ ოპერატორული ნიშნისთვის გამოვთვალოთ ყველა ნომრის ინდექსები.
2. ყოველი $k \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$-სთვის σ_k^1 წარმოებული ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის როგორც ქვედა, ისე ზედა ინდექსი არის 2.
3. ყოველი $k \in \{1, 2, \ldots, n_2\}$-სთვის გამოვთვალოთ σ_k^2 წარმოებული ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის როგორც ქვედა, ისე ზედა ინდექსი და ა.შ. პროცესი სრულდება σ ოპერატორის ქვედა და ზედა ინდექსების გამოთვლით. აქ გამოთვლები სრულდება შემდეგი ზოგადი რეკურსიული წესით.

(1) ვთქვათ $1 < m \leq \ell$ და ყოველი არანულოვანი ნატურალური $d < m$ რიცხვისთვის უკვე გამოთვლილია $\sigma_1^d, \ldots, \sigma_{n_d}^d$ ოპერატორებისა თუ ოპერატორული ნიშნების როგორც ქვედა, ისე ზედა ინდექსები. ყოველი $k \in \{1, 2, \ldots, n_m\}$-სთვის σ_k^m ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის ქვედა და ზედა ინდექსები შემდეგნაირად გამოითვლება. ვთქვათ $\sigma_k^m \mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_\gamma$ ნებისმიერი წარმოებული ოპერატორია (თუ σ_k^m წარმოებული ოპერატორია, მაშინ $\gamma = 0$). ვთქვათ $\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_{n(m,k)}$ არის წყვილ-წყვილად განსხვავებული სიმბოლოები, რომლებიც არ გვხვდება $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ანბანში და განიხილება როგორც არაკვანტორული ასოები ისე, რომ $\sigma_k^m \mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_\gamma \mathsf{c}_1 \cdots \mathsf{c}_{n(m,k)}$ იყოს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ფორმა. ამ შემოკლებულ ფორმაზე გამოვიყენოთ $\sigma_k^m \mathsf{a}_1 \cdots \mathsf{a}_\gamma$ წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრება და მივიღოთ $\mathbb{B}$ შემოკლებული ფორმა. მაშინ σ_k^m წარმოებული ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის ქვედა, შესაბამისად ზედა ინდექსი იქნება $\mathbb{B}$ ფორმის ქვედა, შესაბამისად ზედა ინდექსს დამატებული ერთი. $\mathbb{B}$ ფორმის ეს ინდექსები $\underline{\mathrm{J}}(\mathbb{B})$ და $\overline{\mathrm{J}}(\mathbb{B})$ გამოითვლება 8.2 თეორემის (4) და (5) ტოლობებით. ამ ტოლობების მარჯვენა ნაწილებში α_i და β_i სიმბოლოებით აღნიშნული რიცხვები ინდუქციური დაშვების თანახმად უკვე გამოთვლილია, ანუ გამოთვლილია ამ ალგორითმის მიმდინარე ეტაპამდე. γ_i სიმბოლოებით აღნიშნული რიცხვები კი ადვილად გამოითვლება 8.1 თეორემისა და 1-ელ პუნქტში გამოთვლილი რიცხვების საფუძველზე.

წარმოებული ოპერატორის ნებისმიერი ინდექსის გამოთვლის ალგორითმის არსებობისას 8.1 თეორემა გვაძლევს მოცემული შემოკლებული ფორმის ნებისმიერი ნაწილის (ნებისმიერი ოპერატორის) ჯერადობის გამოთვლის ალგორითმს. კერძოდ, უნდა ამოვ-

წეროთ ამ თეორემის (2) ტოლობა და მის მარჯვენა ნაწილში შემავალი რიცხვები ზემოთ მოყვანილი პირველი ალგორითმით გამოვთვალოთ. ასევე, წარმოებული ოპერატორების ქვედა და ზედა ინდექსებისა და $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის $\mathbb{A}$ ფორმის ნებისმიერი ნაწილის ჯერადობის გამოთვლის ალგორითმების არსებობისას 8.2 თეორემის (4) და (5) ტოლობები, შესაბამისად, გვაძლევს $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი $\mathbb{A}$ ფორმის *ქვედა* და *ზედა* ინდექსების გამოთვლის ალგორითმებს.

ახლა ადვილი დასანახია, რომ $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიის ნებისმიერი $\mathbb{A}_1$ ფორმისთვის $\mathscr{T}$ თეორიის ისეთი $\mathbb{A}$ ფორმის მოძებნა, რომლის შემოკლებული სახეც არის $\mathbb{A}_1$, შეიძლება საერთო α-პროცესის ისეთი მოდიფიკაციით მიღებული ალგორითმით, რომელიც უზრუნველყოფს, რომ პროცესი ცალსახად იყოს განსაზღვრული. ასეთი პროცესის ბიჯების რაოდენობა არ შეიძლება აღემატებოდეს $\mathbb{A}_1$ ფორმის ზედა ინდექსს. მაგალითად, ამას უზრუნველყოფს შემდეგი დამატებითი მოთხოვნებიდან თითოეული: ყოველ ბიჯზე განსაზღვრება (d_2) პირობით გამოიყენება მინიმალური, შესაბამისად მაქსიმალური მოქმედების არის მქონე იმ ოპერატორზე, რომელიც ყველა სხვა ასეთი ოპერატორის მარცხნივ (მარჯვნივ) დგას, და ა.შ.

შენიშვნა. ამ ნაშრომში მიღებული შედეგების საფუძველზე შეიძლება შემდეგი დასკვნის გამოტანა. ნებისმიერი კლასიკური ფორმალური თუ შინაარსული მათემატიკური თეორიის გადმოცემისას უნდა ვისარგებლოთ I–IV, II′ და IV′ ტიპების შემამოკლებელი სიმბოლოებით. ამ შემთხვევაში შემოკლებულ ფორმებზე ოპერირებისას შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზემოთ მიღებული შედეგები. შემოკლებული ფორმების ნაცვლად შეიძლება გამოვიყენოთ მათი „გამარტივებული სახეებიც“. შემოკლებული ფორმების გასამარტივებლად გამოყენებულ სიმბოლოებს უნდა ეწოდოს „გამამარტივებელი სიმბოლოები“. რადგან შემოკლებული ფორმების გამარტივებულ სახეებზე უშუალოდ ოპერირების ზოგადი კანონები არ გვაქვს, ეს სახეები უნდა წარმოვიდგინოთ როგორც შესაბამისი შემოკლებული ფორმები.

ტერმინებისა და აღნიშვნების საძიებელი

საძიებელში ჯერ მოცემულია ტერმინები ანბანური რიგით, შემდეგ კი — აღნიშვნები იმავე რიგით, რა რიგითაც ისინი ტექსტშია მოცემული. იმ ტერმინების ბოლოს, რომლებიც ტექსტში არაცხადად განისაზღვრება, დასმულია ვარსკვლავი „*“; ამასთან, ზოგჯერ მითითებულია ის გვერდებიც, სადაც მოცემულია ამ ტერმინის არაცხადად განმსაზღვრელი შეთანხმებები. ზოგიერთი ტერმინი საძიებელში ცხადი სახით არ გვხვდება, მაგრამ იგულისხმება, რომ იგი იქ არაცხადად არის წარმოდგენილი. ასეთი ტერმინის მაგალითია „n-ადგილიანი სპეციალური რელაციური ოპერატორი“. იგულისხმება, რომ ამ ტერმინის აზრი ბუნებრივად გამომდინარეობს „n-ადგილიანი ოპერატორის“, „სპეციალური ოპერატორის“ და „რელაციური ოპერატორის“ შინაარსიდან. ზოგიერთი ტერმინის ბოლოს დასმულია ორმაგი ვარსკვლავი „**“. იგი მიუთითებს, რომ ტერმინის აზრი ინტუიციურად უნდა გავიგოთ — ზუსტი განსაზღვრების გარეშე. ასეთი ტერმინის მაგალითია „ფორმის გამარტივებული სახე“. ვარსკვლავი ტერმინის წინ ნიშნავს, რომ ტერმინის აზრი ცნობილად ითვლება.

ასო*, 3, 12
  σ ოპერატორული ნიშნის შემოსვლით დაბმული, 12
  ფუნქციონალური, 4
  k-ური ოპერატორული, 5
  არაკვანტორული, 5
  საგნობრივი, 3
  ფორმის, დაბმული, 12
  ფორმის (სიტყვის), თავისუფალი, 12
  სიტყვის, დაბმული, 12
  სიტყვის, თავისუფალი, 12
  ოპერატორული, 5, 12
  პრედიკატული, 4
  კვანტორული, 5
  რელაციური ფუნქციონალური, 4
  სუბსტანციური ფუნქციონალური, 4
ასოების ჯგუფის წარმომადგენელი, 14
  თავისუფალი ასოების ჯგუფისა*, 14
  დაბმული ასოების ჯგუფისა*, 14
  კანონიკური, 14
ასოს შემოსვლა ფორმაში მდებარეობს ფორმის ოპერატორული ასოს მოქმედების არეში, 18
გამარტივებული სახე
  შემოკლებული ფორმისა**, 7
  ფორმისა**, 83
განსაზღვრება-სქემა, 57–58
განსაზღვრების გამოყენება (სხვადასხვა ტიპის), 63–64
  კანონიკური, 63–64
  ოპერატორისადმი მისი განსაზღვრების, 63–64
  (d_2) პირობით, 63–64
განსაზღვრების კვაზიგამოყენება ოპერატორისადმი, 63–64
  (სხვადასხვა ტიპის) განსაზღვრებების, 63–64
  კანონიკური (სხვადასხვა ტიპის), 63–64

განსაზღვრების ძირითადი შინაარსი, 28
გაფართოებული თეორია, 27
  შემამოკლებელი სიმბოლოებით, 26
  $\widetilde{\mathscr{T}}$ თეორიისა, 27
  $\widetilde{\mathscr{T}}$ ტიპის, 27
გაფართოებული თეორიის დამატებითი სიმბოლოები, 27
*გრაფიკული ტოლობა, 15
დაბმული ასო
  ფორმის, 12
  სიტყვის, 12
დაბმული შემოსვლა
  ასოსი ფორმაში, 12
  ასოსი სიტყვაში, 12
დაბმულობის მაჩვენებელი, 6, 11
  კვანტორის, 6, 11–12
  ოპერატორული ნიშნის, 6, 11–12
  შედგენილი ოპერატორის, 6, 11–12
დამატებითი მეტაასოები
  შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების, 43
  შედგენილი ოპერატორის, 58
ერთდროული ჩანაცვლების შედეგი (სხვადასხვა ტიპის), 15–16, 18–20
თავისუფალი ასო
  ფორმის, 12
  სიტყვის, 12
თავისუფალი შემოსვლა
  ასოსი ფორმაში, 12
  ასოსი სიტყვაში, 12
$\mathscr{T}$ თეორია, 3–7
  გაფართოებული, 27
  შემამოკლებელი სიმბოლოებით გაფართოებული, 26
  განზოგადებული, 8–9
  განზოგადებული გაფართოებული, 27
  $\mathscr{T}$ თეორიის გაფართოებით მიღებული, 26
  $\mathscr{T}$ ტიპის, 8
  კვაზიგაფართოებული, 33
  $\mathscr{T}$-თეორია, 8
თეორიის გაფართოება, 26
  განზოგადებული თეორიის, 27
კანონიკური შესაბამისობა სიტყვების სიმბოლოთა სიმრავლეებს შორის, 13
კვაზიტერმი*, 66
კვაზიფორმა, 66
კვაზიფორმულა*, 66
კვანტორი, 5–6, 10–12
  ძირითადი, 5
  წარმოებული, 11, 29
  პირდაპირი ჩანაცვლების, 33
  სრული, 5, 11
  ლოგიკური, 5, 11–12
  ლოგიკო-სპეციალური, 5–6, 11–12
  $\mathbb{A}$ ფორმისა, მოქმედებს $\mathbb{A}$-ში b ასოს შემოსვლაზე, 18
  $\mathbb{A}$ ფორმისა, მოქმედებს $\mathbb{A}$-ს $\mathbb{A}_1$ ნაწილზე, 18
  ნაწილობრივი, 5, 11
  რელაციური, 5–6, 11–12, 29–30
  სპეციალური, 5–6, 11–12, 29–30
  სუბსტანციური, 5–6, 11–12, 29–30
  ჩანაცვლების, 33
კვანტორის მოქმედების არე, 12
კონსტანტა, 3–4, 11–12
  ძირითადი, 3–4
  კლასური, 10
  წარმოებული, 29
  ელემენტური, 10
  ფუნქციონალური, 3–4
  რელაციური ფუნქციონალური, 4, 11
  სუბსტანციური ფუნქციონალური, 4, 11
  არასაკუთრივი, 3–4
  ინდივიდური, 10
  საგნობრივი, 3, 11
  ოპერატორული, 5, 11–12
  პრედიკატული, 4
  საკუთრივი, 3–4
  კვანტორული, 5
  სიმრავლური, 10
  უნივერსალური, 10
ლოგიკური კავშირი, 3, 6, 11–12
  ძირითადი, 3, 6
  წარმოებული, 11
  ნულადგილიანი, 6, 10–12
ლოგიკურობის მაჩვენებელი
  კვანტორის (შედგენილი ოპერატორის), 6, 11
  ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორის, 6, 11
  ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორული ნიშნის, 6, 11
  ლოგიკო-სპეციალური კვანტორის (შედგენილი ოპერატორის), 6, 11
  ოპერატორის, 6, 11
  ოპერატორული ნიშნის, 6, 11
მეტაასო, 31

კვანტორული, 31
მეტაცვლადების მნიშვნელობათა დასაშვები სისტემა $\mathscr{T}_a$ თეორიის მიმართ ($\mathscr{T}_a$-დან), 26
მეტაცვლადების მნიშვნელობათა სისტემა
$\mathscr{T}_a$-დან, 27
$\mathscr{T}_a$-ს მიმართ, 27
დასაშვები, 28
მეტაცვლადის მნიშვნელობა
$\mathscr{T}_a$-დან, 27
$\mathscr{T}_a$-ს მიმართ, 27
მეტაცვლადის მნიშვნელობათა არე $\mathscr{T}_a$-ში ($\mathscr{T}_a$-ს მიმართ), 27
მსგავსი ოპერატორები, 99
მსგავსი ფორმები*, 99
მსგავსი შემოკლებული ფორმები, 99
ნომერი
შედგენილი ოპერატორისა (კვანტორისა), 58
შემამოკლებელი სიმბოლოსი, 58–59
წარმოებული ოპერატორისა, 58
ოპერატორი, 3–6, 11–12
ძირითადი, 3–6
ბინარული, 5, 11
შედგენილი, 3–6, 10–12
წარმოებული, 3–6, 11, 29
წარმოებული, აქვს მაქსიმალური მოქმედების არე, 59
წარმოებული, აქვს მინიმალური მოქმედების არე, 59
არის წარმოებული ოპერატორის უშუალო წინამორბედი, 61–63
არის ოპერატორული ნიშნის უშუალო წინამორბედი, 61–63
არის წარმოებული ოპერატორის წინამორბედი, 61–63
არის ოპერატორული ნიშნის წინამორბედი, 61–63
ლოგიკური, 3–6, 11–12, 29–29
ლოგიკო-სპეციალური, 4–6, 11–12, 29–30
n-ადგილიანი, 3–6, 11–12, 29–30
ნულადგილიანი, 6, 12
რელაციური, 3–6, 11–12, 29–30
სინგულარული, 5
სპეციალური, 3–6, 11–12, 29–30
სუბსტანციური, 3–6, 11–12, 29–30
ტერნარული, 5, 11
უნარული, 5, 11
*ოპერატორის მოქმედების არე, 12
ოპერატორის წონა, 5, 11
ოპერატორული ასოს მოქმედება, 18
ოპერატორული ასოს მოქმედების არე, 18
ოპერატორული ნიშანი, 5, 10–12
ძირითადი, 5
ბინარული, 5
რთული, 33
წარმოებული, 11, 29
არის წარმოებული ოპერატორის უშუალო წინამორბედი, 61–63
არის ოპერატორული ნიშნის უშუალო წინამორბედი, 61–63
არის წარმოებული ოპერატორის წინამორბედი, 61–63
არის ოპერატორული ნიშნის წინამორბედი, 61–63
ლოგიკური, 5, 11–12, 29–29
ლოგიკო-სპეციალური, 5, 11–12, 29–30
m-არული, 5, 11–12, 29–30
n-ადგილიანი, 5, 11–12, 29–30
ფორმისა, მოქმედებს ფორმის ასოებზე, 18
ფორმისა, მოქმედებს ნაწილში შემოსვლაზე, 18
ნაწილობრივი, 5, 10–12
რელაციური, 5, 11–12, 29–30
სინგულარული, 5
სპეციალური, 5, 11–12, 29–30
სუბსტანციური, 5, 11–12, 29–30
ტერნარული, 5
უნარული, 5
სრული, 5, 11–12
ოპერატორული ნიშნის წონა, 5, 11
პროპოზიციული კავშირი, 3, 11–12
ძირითადი, 3
წარმოებული, 11
პროცესი
α-პროცესი; α^*-პროცესი, 86
α-პროცესის ან α^*-პროცესის i-ური ბიჯი, 86
β-პროცესი; β'-პროცესი, 67–68
γ-პროცესი; γ'-პროცესი, 67–68
γ'-პროცესის შესაბამისი γ-პროცესი, 71
შესაბამისი α-პროცესები, 86–87
პარალელური α-პროცესები, 86–87
შესაბამისი α^*-პროცესი, 87
სიმბოლო*, 11
ძირითადი, 5
შემამოკლებელი, 11

წარმოებული, 11
სიმბოლოს (შემოსვლის) ჯერადობა, 98
ნაწილის მიმართ, 98
სიტყვა თავისუფალია
ფორმაში a ასოსთვის, 17
$\mathbb{A}$ ფორმის $\mathbb{A}_1$ ნაწილისთვის $\mathbb{A}$-ში, 17
სიტყვა სრულიად თავისუფალია $\mathbb{A}$ ფორმის $\mathbb{A}_1$ ნაწილისთვის $\mathbb{A}$-ში, 17
სიტყვების თავისუფლება ფორმებში მათი ნაწილების მიმართ, 17–17
*სიტყვის შემოსვლა სიტყვაში, 11
სუბსტიტუენდი, 37
წინამორბედი, 37
ჩამკეტი, 37
ფაქტობრივი, 37
ფაქტობრივი წინამორბედი, 37
ფაქტობრივი ჩამკეტი, 37
ტერმი, 6–7
უმარტივესი, 6
მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი, 32
მეტაცვლადებისა და ოპერატორების გამოყენებით შედგენილი*, 32
მეტაცვლადებისა და (—/—) ტიპის ჩანაცვლებების გამოყენებით შედგენილი, 32–33
მეტაცვლადების, (—/—) ტიპის ჩანაცვლებებისა და ოპერატორების გამოყენებით შედგენილი, 33
ტიპი
ფორმის ასოების ჯგუფისა, 13
შემამოკლებელი სიმბოლოსი, 5, 54
წარმოებული ოპერატორისა, 5, 54, 56
ოპერატორული ნიშნისა, 54, 56
ფორმისა, 7
ურთიერთვარიანტული ფორმები, 13
ურთიერთკონგრუენტული ფორმები, 13
ფორმა, 6–8
$\mathbb{A}$ არის $\mathbb{B}$ ფორმის ვარიანტი, 13
$\mathbb{A}$ კონგრუენტულია $\mathbb{B}$ ფორმისა, 13
თეორიის კანონიკური წინამორბედი, 65
მეტაცვლადების გამოყენებით შედგენილი, 32
მეტაცვლადებისა და ოპერატორების გამოყენებით შედგენილი, 32–33
მეტაცვლადებისა და (—/—) ტიპის ჩანაცვლებების გამოყენებით შედგენილი, 32–33
მეტაცვლადების, (—/—) ტიპის ჩანაცვლებებისა და ოპერატორების გამოყენებით შედგენილი, 33
საგნობრივი, 7
თეორიის წინამორბედი, 65
პროპოზიციული, 7
თეორიის არასაკუთრივი კანონიკური წინამორბედი, 65
უმარტივესი, 6
ფორმების კონგრუენტულობა, 13
ფორმის ასოების (ასოთა შემოსვლების) ჯგუფი, 13
დაბმული, 13
თავისუფალი, 13
ფორმის ასოების ჯგუფის სახე, 13
ფორმის ასოების ჯგუფის ტიპი, 13
ფორმის გამარტივებული სახე**, 83
ფორმის ვარიანტი (ფორმების ურთიერთვარიანტულობა), 13
*ფორმის ნაწილი
$\mathbb{A}$ ფორმის ნაწილი მდებარეობს $\mathbb{A}$ ფორმის a ოპერატორული ასოს მოქმედების არეში, 18
ფორმის ოპერატორული ასო
მოქმედებს ასოს შემოსვლაზე, 18
მოქმედებს $\mathbb{A}_1$ ნაწილის ადგილას მდებარე $\mathbb{B}$ ფორმაზე, 18
მოქმედებს $\mathbb{A}_1$ ნაწილზე, 18
ფორმის ტიპი, 7
ფორმულა, 6
ატომური, 7
უმარტივესი, 6
შედგენილი ოპერატორის განსაზღვრება, 58
შემამოკლებელი სიმბოლო
დამოკიდებულია არაკვანტორულ კონსტანტაზე, 61–63
დამოკიდებულია ოპერატორზე, 61–63
დამოკიდებულია ოპერატორულ ნიშანზე, 61–63
უშუალოდ დამოკიდებულია არაკვანტორულ კონსტანტაზე, 61–62
უშუალოდ დამოკიდებულია ოპერატორზე, 61–62
უშუალოდ დამოკიდებულია ოპერატორულ ნიშანზე, 61–62
შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრება, 27

I ტიპის, 39
I_i ტიპის ($i = 1, 2, 3$), 39–41
II ტიპის, 42–43
II′ ტიპის, 42
II_i ტიპის ($i = 1, 2, 3$), 44
II'_i ტიპის ($i = 1, 2, 3$), 44
II_{s} ტიპის, 44
II_{is} ტიპის ($i = 1, 2, 3$), 44
III_i, IV_i, IV'_i, IV'_{is} და ა. შ. ტიპების ($i = 1, 2, 3$), 44
საკუთრივი II ტიპის, 44
III ტიპის, 45
IV ტიპის, 48
IV′ ტიპის, 48
V ტიპის, 51
VI ტიპის, 52
VI′ ტიპის, 53
VII ტიპის, 56
შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების დამატებითი ასოები, 43
შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების კერძო შემთხვევა, 60–61
კანონიკური, 60
შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევა, 60
კანონიკური, 60
შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების მარცხენა ნაწილი, 27
შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების მარჯვენა ნაწილი, 27
შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების ძირითადი შინაარსი, 28
შემამოკლებელი სიმბოლოს ნომერი, 58–59
შემამოკლებელი სიმბოლოს ტიპი, 5, 54
შემოკლებული კვაზიფორმა, 66
შემოკლებული კვაზიფორმულა, 66
შემოკლებული სახე
ფორმის, 61, 65
ფორმის, არასაკუთრივი, 65–66
კვაზიფორმის, 66
კვაზიტერმის, 66
ტერმის, 66
შემოკლებული ფორმა, 61, 66, 83
ზედა ინდექსი, 97
ქვედა ინდექსი, 97
შემოკლებული ფორმების მიმდევრობა
კანონიკური რეგულარული, 65
კანონიკური ნორმალური, 65
კანონიკური უკუ ნორმალური, 65
კანონიკური პირდაპირი ნორმალური, 65
ნორმალური, 65
უკუ ნორმალური, 65
პირდაპირი ნორმალური, 65
რეგულარული, 65
შემოკლებული ფორმის ნაწილი, 83
შემოკლებული ფორმულა, 66
შეცვლა, 18–20
ასოების ჯგუფებისა, 13
ასოების ჯგუფებისა, ერთდროული, 13
თავისუფალი ასოებისა, 13
თავისუფალი ასოებისა, ერთდროული, 13
დაბმული ასოებისა, 13
დაბმული ასოებისა, ერთდროული, 13
უშუალო (ერთდროული), 18
ნაწილების ადგილას ფორმებისა, ერთდროული (სხვადასხვა ტიპის), 18–20
ნაწილის ადგილას ფორმისა, მარტივი (სხვადასხვა ტიპის), 18–20
შუალედური ფორმები $\mathscr{T}$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების მიმართ, 8
შუალედური ფორმები $\mathscr{T}'$ და $\mathscr{T}''$ თეორიების მიმართ, 8
ჩანაცვლება
ერთდროული (სხვადასხვა სახის), 15–16
მარტივი (სხვადასხვა სახის), 14–16
(— /: —) ტიპის, 17
(— /. —) ტიპის, 17
(—/—) ტიპის, 17
ჩანაცვლების ნიშანი, 33
პირდაპირი, 33
ცვლადი, 4
კლასური, 10
ელემენტური, 10
ფუნქციონალური, 3–4
რელაციური ფუნქციონალური, 3
სუბსტანციური ფუნქციონალური, 3
ინდივიდური, 10
საგნობრივი, 3
ოპერატორული, 5
პრედიკატული, 3
პროპოზიციული, 3
კვანტორული, 5
რელაციური, 3
სიმრავლური, 10

უნივერსალური, 10
წარმოებული ოპერატორი
დამოკიდებულია არაკვანტორულ კონსტანტაზე, 61–63
დამოკიდებულია ოპერატორზე, 61–63
დამოკიდებულია ოპერატორულ ნიშანზე, 61–63
უშუალოდ დამოკიდებულია არაკვანტორულ კონსტანტაზე, 61–62
უშუალოდ დამოკიდებულია ოპერატორზე, 61–62
უშუალოდ დამოკიდებულია ოპერატორულ ნიშანზე, 61–62
σ არის σ' ოპერატორის უშუალო მომდევნო, 61–63
σ არის σ' ოპერატორული ნიშნის უშუალო მომდევნო, 61–63
σ არის არაკვანტორული კონსტანტის მომდევნო, 61–63
σ არის ოპერატორის მომდევნო, 61–63
σ არის ოპერატორული ნიშნის მომდევნო, 61–63
წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრება, 58
წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების კერძო შემთხვევა, 60–61
კანონიკური, 60
(სხვადასხვა ტიპის) (d_2) პირობით, 64
წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრების კვაზიკერძო შემთხვევა, 60
კანონიკური, 60
წარმოებული ოპერატორის ინდექსი
ზედა, 98
ქვედა, 98
j ნომრის (j-ური), 98
j-ური მარტივი, 98
მარტივი, 98
წარმოებული ოპერატორის ნომერი, 58
წარმოებული ოპერატორის ტიპი, 5, 54, 56
წარმოებული ოპერატორული ნიშნის ინდექსი
ზედა, 100
ქვედა, 100
j-ური, 100
j-ური მარტივი, 100
წონა, 5, 11
ოპერატორისა, 5, 11
ოპერატორული ნიშნისა, 5, 11
*წყვილი ფრჩხილი, 8
ჯერადობა
შემოკლებული ფორმის სიმბოლოსი (შემოსვლისა), 98
სიმბოლოსი (შემოსვლისა) ნაწილის მიმართ, 98
შემოკლებული ფორმის ნაწილისა, 98

აღნიშვნები

(— /. —), (— /: —), 14
(—/—), 15–17
≓, 15
(— //: —), (— // —), 18
$\mathbf{S}^{n+1}$, $\mathbf{R}^{n+1}$, 33
$\mathbf{S}^{n+1}_{\widetilde{\mathscr{T}}}$, 35
α, α^*, „*“, 86
$\mathbb{B}$, $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}^*$, $\mathbb{B}^*_1$, $\mathbb{B}'$, $\mathbb{B}'_1$, 99
(a) პირობა, 39
(b) პირობა, 39
($a\,\mathrm{I}_1$), ($a\,\mathrm{I}_2$) პირობები, 41
(a_1) პირობა, 42
(d), (d') პირობები, 42
(a_S), (b_S), (c) პირობები, 44
($\widetilde{c}$), (c'), (ℓ) პირობები, 45
($a_{1\mathrm{S}}$), (d_S), (c_1), (ℓ_1) პირობები, 48
(ℓ_{10}) პირობა, 50
(ℓ_0), (c'_1), (c''_1) პირობები, 51
(a_2), (ℓ_2), (c_2) პირობები, 51
(a_3), (d^*) პირობები, 52

ლიტერატურა

[1] ნ. ბურბაკი, *სიმრავლეთა თეორია* (რუსული თარგმანი), მოსკოვი, 1965.

[2] ს. კ. კლინი, *შესავალი მეტამათემატიკაში* (რუსული თარგმანი), მოსკოვი, 1957.

[3] ე. მენდელსონი, *შესავალი მათემატიკურ ლოგიკაში* (რუსული თარგმანი), მოსკოვი, 1973.

[4] შ. ს. ფხაკაძე, შემამოკლებელ სიმბოლოთა ერთი კლასის შესახებ (I), კრებულში: *გამოკვლევები მათემატიკურ ლოგიკასა და ალგორითმთა თეორიაში* (გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის შრომათა კრებული), თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1975, გვ. 31–102 (რუსულ ენაზე).

[5] ა. ჩერჩი, *შესავალი მათემატიკურ ლოგიკაში* (რუსული თარგმანი), მოსკოვი, 1965.

[6] ჯ. შენფილდი, *მათემატიკური ლოგიკა* (რუსული თარგმანი), მოსკოვი, 1975.

[7] დ. ჰილბერტი, პ. ბერნაისი, *Grundlagen der Mathematik*, ტ. I, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

(რედაქციას მიულია 1976 წლის 15 ივლისს.)

რეზიუმე

რედაქციის შენიშვნა. ქვემოთ უცვლელად, ავტორისეული მართლწერითა და პუნქტუაციით არის მოცემული ავტორის 1977 წლის ქართული რეზიუმე (ორიგინალი გამოცემის გვ. 194–195). ტექსტი გადამოწმებულია ორიგინალის ასლთან. სათაური მოცემულია ამ გამოცემაში მიღებული ფორმით (ორიგინალში: „აღნიშვნების თეორიის ზოგიერთი საკითხი“).

შ. ფხაკაძე

აღნიშვნების თეორიის ზოგიერთი საკითხი

რ ე ზ ი უ მ ე

მოძებნილია საკმარისად ზოგადი სისტემა შემამოკლებელ სიმბოლოთა განსაზღვრების წესებისა კლასიკურ ფორმალურ და შინაარსულ მათემატიკურ თეორიების შემთხვევაში. იგი ოპტიმალურია იმ აზრით, რომ, ერთი მხრივ, ამ წესების გამოყენებით შესაძლებელია თითქმის ყველა იმ შემამოკლებელ სიმბოლოს შემოტანა, რომლებიც გამოიყენება ძირითად კლასიკურ ფორმალურ და შინაარსულ მათემატიკურ თეორიებში. მეორე მხრივ კი, ამ წესებით შემოტანილ შემამოკლებელ სიმბოლოთა ნებისმიერ სისტემას აქვს ისეთი თვისებები, რომლებიც უზრუნველყოფენ მნიშვნელოვან თავისუფლებას შემოკლებულ ფორმებზე ოპერირებისას.

შესწავლილია შემოკლებულ ფორმიდან ფორმის აღდგენის ალგორითმული პროცესები. საკმაოდ ბუნებრივად შემოტანილ ალგორითმთა კლასში მოძებნილია შემოკლებულ ფორმიდან ფორმის აღდგენის ალგორითმი ბიჯების მინიმალური /მაქსიმალური/ რიცხვით. შეისწავლება აგრეთვე შემამოკლებელ სიმბოლოებისა და შემოკლებულ ფორმათა სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლები.

ავტორის ინგლისური რეზიუმე

ქვემოთ მოცემულია ავტორის ორიგინალური ინგლისური რეზიუმე (აშკარა ბეჭდური შეცდომები გასწორებულია).

Sh. Pkhakadze. Some Problems of the Notation Theory.

A sufficiently general system of rules of definition of contracting symbols is found in the case of classical formal mathematical theories. The system is optimal in the sense that, by using the above rules, one can, on the one hand, introduce nearly all the contracting symbols which are used in basic classical formal and informal mathematical theories. On the other hand, any system of contracting symbols introduced according to these rules has such properties which allow one to operate freely on contracted forms.

The algorithmic processes of regenerating the form from the contracted form are studied. In the class of algorithms of regenerating the form from the contracted form, the algorithm with the minimal (maximal) number of steps is introduced. Some numerical characteristics of contracting symbols and contracted forms are also studied.

გამოცემის საიდენტიფიკაციო მონაცემები

Ш. С. Чхаидзе
Алгебраические теории некоторые вопросы
(რუსულ ენაზე)
Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, 1977.

გამომცემლობის რედაქტორი	ბ. ა. მიქაძე
ხელმოწერილია დასაბეჭდად	1977 წლის 18 მაისს
ნაბეჭდი თაბახი	12,25
საგამომცემლო თაბახი	8,67
შეკვეთა N	69
წარმოების კოდი	УЭ 06614
ტირაჟი	290 ცალი
ფასი	71 კაპეიკი

დაიბეჭდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის როტაპრინტზე.
380043, თბილისი, 43.

პირველი ქართული წინასარედაქციო გამოცემის მთარგმნელ-რედაქტორების დასკვნითი სიტყვა

დავით გეგია, ალექსანდრე მასხარაშვილი და კონსტანტინე ფხაკაძე, შალვა ფხაკაძის მონოგრაფიის „აღნიშვნათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი“ წინასარედაქციო გამოცემის მთარგმნელ-რედაქტორები

გამოცემა მომზადდა საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში არსებულ საქართველოს სახელმწიფო ენების კულტურული დაცვისა და ტექნოლოგიური განვითარების სამეცნიერო-კვლევით ინსტიტუტში. ინსტიტუტი 2025 წლის 15 მაისს ამოქმედდა უნივერსიტეტის რექტორის, აკადემიკოს დავით გურგენიძის მხარდაჭერით და უშუალოდ საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტროს მიერ ფინანსდება სახელმწიფო ბიუჯეტიდან.

გამოცემა მომზადდა ინსტიტუტის სადამფუძნებლო პროექტის ფარგლებში, რომლის სახელწოდებაა „ქართული და აფხაზური ენებით, კულტურებითა და ტრადიციებით მშვიდობიანად გაერთიანებული საქართველოთი ევროპისკენ ანუ, მოკლედ, ქართული და აფხაზური ენებით ევროკავშირში ანუ საქართველოს სახელმწიფო ენების სრული ტექნოლოგიური უზრუნველყოფის 2025–2029 წლების საბიუჯეტო სამოქმედო გეგმა“ (https://geoanbani.com/Other/PDFs/Articles/26.pdf).

მთარგმნელ-რედაქტორები:

1. **დავით გეგია** არის ინსტიტუტის ლოგიკის, ენისა და ხელოვნური ინტელექტის განყოფილების მთავარი მეცნიერ-თანამშრომელი და სამეცნიერო საბჭოს წევრი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის აკადემიური საბჭოს წევრი.

2. **ალექსანდრე მასხარაშვილი** არის ილინოისის უნივერსიტეტის (აშშ) ენათმეცნიერების დეპარტამენტის ასისტენტ-პროფესორი გამოთვლით ლინგვისტიკაში. იგი ინსტიტუტის სადამფუძნებლო პროექტის თანაავტორია.

3. **კონსტანტინე ფხაკაძე** არის ინსტიტუტის სადამფუძნებლო პროექტის თანაავტორი. იგი ინსტიტუტის დირექტორია და სამეცნიერო საბჭოს თავმჯდომარე. ამასთან, არის საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო, ტექნოლოგიური და საბუნებისმეტყველო საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოს წევრი, უნივერსიტეტის სასწავლო და სამეცნიერო ლიტერატურის სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს წევრი, საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტროს მეცნიერთა საბჭოს წევრი და სახელმწიფო ენის დეპარტამენტის ექსპერტთა კომისიის წევრი. 2012 წელს საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის ყო-

ველწლიურ საერთაშორისო კონფერენციაზე მან დააფუძნა სექცია „ლოგიკა, ენა, ხელოვნური ინტელექტი“ და არის ამ სექციის ერთ-ერთი თანახელმძღვანელი.

ჩვენ მადლიერებით მივიღებთ შეტყობინებებს ნებისმიერი სახის შეცდომის – ენობრივ-ორთოგრაფიული, ენობრივ-სინტაქსური თუ ენობრივ-სემანტიკური – შესახებ. გთხოვთ, ინფორმაცია გამოგვიგზავნოთ ელ-ფოსტაზე: gllc.ge@gmail.com. თქვენი შენიშვნები დაგვეხმარება შემდეგი გამოცემების ხარისხობრივ დახვეწაში.

მოკლე ინფორმაცია საქართველოს მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწის, კლასიკური მათემატიკური ლოგიკის ქართული სკოლის ფუძემდებლის, პროფესორ შალვა ფხაკაძის შესახებ:

1. http://www.nplg.gov.ge/bios/en/00009469/ – Biographical Dictionary – Shalva Pkhakadze
2. https://gmu.gtu.ge/index.php?page=pkhakadze&lang=en – Shalva Pkhakadze 100 – Georgian Mathematical Union
3. https://newspaper.tsu.ge/uploads/newspaper/N-7%20(2233)-2019_web.pdf#page=13 – Shalva Phkhakadze 100 – At the Origins of the Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics
4. https://geoanbani.com/TbiLLAI/ – First Tbilisi International Summer School in “Logic, Language, Artificial Intelligence” dedicated to the memory of the founder of the school of classical mathematical logic in Georgia, Honored Scientist of Georgia, Shalva Pkhakadze
5. https://geoanbani.com/TbiLLAI/files/%e1%83%9e%e1%83%a0%e1%83%9d%e1%83%92%e1%83%a0%e1%83%90%e1%83%9b%e1%83%90.pdf#page=30 – The founder of the school of classical mathematical logic in Georgia, Honored Scientist of Georgia, Shalva Pkhakadze – Brief Biographical Data
6. https://geoanbani.com/TbiLLAI/files/%e1%83%9e%e1%83%a0%e1%83%9d%e1%83%92%e1%83%a0%e1%83%90%e1%83%9b%e1%83%90.pdf – FIRST TBILISI INTERNATIONAL SUMMER SCHOOL IN “LOGIC, LANGUAGE, ARTIFICIAL INTELLIGENCE” dedicated to the memory of the founder of the school of classical mathematical logic in Georgia, Honored Scientist of Georgia, Shalva Pkhakadze
7. https://geoanbani.com/TbiLLAI/files/AMIM%20Vol.25%20No.2,%202020.pdf – AMIM, 25, No. 2, 2020, ISSN 1512-0074 (https://www.viam.science.tsu.ge/Ami/2020_2/2020_2.htm)
8. https://www.viam.science.tsu.ge/Ami/2020_2/2_overview.pdf – Kh. Rukhaia, K. Pkhakadze, Shalva Pkhakadze – a Brief Overview of his Life (AMIM, 25, No. 2, 2020, pp. 9–30).

გამოიცემა ჟურნალ „ქართული ენა და ლოგიკა“ (ISSN 1512-2840) დამატების სახით
ელ-ფოსტა – gllc.ge@gmail.com
ვებგვერდი – https://geoanbani.com/